现代物理基础丛书 76

# 数学物理方程及其近似方法（第二版）

程建春 著



现代物理基础丛书　76

# 数学物理方程及其近似方法
# (第二版)

程建春　著

科学出版社
北　京

# 内 容 简 介

本书系统论述了数学物理方程及其近似方法，主要内容包括：数学物理方程的基本问题、本征值问题和分离变量法的基本原理、Green 函数方法、变分近似方法、积分方程及其近似方法、微扰方法和渐近展开、数学物理方程的逆问题，以及非线性数学物理方程.

本书不仅可作为本科生和研究生学习数学物理方程课程的参考书，对从事相关领域科学研究的工作者也有一定的帮助.


**图书在版编目（CIP）数据**

数学物理方程及其近似方法/程建春著. —2 版. —北京：科学出版社, 2016.
(现代物理基础丛书；76)
ISBN 978-7-03-049144-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①程… Ⅲ. ①数学物理方程 Ⅳ. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 143705 号

责任编辑：刘凤娟／责任校对：蒋 萍
责任印制：张 伟／封面设计：耕者设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2016 年 6 月第一次印刷 印张: 58 1/4
字数: 1 151 000

**定价：199.00 元**

# 第二版前言

本书第一版出版于十年前, 实际上成稿于三十前作者给研究生开设的数学物理方程课程, 现在看来修改是必须的. 作者在第二版中对第一版的内容作了全面的修改与补充, 主要增加的内容有下述几个方面.

1. 提高与物理学内容的结合度, 增加了许多处理声学、电磁学以及量子力学方面的例子和章节, 以丰满所述内容, 例如电磁场计算中的矩量法, 量子力学中的近似方法, 声学中的声辐射和声散射, 等等;

2. 增加了有限元和边界元数值计算的基本原理方面的论述. 实际上, 基于变分法的有限元近似和基于积分方程的边界元近似, 在第四、五章中讲述也是顺理成章的. 这两部分内容的增加也使本书更名副其实.

3. 增加了非 Hermite 对称算子理论部分, 这一部分内容在声学和电磁场理论中是非常实用的. 事实上, 在引进波的衰减和边界阻抗后, 声学和电磁场中遇到的实际问题都必须面对非 Hermite 对称的波动算子.

4. 扩展了部分内容, 如第五章介绍了分数导数、分数 Laplace 算子以及分数 Fourier 变换, 而且这一部分内容丰富了 Fourier 变换, 本征值理论, 以及 Hermite 多项式应用. 故作者认为增加这一部分是非常必要的.

5. 全面改写了第七章中关于抛物型方程逆问题、椭圆型方程逆问题和波动方程逆问题的内容, 使之更有深度. 但必须说明的是, 作者在这方面的科研工作较少, 而这方面的内容又较新, 错误是难免的.

作者对第二版的定位是, 本书不仅仅作为教学参考书, 而且通过阅读本书, 能够对读者的科研工作提供一定的帮助.

# 第一版前言

本书是为研究生学习数学物理方程而编写的. 研究生在本科阶段已学过这方面的课程. 为了避免重复并且达到提高目的, 本书选择内容较深, 讲述方法立足点较高. 特别是引进了若干泛函方面的理论 (例如, 第二章中 Hilbert 空间概念), 并且尽可能给出严格的数学证明 (例如第四章详细证明了本征函数系完备性定理). 当然, 直观的物理描述方法还是占主导地位.

本书分八章, 各章的内容大致如下. 第一章讲述数学物理方程的基本问题, 介绍几个典型定解问题的求解方法. 重点讨论定解问题的适定性 (主要是唯一性和稳定性); 第二章讲述分离变数法基本原理. 首先引进 Hilbert 空间概念 (特别是平方可积函数空间 $L^2[a,b]$). 因为正交函数展开是分离变数法的关键，故第二章对一定函数类按完备的正交归一系展开问题进行了详细的讨论. 本章讨论的另一个十分重要的问题是本征值问题, 特别是 Sturm–Liouville 型本征值问题; 第三章介绍求解定解问题的一个重要方法, 即 Green 函数理论. 本章特别强调的一个问题是如何利用 Green 函数把微分方程化成积分方程; 第四章介绍一种十分有用的近似方法, 即变分近似方法, 它在工程或物理问题中应用广泛; 第五章是关于积分方程的的基本理论, 因微分方程可通过 Green 函数转化成积分方程, 而对积分方程的讨论往往比较简单 (例如讨论解的存在性). 此外, 积分方程在实际问题中也经常出现; 第六章讨论微扰理论, 主要介绍正则微扰 (参数变形法和多尺度展开)、奇异微扰及边界层理论方面的基本概念. 实际问题能严格求解的很少, 因此微扰理论具有实用意义. 这方面的理论相当丰富, 本章仅仅介绍一些基本思想; 第七章介绍目前科学与工程的热点课题，即数学物理方程的逆问题. 介绍逆问题的基本概念和主要方法; 最后, 第八章介绍若干典型的非线性数学物理方程, 特别是这些非线性方程存在的 “孤立波” 解.

整个课程大致需要 120 学时左右. 总的来说, 量比较大. 但因研究生自学能力强, 本书的数学推导详细, 适合于自学. 选择适当的章节, 在 80 学时 (或 60 学时) 内完成教与学的任务是不成问题的.

本书的出版得到国家杰出青年科学基金和南京大学 “985” 工程的资助.

# 英汉人名对照表

Airy 艾里
Bäcklund 贝克隆
Banach 巴拿赫
Bessel 贝塞尔
Born 玻恩
Brillourin 布里渊
Burgers 伯格斯
Cauchy 柯西
Chebyshev 切比雪夫
Cherenkov 切伦科夫
Cole 科尔
Courant 柯朗
d′Alembert 达朗贝尔
Dirac 狄拉克
Duhamel 杜阿美尔
Euler 欧拉
Fisher 费舍儿
Fourier 傅里叶
Fredholm 弗雷德霍姆
Galerkin 伽辽金
Gauss 高斯
Gelfand 盖尔范德
Gordon 戈登
Goursat 古沙特
Gram 格拉姆
Green 格林
Hamilton 哈密顿
Hammerstein 哈默斯坦
Hankel 汉克尔
Hausdorff 豪斯多夫
Heaviside 赫维赛德
Helmholtz 亥姆霍兹
Herglotz 赫格洛茨
Hermite 厄米
Hilbert 希尔伯特
Hirota 广田
Hopf 霍普夫
Jacobi 雅可比
Kantorovich 康托洛维奇
Kirchhoff 基尔霍夫
Klein 克莱因
Kortweg 考特维克
Kramer 克雷默
de Vries 德弗里
Lagrange 拉格朗日
Laguerre 拉盖尔
Laplace 拉普拉斯
Lax 拉克斯
Legendre 勒让德
Liouville 刘维尔
Lippman 李普曼
Mach 马赫
Neumann 诺依曼
Newton 牛顿
Parseval 帕塞瓦尔
Poisson 泊松
Rayleigh 瑞利
Riesz 里斯
Ritz 里茨
Rutherford 卢瑟福
Rytov 雷托夫
Schmidt 施密特
Schrödinger 薛定谔

Schwartz 施瓦兹
Schwinger 施温格
Stefan 斯特藩
Stirling 斯特林
Sturm 斯图姆
Taylor 泰勒
Tikhonov 吉洪诺夫
Urysohn 乌里申
Volterra 沃尔特拉
Weierstrass 魏尔斯特拉斯
Wentzel 文策尔
Wronski 朗斯基

# 目　　录

# 第 1 章　数学物理方程的基本问题

数学物理方程是源于物理及工程问题的微分方程 (包括常微分方程和偏微分方程). 典型的数学物理方程包括波动方程、输运方程及位势方程 (Laplace 方程). 它们分别描述三类不同的物理现象: 波动 (声波和电磁波)、输运 (热传导和扩散) 和状态平衡 (静电场分布、平衡温度场分布和不可压流体流动的速度势等). 从方程本身来看, 它们又是三类方程, 即双曲型、抛物型和椭圆型方程的最简单例子.

除偏微分方程外, 另一类十分重要的数学物理方程为**积分方程**, 即方程中含有未知函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 积分的方程. 典型的积分方程有第一、第二类 Fredholm 和 Volterra 方程, 我们将在第五章专门讨论之.

本章讨论三类典型数学物理方程的若干基本问题, 主要内容有: 1.1 节讨论数学物理方程的分类并引出定解问题及定解问题适定性的概念, 以后各节分别讨论波动方程、Laplace 方程以及热传导方程的各种定解问题, 重点是解的唯一性和稳定性.

## 1.1　数学物理方程的分类及一般性问题

本节首先简单介绍有关偏微分方程及其解的若干基本概念, 然后讨论二阶线性偏微分方程的分类以及标准形式. 最后在 1.1.6 小节中讨论数学物理方程的一般性问题, 即定解问题以及定解问题适定性概念.

### 1.1.1　基本概念: 古典解、广义解和叠加原理

含有未知函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及偏导数的方程称为**偏微分方程**, 如果方程中出现的偏导数最高阶为 $m$ 则称方程为 **$\boldsymbol{m}$阶偏微分方程**. 进一步, 如果方程关于 $u$ 及 $u$ 的各阶偏导数都是线性的, 则称方程为 **$\boldsymbol{m}$阶线性偏微分方程**.

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\boldsymbol{L}u = \boldsymbol{f} \tag{1.1.1a}$$

其中算子 $\boldsymbol{L}$ 定义

$$\boldsymbol{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{1.1.1b}$$

其中 $a_{ij}, b_i, c$ 和 $f$ 都是变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$(包括空间和时间变量) 的函数. 当 $f = 0$ 时, 称方程 (1.1.1a) 为**齐次方程**, 否则称为**非齐次方程;** 如果所有的系数 $a_{ij}, b_i, c$ 与变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 无关, 则称方程为**常系数线性偏微分方程,**它的一个重要性质是平移不变性, 即如果作坐标 (时间或者空间变量) 平移变换

$$(x_1', x_2', \cdots, x_n') = (x_1 + a_1, x_2 + a_2, \cdots, x_n + a_n) \tag{1.1.1c}$$

其中 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为平移常矢量, 则方程 (1.1.1a) 和 (1.1.1b) 的形式不变. 物理上, 这一性质反映了时空的均匀性.

显然, 可以写出无数偏微分方程, 但并不是每个方程都有它的实际应用. 因此, 我们主要讨论物理和工程中出现的方程, 这样的方程称为**数学物理方程.**典型的数学物理偏微分方程有三类: 波动方程、输运方程以及位势方程, 它们分别具有形式

(1) 波动方程

$$\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u(\boldsymbol{r}, t) = f(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.1.2a}$$

(2) 输运 (或热传导) 方程

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u(\boldsymbol{r}, t) = g(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.1.2b}$$

(3) 位势方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = h(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.2c}$$

其中 $\nabla^2$ 为 Laplace 算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{1.1.2d}$$

$\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示空间变量 ($n = 1, 2, 3$ 分别对应一、二和三维情况), $t$ 表示时间变量, 注意: 在经典物理中, 由于时间变量 $t$ 的特殊性, 方程 (1.1.2a) 和 (1.1.2b) 中把时间变量 $t$ 单独表示出来, 以区别于空间变量 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $a$ 为常量. $u$ 表示某个物理场的时间-空间分布, 例如, 波动方程 (1.1.2a) 中, $u(\boldsymbol{r}, t)$ 可以表示声场中声压的时间-空间分布；输运方程 (1.1.2b) 中, $u(\boldsymbol{r}, t)$ 可以表示温度场中温度的时间-空间分布；位势方程 (1.1.2c) 中, $u(\boldsymbol{r})$ 表示稳态温度场中温度的空间分布, 或者静电场中电势的空间分布, 等等. 显然, 以上三个方程是二阶线性偏微分方程 (1.1.1a) 的特例. 注意：当 $h(\boldsymbol{r}) = 0$ 时, 称方程 (1.1.2c) 为 Laplace 方程, 否则称为 Poisson 方程.

**关于 Laplace 算子的讨论.**

(1) **Laplace 算子的物理内涵** 从方程 (1.1.2a)–(1.1.2c) 可以看出, 尽管波动方程、输运方程和位势方程描述完全不同的物理过程, 但它们都包含 Laplace 算子,

这一点在物理上表示了什么性质? 设三维物理场 $u(x,y,z,t)$ 在原点 $(0,0,0)$ 附近的值可表示为

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n,m,l=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!l!}\left(\frac{\partial^{n+m+l}u}{\partial x^n\partial y^m\partial z^l}\right)_0 x^n y^m z^l \tag{1.1.3a}$$

上式展开到二次项并在边长为 $l$、体积为 $\Delta V=l^3$ 的小立方体 (立方体的体心为原点) 内作平均得到

$$\bar{u}-u_0\approx\frac{l^2}{24}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0\right]\approx\frac{l^2}{24}\nabla^2 u \tag{1.1.3b}$$

其中 $u_0\equiv u(0,0,0,t)$ 为原点的值, $\bar{u}$ 为原点附近小立方体内 $u$ 的平均值

$$\bar{u}\equiv\frac{1}{\Delta V}\iiint_{\Delta V}u(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.1.3c}$$

得到式 (1.1.3b), 已利用了奇函数的积分为零这一性质. 注意到坐标原点的任意性, 式 (1.1.3b) 表明：Laplace 算子度量物理量 $u$ 在某点数值 $u_0$ 与包含该点的无限小邻域内的平均值 $\bar{u}$ 之差. 这个差值在不同的物理过程中起不同的作用：对扩散系统 (热扩散或者物质扩散), 由于局域值 $u_0$ 不同于平均值 $\bar{u}$, 这种差别会引起一种随时间趋向于均匀化的趋势, 而且这种偏差越大, 产生均匀化趋势越强, 即 $\partial u(\boldsymbol{r},t)/\partial t\sim\bar{u}-u_0$, 由方程 (1.1.3b), 取适当的系数, 我们就得到齐次输运方程

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-a^2\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{1.1.4a}$$

因此, 输运方程表示的是一种均匀化的物理过程, 可以设想, 当足够长时间后, 物理量 $u$ 趋向于与时间无关的分布；对波动系统, 局域值 $u_0$ 与平均值 $\bar{u}$ 之差起到恢复力的作用, 例如, 当物理量 $u$ 是压力场时, 压力差引起质量元围绕平衡位置作振动, 即加速度 $\partial^2 u(\boldsymbol{r},t)/\partial t^2\sim\bar{u}-u_0$, 由方程 (1.1.3b), 得到齐次波动方程

$$\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{1.1.4b}$$

因此, 波动方程表示的是物理系统的振动过程；对平衡系统, 物理量 $u$ 与时间无关, $\bar{u}-u_0\sim 0$, 即得到 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=0 \tag{1.1.4c}$$

显然, 方程 (1.1.4a)、(1.1.4b) 和 (1.1.4c) 为齐次的扩散、波动和平衡方程.

(2) **Laplace 算子的转动不变性** Laplace 算子的一个十分重要的性质是转动不变性, 物理上反映了空间的各向同性. 设坐标系 $(x_1,x_2,x_3)$ 经过转动至坐标系

$(x'_1, x'_2, x'_3)$, 变换矩阵为 $\{a_{ij}\}, (i, j = 1, 2, 3)$, 即 $x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j$. 在此变换下, 微分运算为

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_i} = \sum_{\nu=1}^{3} a_{\nu i} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \tag{1.1.5a}$$

以及

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = \sum_{\nu=1}^{3} a_{\nu i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \sum_{\tau,\nu=1}^{3} a_{\nu i} a_{\tau i} \frac{\partial^2}{\partial x'_\nu \partial x'_\tau} \tag{1.1.5b}$$

利用正交关系 $\sum_{i=1}^{3} a_{\nu i} a_{\tau i} = \delta_{\nu\tau}$, 不难得到

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{\tau,\nu=1}^{3} \delta_{\nu\tau} \frac{\partial^2}{\partial x'_\nu \partial x'_\tau} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial {x'}_i^2} = \nabla'^2 \tag{1.1.5c}$$

上式说明: Laplace 算子在坐标转动下不变!

**关于波动算子的讨论.**

波动算子 (也称为 d′ Alembert 算子) 定义为

$$\boldsymbol{\Pi} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \tag{1.1.6a}$$

(1) **波动算子在 Galileo 变换下的变化** 设坐标系 $(x'_1, x'_2, x'_3, t')$ 相对于坐标系 $(x_1, x_2, x_3, t)$ 的匀速运动速度为 $\boldsymbol{U}_0$, 当 $t = t' = 0$ 时, 二个坐标系重合, 则空间任意一点的变换关系由下列所谓 Galileo 变换决定

$$x_i = x'_i + U_{0i} t',\ (i = 1, 2, 3);\ t = t' \tag{1.1.6b}$$

不难得到微分关系

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^{3} \delta_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} U_{0j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U}_0 \cdot \nabla\end{gathered} \tag{1.1.6c}$$

以及

$$\nabla'^2 = \nabla^2;\ \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U}_0 \cdot \nabla\right)^2 \tag{1.1.6d}$$

因此, 坐标系 $(x'_1, x'_2, x'_3, t')$ 中的波动算子 $\boldsymbol{\Pi}' = \partial^2/\partial t'^2 - a^2 \nabla'^2$ 转换为

$$\boldsymbol{\Pi} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U}_0 \cdot \nabla\right)^2 - a^2 \nabla^2 \tag{1.1.6e}$$

由此可见: 波动算子在 Galileo 变换下改变形式! 上式在研究匀速运动流体中声的传播和激发中有重要的应用, 此时, 坐标系 $(x_1,x_2,x_3,t)$ 为实验室坐标系, $(x_1',x_2',x_3',t')$ 为固定在流体上、相对流体静止的运动坐标系.

(2) **波动算子在 Lorentz 变换下的不变性** 设坐标系 $(x',y',z',t')$ 相对于坐标系 $(x,y,z,t)$ 的匀速运动速度为 $\boldsymbol{U}_0=(0,0,U_0)$(只有 $z$ 方向分量), 当 $t=t'=0$ 时二个坐标系重合, 则时 - 空的 Lorentz 变换和逆变换关系为

$$\begin{aligned} &x'=x;\ y'=y;\ z'=\frac{z-U_0t}{\sqrt{1-M^2}};\ t'=\frac{t-U_0z/c_0^2}{\sqrt{1-M^2}} \\ &x=x';\ y=y';\ z=\frac{z'+U_0t'}{\sqrt{1-M^2}};\ t=\frac{t'+U_0z'/c_0^2}{\sqrt{1-M^2}} \end{aligned} \tag{1.1.7a}$$

其中 $M=U_0/a<1$($a$ 在电磁现象中为真空中的光速, 在声学中为相对静止介质中的声速). 由微分关系

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x'^2};\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial y'^2} \\ &\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{1-M^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{2U_0}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial z'\partial t'}+\frac{M^2}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right) \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{a^2}{1-M^2}\left(M^2\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{2U_0}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial z'\partial t'}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right) \end{aligned} \tag{1.1.7b}$$

不难得到

$$a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \tag{1.1.7c}$$

即 $\varPi=\varPi'$. 由此可见：波动算子在 Lorentz 变换下形式不变!

**古典解** 以二阶线性偏微分方程 (1.1.1a) 为例, 我们来说明方程解的概念. 方程 (1.1.1a) 的解是指函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 具有方程中出现的各阶连续偏导数, 使方程的左边恒等于右边. 这样的解称为方程 (1.1.1a) 的**古典解**. 为了具体说明古典解的含有, 考虑二个自变量 $(x,t)$ 的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ t>0,\ x\in(-\infty,\infty) \tag{1.1.8a}$$

作变换

$$\xi=\frac{x+t}{2};\ \eta=\frac{x-t}{2} \tag{1.1.8b}$$

则方程 (1.1.8a) 变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \tag{1.1.8c}$$

上式的解可积分两次得到, 具有一般形式

$$u(\xi,\eta)=F(\xi)+G(\eta) \tag{1.1.8d}$$

显然, 上式是方程 (1.1.8c) 解的基本条件是：$F(\xi)$ 和 $G(\eta)$ 必须具有连续的一阶偏导数. 回到原来的变数, 可得方程 (1.1.8a) 的通解为

$$u(x,t)=F(x+t)+G(x-t) \tag{1.1.9a}$$

把上式代入方程 (1.1.8a), 显然要求 $F(x-t)$ 和 $G(x-t)$ 关于 $(x,t)$ 分别具有连续的一阶和二阶偏导数. 由此可见, 尽管方程 (1.1.8a) 与方程 (1.1.8c) 可通过变换式 (1.1.8b) 等价起来, 但二者的古典解对函数 $F$ 和 $G$ 有不同的光滑性要求. 式 (1.1.8d) 中任意函数 $F$ 和 $G$ 由其他附加条件决定, 例如, 如果我们要求 $u(x,t)$ 满足初始条件

$$u|_{t=0}=\phi(x);\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ x\in(-\infty,\infty) \tag{1.1.9b}$$

则 $F$ 和 $G$ 应满足

$$\begin{aligned}\phi(x)&=F(x)+G(x)\\ \psi(x)&=F'(x)-G'(x)\end{aligned} \tag{1.1.9c}$$

不难求得

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[\phi(x)+\int_c^x\psi(s)\mathrm{d}s\right];\ G(x)=\frac{1}{2}\left[\phi(x)-\int_c^x\psi(s)\mathrm{d}s\right]$$

其中 $c$ 为任意实数. 于是, 方程 (1.1.8a) 且满足初始条件式 (1.1.9b) 的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x-t)+\phi(x+t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(s)\mathrm{d}s \tag{1.1.9d}$$

上式称为 **d′ Alembert 公式**.

**广义解** 显然, 式 (1.1.9d) 满足方程 (1.1.8a) 的条件是 $\phi(x)$ 具有连续的一阶和二阶导数, 而 $\psi(x)$ 具有连续的一阶导数, 即要求 $\phi\in C^2$ 和 $\psi\in C^1$, 否则方程 (1.1.8a) 且满足初始条件式 (1.1.9b) 不存在古典解. 但是, 实际物理问题往往不能给出具有如此光滑性的函数 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$(特别是当 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是测量数据时), 而这样的问题却有实际意义. 例如考虑 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 具有形式

$$\phi(x)=\begin{cases}2(x^2-1)^2, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1;\end{cases}\qquad \psi(x)=0 \tag{1.1.10a}$$

显然, $\phi(x)$ 在 $x=\pm1$ 处一阶导数连续, 但二阶导数间断. 因此, 严格地讲方程 (1.1.8a) 和 (1.1.9b) 不存在古典解. 但如果把式 (1.1.10a) 代入式 (1.1.9d) 有

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t) \tag{1.1.10b}$$

其中

$$u_1(x,t)=\begin{cases}[(x-t)^2-1]^2, & |x-t|\leqslant 1\\ 0, & |x-t|>1\end{cases} \tag{1.1.10c}$$

$$u_2(x,t)=\begin{cases}[(x+t)^2-1]^2, & |x+t|\leqslant 1\\ 0, & |x+t|>1\end{cases} \tag{1.1.10d}$$

显然, 在 $x-t$ 平面上除四条直线 $|x\pm t|=1$ 外, 式 (1.1.10b) 满足波动方程 (1.1.8a). 因此, 可把式 (1.1.10b) 看作方程 (1.1.8a) 的一种**广义解.** 由于在 $|x\pm t|=1$ 上 $u(x,t)$ 的二阶导数间断, 但一阶导数连续, 故这种广义解也称为**弱间断解.**

因此, 有必要推广方程解的含义, 引进广义解的概念. 广义解有多种定义, 本节介绍基于函数序列逼近概念定义的广义解, 这样的广义解称为**强解**(区别于 3.1.4 小节中定义的**弱解**). 仍然以式 (1.1.9d) 为例, 如果存在古典解的条件 $\phi\in C^2$ 和 $\psi\in C^1$ 不成立, 但可设想用下述方法来解决这一问题. 我们选取函数序列 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\psi_n\}$, 并且序列的每个元素满足 $\phi_n\in C^2$ 和 $\psi_n\in C^1$, 于是对每一对 $\phi_n$ 和 $\psi_n$ 可以建立一系列初值问题

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}=0,\ t>0,\ x\in(-\infty,\infty) \tag{1.1.11a}$$

$$u_n|_{t=0}=\phi_n(x);\ \ \left.\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_n(x),\ x\in(-\infty,\infty) \tag{1.1.11b}$$

显然, 这些初值问题的古典解存在且为

$$u_n(x,t)=\frac{1}{2}[\phi_n(x-t)+\phi_n(x+t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi_n(s)\mathrm{d}s \tag{1.1.11c}$$

当 $n\to\infty$ 时, 如果序列 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\psi_n\}$ 在 “某种意义下” 收敛到 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n=\phi(x);\ \ \lim_{n\to\infty}\psi_n=\psi(x) \tag{1.1.12a}$$

并且 $\{u_n\}$ 也在 “某种意义下” 收敛到某个函数 $u(x,t)$

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)=u(x,t) \tag{1.1.12b}$$

则把 $u(x,t)$ 称为 “某种意义下” 的广义解. 所谓 “某种意义下”, 可以是严格的一致收敛, 也可以是 “平方平均收敛”(见第二章, 物理上更感兴趣). 只要我们对 “某种意义下” 的选择恰当, 那么所得的广义解也有意义.

甚至, 函数序列 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\psi_n\}$ 中的 $n$ 也可以是连续变量. 例如, 考虑无限区间 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上, 波动方程 (1.1.8a) 的初值问题, 初始分布为方波函数

$$\phi(x)=\begin{cases}1,\ |x|\leqslant l;\\ 0,\ |x|>l;\end{cases}\quad \psi(x)=0 \tag{1.1.13a}$$

在 $x=\pm1$, $\phi(x)$ 不可微, 故古典解不存在. 注意到 $\phi(x)$ 可展开成 Fourier 积分

$$\phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{1.1.13b}$$

其中 $\phi(k)$ 是 $\phi(x)$ 的 Fourier 积分

$$\phi(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=2l\frac{\sin kl}{kl} \tag{1.1.13c}$$

我们可取下列函数序列 ($K$ 连续变化)

$$\phi_K(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{K}\phi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{1.1.13d}$$

显然, $\phi_K\in C^2$, 故以 $\phi_K(x)$ 为初值的解为

$$u_K(x,t)=\frac{1}{4\pi}\left[\int_{-K}^{K}\phi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-t)}\mathrm{d}k+\int_{-K}^{K}\phi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+t)}\mathrm{d}k\right] \tag{1.1.13e}$$

因$\phi(x)=\lim\limits_{K\to\infty}\phi_K(x)$, 故 $u(x,t)=\lim\limits_{K\to\infty}u_K(x,t)$ 可看作原初值问题的广义解. 显然 $u(x,t)$ 满足初始条件：$u(x,0)=\phi(x)$ 和 $u_t(x,0)=0$, 但 $u(x,t)$ 不满足波动方程 (1.1.8a), 因为所得无限积分不能微分二次. 本例中 “某种意义下” 的收敛为 “平方平均收敛”, 这由 $\phi(x)$ 作 Fourier 展开式 (1.1.13b) 的条件决定.

对非齐次方程 (1.1.1a), 如果函数 $f$ 的光滑性不是足够好的话, 例如由实验数据提供的 $f$ 甚至是不连续的, 一般的古典解不存在. 设函数序列 $\{u_n\}$ 满足可微条件 ($\boldsymbol{L}$ 中出现的各阶导数) 且在 “某种恰当意义下” 收敛到 $u$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u \tag{1.1.14a}$$

如果 $\boldsymbol{L}u_n$ 也在 “某种恰当意义下” 收敛到 $f$

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{L}u_n=f \tag{1.1.14b}$$

则我们称 $u$ 为方程 (1.1.1a) 的**广义解.**在实际问题求解中, 我们用光滑性较好的函数序列 $\{f_n\}$ 来逼近函数 $f$: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$, 使方程 $\boldsymbol{L}u_n=f_n$ 存在古典解, 然后求解该方程. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 收敛到函数 $u$, 则 $u$ 就是我们要求的广义解.

**叠加原理**　线性偏微分方程的基本性质是满足叠加原理, 表达为

(1) 如果 $u_i$, $(i=1,2,\cdots,n)$ 分别满足非齐次方程 $\boldsymbol{L}u_i=f_i$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $u=\sum\limits_{i=1}^{n}c_iu_i$ 满足非齐次方程 $\boldsymbol{L}(u)=f$, 其中 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}c_if_i$, $c_i$, $(i=1,2,\cdots,n)$ 是

$n$ 个常数. 物理上, $u_i$ 可看作是 "源" 函数 $f_i$ 激发的物理场 (例如不同的声源激发的声场), 因此, 利用这一性质, 可以分别求不同的 "源" 产生的场, 然后叠加. 特别是, 当 $u_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 分别满足齐次方程 $\boldsymbol{L}u_i=0$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $u=\sum\limits_{i=1}^{n}c_iu_i$ 也满足齐次方程 $\boldsymbol{L}(u)=0$.

(2) 如果 $u_i$, $(i=1,2,\cdots,\infty)$ 分别满足非齐次方程 $\boldsymbol{L}u_i=f_i$, $(i=1,2,\cdots,\infty)$ (注意：存在无限多个解), 无限求和 $u=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_iu_i$ 收敛且微分与求和可交换次序, 则 $u$ 满足非齐次方程 $\boldsymbol{L}(u)=f$, 其中 $f=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_if_i$. 特别是, 当 $u_i$, $(i=1,2,\cdots,\infty)$ 分别满足齐次方程 $\boldsymbol{L}u_i=0$, $(i=1,2,\cdots,\infty)$, 则 $u=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_iu_i$ 也满足齐次方程 $\boldsymbol{L}(u)=0$. 这一性质在用分离变量法求解数学物理方程中非常重要.

(3) 如果依赖于参数 $\beta$ 的函数 $u(\beta)$ 满足非齐次方程 $\boldsymbol{L}u(\beta)=f(\beta)$, 积分 $U=\int u(\beta)\mathrm{d}\beta$ 存在且微分与积分运算可交换次序, 则 $U$ 满足非齐次方程 $\boldsymbol{L}(U)=F$, 其中 $F=\int f(\beta)\mathrm{d}\beta$. 特别是当 $u(\beta)$ 满足齐次方程 $\boldsymbol{L}u(\beta)=0$, 则 $U$ 也满足齐次方程 $\boldsymbol{L}(U)=0$. 这一性质在用积分变换方法求解数学物理方程中非常重要.

### 1.1.2 两个自变量二阶线性方程的分类和化简

考虑二个自变量的二阶线性偏微分方程

$$\boldsymbol{L}u\equiv a\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+gu=f \tag{1.1.15a}$$

其中 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ 和 $g$ 都是 $x$ 和 $y$ 的已知函数. 为了简单, 假定这些已知函数都是实函数 (如果是复函数, 方程的分类就没有那么简单, 见 1.1.3 小节讨论). 为了简化方程 (1.1.15a), 作自变量变换

$$\xi=\xi(x,y);\ \ \eta=\eta(x,y) \tag{1.1.15b}$$

假定在空间点 $(x_0,y_0)$, 变换式 (1.1.15b) 的 Jacobi 行列式不为零, 即

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x\neq 0 \tag{1.1.15c}$$

则该变换是可逆的, 即从式 (1.1.15b) 可得到逆变换：$x=x(\xi,\eta)$ 和 $y=y(\xi,\eta)$. 利

用下列微分关系

$$
\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\
&u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + +u_\eta\eta_{xx} \\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} \\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + +u_\eta\eta_{yy}
\end{aligned} \tag{1.1.15d}
$$

方程 (1.1.15a) 可转换为以 $(\xi,\eta)$ 为自变量的方程

$$
\bar{a}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{b}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \bar{c}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \bar{d}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{e}\frac{\partial u}{\partial\eta} + \bar{g}u = \bar{f} \tag{1.1.16a}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\bar{a} = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\
&\bar{b} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\
&\bar{c} = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \\
&\bar{d} = a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy} + d\xi_x + e\xi_y \\
&\bar{e} = a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + d\eta_x + e\eta_y \\
&\bar{g} = g;\ \bar{f} = f
\end{aligned} \tag{1.1.16b}
$$

说明: 以上各式都应通过逆变换表示成 $(\xi,\eta)$ 的函数. 注意到方程 (1.1.16b) 的第一式与第三式的形式完全相同, 仅仅是把 $\xi$ 换成 $\eta$. 因此, 如果取下列方程

$$
a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 = 0 \tag{1.1.16c}
$$

的二个函数独立的解 $\psi = \psi_1(x,y)$ 和 $\psi = \psi_2(x,y)$ 作自变量变换

$$
\xi = \psi_1(x,y);\ \eta = \psi_2(x,y) \tag{1.1.16d}
$$

则方程 (1.1.16a) 的系数中 $\bar{a} = 0$ 和 $\bar{c} = 0$, 方程 (1.1.16a) 就大大简化了. 下面分析这种选择的可能性.

一阶偏微分方程 (1.1.16c) 的求解可以化为解常微分方程. 事实上, 如果设 $\psi(x,y) =$ 常数是常微分方程

$$
a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2b\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + c = 0 \tag{1.1.17a}
$$

的一个积分解, 则 $\psi = \psi(x,y)$ 一定是一阶偏微分方程 (1.1.16c) 的一个特解. 证明: 因为 $\psi(x,y) =$ 常数定义了平面上一条曲线 $y = y(x)$ 的隐函数形式, 故存在微分关系: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\psi_x/\psi_y$, 代入方程 (1.1.17a) 得到

$$
a\left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) + c = 0 \tag{1.1.17b}
$$

两边乘 $\psi_y^2$ 就得到方程 (1.1.16c). 方程 (1.1.17a) 称为方程 (1.1.15a) 的**特征方程**, 其积分曲线称为方程 (1.1.15a) 的**特征曲线**.

综上所述, 为了简化方程 (1.1.15a), 我们首先求解方程 (1.1.17a), 得到二条特征曲线：$\psi_1(x,y)=$ 常数和 $\psi_2(x,y)=$ 常数；然后作自变量变换 $\xi=\psi_1(x,y)$ 和 $\eta=\psi_2(x,y)$, 则系数 $\bar{a}=0$ 和 $\bar{c}=0$. 问题是, 这样的特征曲线 $\psi_1(x,y)=$ 常数和 $\psi_2(x,y)=$ 常数是否存在? 从方程 (1.1.17a) 直接可以得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{a}\left(b\pm\sqrt{b^2-ac}\right) \tag{1.1.17c}$$

因此, 特征曲线是否存在依赖于 $(b^2-ac)$：

(1) 当 $b^2-ac>0$, 存在两根实的特征曲线;

(2) 当 $b^2-ac=0$, 两根实的特征曲线退化成一根;

(3) 当 $b^2-ac<0$, 不存在实的特征曲线.

据此, 可把方程 (1.1.15a) 作下列分类, 称方程 (1.1.15a) 是

**双曲型**方程: 如果 $b^2-ac>0$;

**抛物型**方程: 如果 $b^2-ac=0$;

**椭圆型**方程：如果 $b^2-ac<0$.

由于 $a$、$b$ 和 $c$ 是 $(x,y)$ 的函数, 故上述分类只在某一区域才成立. 当方程在不同的区域具有不同的类型时, 称之为**混合型**方程. 当 $a$、$b$ 和 $c$ 为常数时, 方程在整个 $(x,y)$ 平面内类型不变.

**例 1.1.1** 一维波动方程 (1.1.8a)(把 $t$ 看作 $y$ 变量) 中, $a=1$, $b=0$, $c=-1$, $b^2-ac=1>0$, 故是双曲型的, 可求得二簇实的特征曲线 $x\pm t=$ 常数, 它们是 $x-t$ 平面上的直线簇；一维热导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{1.1.18a}$$

是抛物型的 (把 $t$ 看作 $y$ 变量, $a=1$, $b=0$, $c=0$, $b^2-ac=0$), 只有一簇实特征曲线 $t=$ 常数, 是 $x-t$ 平面上平行于 $x$ 轴的直线；二维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.1.18b}$$

是椭圆型的 ($a=1$, $b=0$, $c=1$, $b^2-ac=-1<0$), 不存在实的特征曲线.

**例 1.1.2** 混合方程的典型例子是 Tricomi 方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.1.19a}$$

$a=y$, $b=0$, $c=1$, $b^2-ac=-y$, 故上半平面 $y>0$, 方程是椭圆型的; 下半平面 $y<0$, 方程是双曲型的, 这时具有二簇实特征曲线

$$x\pm\frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3}=\text{常数} \tag{1.1.19b}$$

而在 $x$ 轴上 $y=0$, 方程是抛物型的.

下面利用特征曲线, 对方程 (1.1.15a) 进行化简, 从而求出其标准形式. 分三种情况讨论:

(1) 方程 (1.1.15a) 是双曲型的, 可从方程 (1.1.17c) 求得两根实特征曲线

$$\psi_1(x,y)=\text{常数};\quad \psi_2(x,y)=\text{常数} \tag{1.1.20a}$$

因此, 可取自变量变换关系

$$\xi=\psi_1(x,y);\ \eta=\psi_2(x,y) \tag{1.1.20b}$$

则 $\bar{a}=0$ 和 $\bar{c}=0$, 故方程 (1.1.16a) 简化为

$$2\bar{b}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\bar{d}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\bar{e}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\bar{g}u=\bar{f} \tag{1.1.20c}$$

此时, 系数 $\bar{b}$ 一定不为零, 否则通过自变量变换就把二阶方程变成了一阶方程, 而这是不可能的. 两边除以 $2\bar{b}$ 后, 方程 (1.1.20c) 变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\bar{d}'\frac{\partial u}{\partial\xi}+\bar{e}'\frac{\partial u}{\partial\eta}+\bar{g}'u=\bar{f}' \tag{1.1.21}$$

其中 $\bar{d}'=\bar{d}/2\bar{b}$,$\bar{e}'=\bar{e}/2\bar{b}$,$\bar{g}'=\bar{g}/2\bar{b}$ 和 $\bar{f}'=\bar{f}/2\bar{b}$ 为已知函数. 上式称为 Laplace- 双曲方程, 其特征线 $\xi=$ 常数和 $\eta=$ 常数是 $\xi-\eta$ 平面上平行于坐标轴的直线簇. 进一步作变换

$$\xi=\frac{s+t}{2};\ \eta=\frac{s-t}{2} \tag{1.1.22a}$$

以及逆变换 $s=\xi+\eta,\ t=\xi-\eta$, 方程 (1.1.21) 可化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(\bar{d}'+\bar{e}')\frac{\partial u}{\partial s}+(\bar{d}'-\bar{e}')\frac{\partial u}{\partial t}+\bar{g}'u=\bar{f}' \tag{1.1.22b}$$

方程 (1.1.21) 或 (1.1.22b) 为双曲型方程的标准形式. 显然, 一维波动方程 (1.1.8a) 或 (1.1.8c) 是其最简单的形式.

(2) 方程 (1.1.15a) 是抛物型的, 只存在一根实特征曲线: $\psi(x,y)=$ 常数. 取 $\xi=\psi(x,y)$ 以及任意函数 $\eta=\eta(x,y)$, 只要两者函数独立 (Jacobi 行列式不为零), 则 $\bar{a}=0$. 另一方面, 利用 $b^2-ac=0$, 方程 (1.1.16c) 可化成

$$a\psi_x^2+2b\psi_x\psi_y+c\psi_y^2=(\sqrt{a}\psi_x+\sqrt{c}\psi_y)^2=0 \tag{1.1.23a}$$

于是

$$\begin{aligned}\bar{b}&=a\psi_x\eta_x+\sqrt{ac}(\psi_x\eta_y+\psi_y\eta_x)+c\psi_y\eta_y\\&=(\sqrt{a}\psi_x+\sqrt{c}\psi_y)(\sqrt{a}\eta_x+\sqrt{c}\eta_y)=0\end{aligned} \tag{1.1.23b}$$

故由方程 (1.1.16a)

$$\bar{c}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\bar{d}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\bar{e}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\bar{g}u=\bar{f} \tag{1.1.24a}$$

除以 $\bar{c}$ 得到标准形式的抛物型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\bar{d}'\frac{\partial u}{\partial \xi}+\bar{e}'\frac{\partial u}{\partial \eta}+\bar{g}'u=\bar{f}' \tag{1.1.24b}$$

其中 $\bar{d}'=\bar{d}/\bar{c}$, $\bar{e}'=\bar{e}/\bar{c}$, $\bar{g}'=\bar{g}/\bar{c}$ 和 $\bar{f}'=\bar{f}/\bar{c}$. 上式可以进一步简化, 消去一阶偏导数 $\partial u/\partial \eta$, 作函数变换

$$u(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta}\bar{e}'(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{1.1.25a}$$

方程 (1.1.24b) 写成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+\bar{d}''\frac{\partial v}{\partial \xi}+\bar{g}''v=\bar{f}'' \tag{1.1.25b}$$

其中

$$\begin{gathered}\bar{d}''=\bar{d}';\ \bar{f}''=\bar{f}'\exp\left[\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta}\bar{e}'(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\\ \bar{g}''=\bar{g}'-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\bar{e}'(\xi,\eta)}{\partial\eta}+\frac{1}{2}\bar{e}'^2(\xi,\tau)+\bar{d}'\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{\partial\bar{e}'(\xi,\tau)}{\partial\xi}\mathrm{d}\tau\right]\end{gathered} \tag{1.1.25c}$$

显然, 一维热导方程 (1.1.18a) 是其最简单的形式.

(3) 方程 (1.1.15a) 是椭圆型的, 无实的特征曲线存在, 方程 (1.1.17a) 的解只能是复函数, 故设

$$\psi(x,y)=\psi_1(x,y)+\mathrm{i}\psi_2(x,y)=\text{常数} \tag{1.1.26a}$$

是方程 (1.1.17a) 的一个解, 则可取变换

$$\xi=\mathrm{Re}[\psi]=\psi_1(x,y);\ \eta=\mathrm{Im}[\psi]=\psi_2(x,y) \tag{1.1.26b}$$

由于 $\psi(x,y)$ 满足方程 (1.1.16c), 把方程 (1.1.26a) 或者 (1.1.26b) 代入方程 (1.1.16c), 实部和虚部分开可得

$$\begin{gathered}a\xi_x^2+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^2=a\eta_x^2+2b\eta_x\eta_y+c\eta_y^2\\ a\xi_x\eta_x+b(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+c\xi_y\eta_y=0\end{gathered} \tag{1.1.26c}$$

利用上二式, 从方程 (1.1.16b) 得到 $\bar{a}=\bar{c}$ 以及 $\bar{b}=0$, 于是, 方程 (1.1.15a) 可化成

$$\bar{a}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+\bar{d}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\bar{e}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\bar{g}u=\bar{f} \tag{1.1.27a}$$

两边除以 $\bar{a}$ 得到椭圆型方程的标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\bar{d}'\frac{\partial u}{\partial \xi}+\bar{e}'\frac{\partial u}{\partial \eta}+\bar{g}'u=\bar{f}' \tag{1.1.27b}$$

其中 $\bar{d}'=\bar{d}/\bar{a}$, $\bar{e}'=\bar{e}/\bar{a}$, $\bar{g}'=\bar{g}/\bar{a}$ 和 $\bar{f}'=\bar{f}/\bar{a}$. 显然, 二维 Laplace 方程 (1.1.18b) 是其最简单的形式.

**例 1.1.3** 把 Tricomi 方程化成标准形式. Tricomi 方程的特征方程为

$$y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+1=0 \tag{1.1.28}$$

在椭圆型区域 $y>0$, 上式化成 $\mathrm{d}x\pm\mathrm{i}\sqrt{y}\mathrm{d}y=0$, 积分解为复函数

$$x\pm\mathrm{i}\frac{2}{3}\sqrt{y^3}=常数 \tag{1.1.29a}$$

取变换

$$\xi=x;\ \eta=\frac{2}{3}\sqrt{y^3} \tag{1.1.29b}$$

Tricomi 方程 (1.1.19a) 变成标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0 \tag{1.1.29c}$$

在双曲型区 $y<0$, 方程 (1.1.28) 化为 $\mathrm{d}x\pm\sqrt{-y}\mathrm{d}y=0$, 二个实积分解为

$$x\pm\frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3}=常数 \tag{1.1.30a}$$

取变换

$$\xi=x-\frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3};\quad \eta=x+\frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3} \tag{1.1.30b}$$

Tricomi 方程 (1.1.19a) 化为标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0 \tag{1.1.30c}$$

在抛物型区 $y=0$, 方程简化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.1.30d}$$

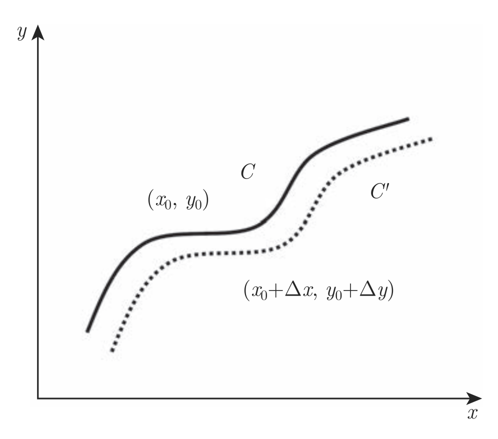



图 1.1.1 曲线 $C$ 及邻域 $C'$

为了看清楚特征曲线的本质, 我们从下列问题引出特征方程和特征曲线. 设在 $x-y$ 平面上给定曲线 $C$(如图 1.1.1), $C$ 的参数方程为 $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$(注意: 这里的 $t$ 仅仅是曲线的参数). 在 $C$ 上给定 $u=u(x,y)=u[\varphi(t),\psi(t)]$、$p\equiv u_x[\varphi(t),\psi(t)]$ 以及 $q\equiv u_y[\varphi(t),\psi(t)]$, 且满足相容性条件

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.31a}$$

曲线 $C$ 上的 $u$、$p$ 和 $q$ 称为 **Cauchy 数据**. 问题是, 能否由 $C$ 上给定的 Cauchy 数据, 求 $C$ 的邻域 $C'$ 上 $u(x, y)$ 的值? 利用 Taylor 展开

$$\begin{aligned}u(x',y')\approx u(x_0,y_0)+p\Delta x+q\Delta y+\frac{1}{2}u_{xx}(x_0,y_0)(\Delta x)^2\\+\frac{1}{2}u_{yy}(x_0,y_0)(\Delta y)^2+u_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+\cdots\end{aligned} \tag{1.1.31b}$$

其中 $(x_0,y_0)$ 在 $C$ 上, $(x',y')=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 在 $C'$ 上. 为此, 至少必须知道 $C$ 上 $u(x,y)$ 的二阶偏导数 $u_{xx}$, $u_{xy}$ 和 $u_{yy}$. 在 $C$ 上有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u_{xx}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+u_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.31c}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u_{xy}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+u_{yy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.31d}$$

因为 $u(x,y)$ 是方程 (1.1.15a) 的解, 故从方程 (1.1.15a)、(1.1.31c) 和 (1.1.31d) 可得决定 $u_{xx}$, s$u_{xy}$ 和 $u_{yy}$ 的线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}u_{xx}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}u_{xy}+0\cdot u_{yy}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.32a}$$

$$0 \cdot u_{xx} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}u_{xy} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}u_{yy} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.32b}$$

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f - (dp + eq + gu) \tag{1.1.32c}$$

上述方程的解是否存在, 依赖于系数行列式的性质

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{vmatrix} = a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{1.1.32d}$$

如果曲线 $C$ 满足 $\Delta \neq 0$, 则解存在且唯一. 反之, 如果 $\Delta = 0$, 则 Cauchy 数据 $p$、$q$ 和 $u$ 不能任意给定, 否则方程组无解. 方程 $\Delta = 0$ 就是特征方程 (1.1.17a)(只要稍微变化下形式). 因此, 在特征曲线上, Cauchy 数据 $p$、$q$ 和 $u$ 不能任意给定.

### 1.1.3　多个自变量线性方程的分类和标准型

由上节的讨论知, 方程的类型取决于方程 (1.1.15a) 左边包含二阶偏导数的项, 这些项称为方程的**主部**. 因此, 对 $n$ 个自变量的二阶方程 (1.1.1a), 只要考虑式 (1.1.1b) 的主部 $\boldsymbol{L}_0$ 即可

$$\boldsymbol{L}_0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.1.33a}$$

在 $n$ 维空间中一点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的邻域内考虑二次式

$$A(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \lambda_i \lambda_j \tag{1.1.33b}$$

其中 $a_{ij}^0 = a_{ij}(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$, 我们总可取 $a_{ij} = a_{ji}$. 设 $a_{ij}$ 都是实函数, 这样以 $a_{ij}^0$ 为元素的矩阵是实对称矩阵, 存在实线性变换

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}^0 \nu_k, \ (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.33c}$$

可化二次式 (1.1.33b) 为标准型

$$\begin{aligned} A(\nu) &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^0 c_{ik}^0 c_{jl}^0 \nu_k \nu_l = \sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 c_{ik}^0 c_{jl}^0\right)\nu_k\nu_l \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_{kl}^0 \nu_k \nu_l \equiv \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \nu_k^2 \end{aligned} \tag{1.1.33d}$$

其中 $\alpha_{kl}^0 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 c_{ik}^0 c_{jl}^0$, 而 $\varepsilon_k$ 只取 1, -1 或者 0. 当二次式 (1.1.33b) 正定, 则存在

正常数 $a$(如果是负定, 乘 “-1” 就正定了), 满足

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \lambda_i \lambda_j \geqslant a \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \tag{1.1.33e}$$

另一方面, 在 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 邻域内, 利用式 (1.1.33c) 的系数方阵 $c = [c_{ik}^0]$ 的转置方阵 $c^T = [c_{ki}^0]$ 作变换

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}^0 x_k, (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.34a}$$

代入式 (1.1.33a), 主部的变换为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_0 u &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \left( \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 c_{ik}^0 c_{jl}^0 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_{kl}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} \end{aligned} \tag{1.1.34b}$$

根据上式作下列分类:

(1) 若在 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 点邻域,**所有**的 $\varepsilon_k = 1$ 或者 -1, 即二次式 (1.1.33b) 是正定的 (或负定的), 则称方程 (1.1.1a) 在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的邻域为**椭圆型**方程, 这时方程 (1.1.1a) 可化成标准形式

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + \bar{c} u = \bar{f} \tag{1.1.35a}$$

注意: 为了方便, 字母 $\bar{b}_i$, $\bar{c}$ 和 $\bar{f}$ 在下面多次使用, 但并不意味它们相同, 仅仅表示它们是 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的函数.

(2) 若在 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 点邻域有 $(n-1)$ 个 $\varepsilon_k = 1$(或 $-1$), 而**另一个**为 $-1$(或 $+1$) 则称方程 (1.1.1a) 在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的邻域为**双曲型**方程, 有标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + \bar{c} u = \bar{f} \tag{1.1.35b}$$

(3) 若在 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 点邻域有 $(n-l)$ 个 $\varepsilon_k = 1$(或 $-1$) 而 $l$ 个 $\varepsilon_k = -1$(或 $+1$), 且 $l$ 及 $n-l > 1$, 则称方程 (1.1.1a) 在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的邻域为**超双曲型**方程

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} - \sum_{j=l+1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j^2} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + \bar{c} u = \bar{f} \tag{1.1.35c}$$

(4) 最后, 若在 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 点邻域**恰有**一个 $\varepsilon_k = 0$, 同时所有其他的 $\varepsilon_k = 1$(或 $-1$), 则称方程 (1.1.1a) 在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的邻域为**抛物型**方程, 有标准形式

$$\sum_{i\neq k}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + \bar{b}_k \frac{\partial u}{\partial \xi_k} + \sum_{i\neq k}^{n} \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + \bar{c}u = \bar{f} \tag{1.1.35d}$$

如果 $a_{ij}$ 为常数, 则方程的类型在全空间内不变. 显然在全空间内, 波动方程 (1.1.2a) 是双曲型的, 输运方程 (1.1.2b) 是抛物型的, 而位势方程 (1.1.2c) 是椭圆型. 由此可见, 波动方程、输运方程和位势方程确实是三类典型方程.

**例 1.1.4** 考虑 $\boldsymbol{L} = -\nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r})$, 如果在区域 $G$ 内 $p(\boldsymbol{r}) > 0$, 则 $\boldsymbol{L}$ 在 $G$ 内是椭圆型的, 于是方程

$$\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \boldsymbol{L}u = f(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.1.36a}$$

$$\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{L}u = f(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.1.36b}$$

$$\boldsymbol{L}u = f(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.36c}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{r}) > 0$, 分别在 $G$ 内属双曲型、抛物型和椭圆型方程. 以上三个方程分别是比 (1.1.2a)–(1.1.2c) 更为一般的波动方程、输运方程和位势方程, 它们分别描写非均匀介质中的波动、输运和热平衡.

**例 1.1.5** 考虑以常速度 $U$ 运动的物体产生的声辐射时, 遇到的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{U^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, y, t) \tag{1.1.37}$$

其中 $c$ 为声速. 显然, 方程 (1.1.37) 的类型决定于 $U$ 的大小：①当 $U < c$, 方程 (1.1.37) 是椭圆型的 (三个变量：$x$,$y$ 和 $t$), 其解有良好的性质；②当 $U = c$, 方程 (1.1.37) 也是椭圆型的 (二个变量：$x$ 和 $y$)；③当 $U > c$, 方程 (1.1.37) 是双曲型的 (三个变量：$x$,$y$ 和 $t$), 其解表现出丰富的波动特性.

**关于方程类型的说明** 从以上方程的分类可看出, 二阶线性偏微分方程的类型决定于方程的主部, 而与低阶偏导数项 (函数 $u$ 可看作是零阶偏导数) 无关. 然而, 低阶偏导数项对方程解的特性影响也是非常重大的. 一个简单的例子是 Helmholtz 方程, 即 $\nabla^2 u + k^2 u = 0$(其中 $k$ 是常量). 该方程与 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$ 都属于椭圆型方程, 但 Helmholtz 方程代表波动过程 (在电磁波或者声波传播中经常出现), 而 Laplace 方程代表平衡分布. 但是, 这二个方程的解都有椭圆型方程的基本特征, 即函数 $u$ 的光滑性很好.

另一个例子是自由粒子的 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \tag{1.1.38a}$$

其中 $m$ 是微观粒子的质量, $\hbar$ 是约化 Planck 常数. 就主部而言, 方程 (1.1.38a) 是抛物型方程, 且与扩散方程相似, 但它的解更像波动方程的解, 故 Schrödinger 方程也称为波动方程. 事实上, 1.1.2 小节和 1.1.3 小节中方程的分类是对实系数方程而言的, 当系数是复函数时, 方程的性态可能完全改变. 在物理上, Schrödinger 方程与扩散方程描述完全不同的物理过程, 并且解的性质完全不同.

**时间反演的对称性** 物理过程可分为二类, 即可逆过程和不可逆过程. 在不考虑耗散的情况下, 波动是可逆过程, 在数学上表现为波动方程是时间反演对称的, 具体地, 如果令 $t=-t'$, 方程 (1.1.36a)(取齐次形式 $f(\boldsymbol{r},t)=0$) 不改变形式：$\rho(\boldsymbol{r})u_{t't'}+\boldsymbol{L}u=0$(因为对时间是二阶导数). 注意：由方程 (1.1.6e) 知道, 如果存在流动 $\boldsymbol{U}_0$, 就破坏了波动方程的时间反演对称性.

热扩散是不可逆过程, 如果令 $t=-t'$, 方程 (1.1.36b)(同样取齐次形式 $f(\boldsymbol{r},t)=0$) 改变形式：$-\rho(\boldsymbol{r})u'_t+\boldsymbol{L}u=0$(因为对时间是一阶导数), 故扩散方程对时间反演是不对称的；至于 Schrödinger 方程 (1.1.38a), 如果令 $t=-t'$, 再求复共轭, 则时间反演方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t'}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* \tag{1.1.38b}$$

上式与 Schrödinger 方程 (1.1.38a) 完全相同 (尽管函数变成复共轭 $\psi^*$), 因此, Schrödinger 方程是时间反演对称的.

**色散型方程** 齐次扩散方程在无限空间中的一个性质是：不管初始分布如何, 当 $t\to\infty$ 时, 其解以 $t^{-n/2}$ 趋近零 (其中 $n$ 是空间的维数), 或者更严格地说, $\lim\limits_{t\to\infty}\int|u|^2\mathrm{d}\tau\to t^{-n/2}$(见 1.4.3 小节讨论), 故我们说扩散方程是**耗散型**的方程；而对 Schrödinger 方程, 任何时刻都有 $\int|u|^2\mathrm{d}\tau=1$, 如果初始分布是一个局域函数, 当 $t\to\infty$ 时, 其解 “弥散” 到整个空间, 但仍保持 $\int|u|^2\mathrm{d}\tau=1$. 其原因在于：对 Schrödinger 方程的解作 Fourier 分析时, 不同频率具有不同的传播速度 (高频成份传播速度大), 足够长时间后, “波包” 会 “弥散” 到整个空间. 因此, 我们说 Schrödinger 方程是**色散型方程**(见 1.4 节讨论).

### 1.1.4 数学物理方程的一般性问题

我们知道 $n$ 阶常微分方程的通解依赖于 $n$ 个任意常数, 这些常数由初始条件或边界条件决定. 对偏微分方程, 问题要复杂得多, $n$ 阶偏微分方程的通解一般依赖于 $n$ 个任意函数, 例如一维波动方程 (1.1.8a) 的通解式 (1.1.8d) 依赖于二个任意函数 $F$ 和 $G$. 为了决定这些任意函数, 必须附加其他条件, 这些条件由具体的物理问题给出. 我们主要讨论下列三类条件.

(1) 初始条件: 例如对波动方程 (1.1.36a) 和热导方程 (1.1.36b), 变量 $t$ 具有时

间意义. 一般给定 $t=0$ 时 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的值

$$u|_{t=0}=\phi(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.39a}$$

然后求 $t>0$ 的分布 $u(\boldsymbol{r},t)$. 对波动方程, 由于出现对 $t$ 的二阶偏导数, 故还必须给出 $t=0$ 时 $u_t(\boldsymbol{r},t)$ 的值

$$u_t|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.39b}$$

由这些初始分布, 求无限大空间中 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的时间演化. 这样的问题称为 **Cauchy 问题**或**初值问题**. 注意：对热扩散方程 (1.1.36b), 给定初始分布, 只能求 $t>0$ 的分布, 因 $t<0$ 的解是不稳定的 (见 1.4 节讨论)；而对波动方程 (1.1.36a)(忽略耗散), 给定初始分布, 既能求 $t>0$, 也能求 $t<0$ 的分布 $u(\boldsymbol{r},t)$. 这是由它们的时间反演对称性决定的.

(2) 边界条件: 对椭圆型方程 (1.1.36c), 一般给定区域 $G$ 的边界 $\partial G$ 上 $u(\boldsymbol{r})$ 及 $u(\boldsymbol{r})$ 的法向导数之间的线性关系

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=b(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.39c}$$

当 $\alpha=1$, $\beta=0$ 时, 称为**第一类边界条件**或者 **Dirichet 边界条件**; 当 $\alpha=0$, $\beta=1$ 时, 称为**第二类边界条件**或者 **Neumann 边界条件**; 当 $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ 时, 称为**第三类边界条件**或者 **Robin 边界条件**. 这样的问题称为**边值问题**.

**外边值问题** 当给定 $G$ 的边界 $\partial G$ 上的边界条件, 往往需求 $G$ 的外部 $\bar{G}$ 中 $u(\boldsymbol{r})$ 的值, 这样的边值问题称为**外边值问题.** 如果限定 $u(\boldsymbol{r})$ 在无穷远处的渐近行为, 就相当于无限远处存在边界条件.

(3) 混合条件: 当考虑有限区域 $G$ 内的波动或输运问题时, 必须同时给定初始条件以及边界条件, 这样的问题称为**混合问题**. 当然, 混合问题也存在外边值问题.

上述初始条件或边界条件统称为**定解条件**, 求偏微分方程满足定解条件的解的问题称为**定解问题**. 一般, 从通解出发求解定解问题是困难的, 也没有必要, 故我们在求解定解问题时, 基本不从通解出发.

注意: 边界条件式 (1.1.39c) 是线性的, 如果边界条件非线性, 即使方程是线性的, 整个定解问题也是非线性的. 一个典型例子是重力作用下水表面波问题, 方程为 Laplace 方程, 但水表面的边界条件是非线性的.

从物理上看, 定解问题的意义也很明显, 因为方程本身描述物理系统的一般性规律, 一个具体的物理系统必须与外界有相互作用, 这样的相互作用就反映在边界条件上. 此外, 一个系统随时间的变化还与它的 “历史” 有关, 初始条件即反映了这点.

由以上讨论可知, 对位势方程, 我们一般讨论边值问题, 即定解条件为给定边界上的数值与法向导数的关系式 (1.1.39c), 而对波动方程和输运方程则可提混合问题或初值问题, 这不是偶然的. 它涉及到定解问题的**适定性**, 其含义是: 如果定解问题同时满足下列三个条件.

(1) **存在性**: 存在古典解 (可推广到广义解);

(2) **唯一性**: 不仅存在解, 且解是唯一的;

(3) **稳定性**: 当外界有 "微小" 的变化, 则解的变化也 "微小". 这里的外界指: 如初始分布 $\phi(\boldsymbol{r})$ 或 $\psi(\boldsymbol{r})$, 方程的非齐项 $f(\boldsymbol{r},t)$, 边界条件的非齐项 $b(\boldsymbol{r})$, 甚至方程的系数, 等等. 所谓 "微小" 将在具体问题中论述.

那么称定解问题在古典意义下是适定的, 否则, 称定解问题在古典意义下不适定. 由实际物理问题导出的定解问题, 其解一般存在且唯一 (然而, 在逆问题中, 存在性和唯一性都有问题, 见第七章讨论), 而稳定性具有十分重要的意义. 因为, 无论是初始条件中的数据, 还是边界条件中的数据, 甚至方程中的系数和非齐次项, 都是由实验测得, 必定存在误差. 如果它们的微小误差带来解的很大变化, 则在古典意义下这个问题已没有多大实际意义. 此外, 解的存在性涉及到所给定解条件的相容性, 如果给出矛盾的定解条件, 解显然是不存在的, 而唯一性问题则涉及到所给定解条件的完备性问题. 定解问题适定性的讨论是第一章的主要介绍内容.

随着近代科学技术的发展, 出现了许多不适定问题, 这些不适定问题具有明显的物理意义. 一个典型例子是重力探矿中导出的 Laplace 方程的 Cauchy 问题, 在古典意义下, 这个问题是不适的 (见 1.4.6 小节和 7.3 节的讨论). 为此发展了许多求解不适定问题的方法, 我们将在第七章作专门介绍.

## 1.2　波动方程与定解问题的适定性

本节讨论最简单的双曲型方程, 即波动方程的若干重要性质. 主要有: 波动方程的 Cauchy 问题、混合问题和齐次化原理, 以及能量不等式和适定性问题. 尽管讨论以波动方程为主, 但许多定性的结果对一般的双曲型方程成立.

### 1.2.1　波动方程的 Cauchy 问题

考虑无限空间中波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},\ t>0,\ (n\leqslant 3)\\ u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\phi(\boldsymbol{r});\ u_t(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r})\end{gathered}\tag{1.2.1a}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 我们用**球面平均法**求 $n=3$ 时方程 (1.2.1a) 的解, 基本思想是: 代替直接求 $u(\boldsymbol{r},t)$, 先计算 $t$ 时刻以 $\boldsymbol{r}$ 为中心, 半径为 $\xi$ 的球面 $S_\xi$ 上 $u(\boldsymbol{r},t)$

的平均值, 如图 1.2.1. 设球面 $S_\xi$ 上流动坐标为 $\boldsymbol{r}'=(x_1',x_2',x_3')$, 则

$$\xi=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2} \tag{1.2.1b}$$

而 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的平均值 $\bar{u}(\xi,t)$ 为

$$\bar{u}(\xi,t)=\frac{1}{4\pi\xi^2}\iint_{S_\xi}u(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}S' \tag{1.2.1c}$$

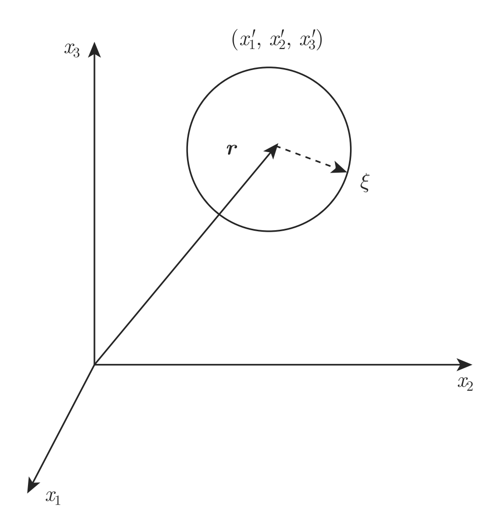



图 1.2.1　球面平均

其中 $\mathrm{d}S'$ 是 $S_\xi$ 上的面元. 如果求得 $\bar{u}(\xi,t)$, 只要令 $\xi\to 0$, 于是应该有

$$u(\boldsymbol{r},t)=\lim_{\xi\to 0}[\bar{u}(\xi,t)] \tag{1.2.1d}$$

设球面 $S_\xi$ 包围的体积为 $V_\xi$, 对方程 (1.2.1a) 的第一式两边在 $S_\xi$ 内作体积分

$$\int_{V_\xi}u_{tt}\mathrm{d}\tau_\xi=\int_{V_\xi}\nabla^2u\mathrm{d}\tau_\xi \tag{1.2.2a}$$

其中 $\mathrm{d}\tau_\xi$ 是 $V_\xi$ 中的体元. 利用 Gauss 公式, 上式右边

$$\begin{aligned}\int_{V_\xi}\nabla^2u\mathrm{d}\tau_\xi&=\iint_{S_\xi}\frac{\partial u}{\partial n'}\mathrm{d}S'=\iint_{S_\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}\xi^2\mathrm{d}\Omega\\&=\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi}\iint_{S_\xi}u\mathrm{d}\Omega=4\pi\xi^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\end{aligned} \tag{1.2.2b}$$

得到上式, 已利用

$$\bar{u}(\xi,t)=\frac{1}{4\pi\xi^2}\iint_{S_\xi}u(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}S'=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_\xi}u\mathrm{d}\Omega \tag{1.2.2c}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega$ 为立体角元 $\mathrm{d}\Omega=\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$, 而式 (1.2.2a) 左边

$$\begin{aligned}\int_{V_\xi}u_{tt}\mathrm{d}\tau_\xi&=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{V_\xi}ur_1^2\mathrm{d}r_1\mathrm{d}\Omega=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\xi r_1^2\mathrm{d}r_1\iint_{S_\xi}u\mathrm{d}\Omega\\&=4\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\xi r_1^2\bar{u}\mathrm{d}r_1\end{aligned}\tag{1.2.3a}$$

因此, 由上式和方程 (1.2.2b) 得到

$$\xi^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\xi\bar{u}r_1^2\mathrm{d}r_1\tag{1.2.3b}$$

上式两边对 $\xi$ 求导, 得 $\bar{u}(\xi,t)$ 满足的方程

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=0\tag{1.2.3c}$$

或者

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial^2(\xi\bar{u})}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=0\tag{1.2.3d}$$

作变换 $v=\xi\bar{u}$, 得一维波动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0\tag{1.2.3e}$$

由 1.1.1 小节知, $v(\xi,t)$ 可表示成

$$v(\xi,t)=f_1(t-\xi)+f_2(t+\xi)\tag{1.2.4a}$$

因此, 球面平均 $\bar{u}(\xi,t)$ 为

$$\bar{u}(\xi,t)=\frac{1}{\xi}[f_1(t-\xi)+f_2(t+\xi)]\tag{1.2.4b}$$

当 $\xi\to 0$ 时, $\bar{u}(\xi,t)$ 必须有限, 故要求

$$[f_1(t-\xi)+f_2(t+\xi)]_{\xi=0}=0\tag{1.2.4c}$$

于是有

$$f_2(t)=-f_1(t)\equiv f(t)\tag{1.2.4d}$$

因此

$$\xi\bar{u}=f(t+\xi)-f(t-\xi)\tag{1.2.5a}$$

两边对 $\xi$ 求导

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi\bar{u})=\bar{u}+\xi\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}=f'(t-\xi)+f'(t+\xi)\tag{1.2.5b}$$

由方程 (1.2.1d) 和上式

$$u(\boldsymbol{r},t)=\lim_{\xi\to 0}[\bar{u}]=2f'(t) \tag{1.2.6a}$$

为求 $f'(t)$, 必须利用方程 (1.2.1a) 中初始条件, 为此计算

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi\bar{u})=f'(t+\xi)-f'(t-\xi) \tag{1.2.6b}$$

与方程 (1.2.5b) 式相加得

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi\bar{u})+\frac{\partial}{\partial t}(\xi\bar{u})=2f'(t+\xi) \tag{1.2.6c}$$

令 $t$=0 得

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi\bar{u})+\frac{\partial}{\partial t}(\xi\bar{u})\right]\Bigg|_{t=0}=2f'(\xi) \tag{1.2.6d}$$

把式 (1.2.2c) 代入上式得到

$$\begin{aligned}2f'(\xi)&=\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi}{4\pi}\iint_{S_\xi}u\mathrm{d}\Omega+\frac{\xi}{4\pi}\iint_{S_\xi}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\Omega\right)\right]\Bigg|_{t=0}\\&=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\iint_{S_\xi}\varphi\mathrm{d}\Omega\right)+\xi\iint_{S_\xi}\psi\mathrm{d}\Omega\right]\end{aligned} \tag{1.2.6e}$$

当 $\xi=t$ 时, 由式 (1.2.6a)

$$u(\boldsymbol{r},t)=2f'(\xi)|_{\xi=t} \tag{1.2.7a}$$

故最后得

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_t}t\phi\mathrm{d}\Omega+t\iint_{S_t}\psi\mathrm{d}\Omega\right) \tag{1.2.7b}$$

式中 $S_t$ 是半径为 $t$、圆心在 $\boldsymbol{r}$ 点的球面: $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2=t^2$. 用球面元表示, 上式变为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_t}\frac{\phi}{\xi}\mathrm{d}S'+\iint_{S_t}\frac{\psi}{\xi}\mathrm{d}S'\right) \tag{1.2.7c}$$

其中 $\xi=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$, 上式即为三维波动方程 Cauchy 问题的解, 称为 **Poisson 公式**. 当 $\phi$ 和 $\psi$ 分别具有连续的三阶和二阶偏导数时, 即 $\phi\in C^3$, $\psi\in C^2$, 不难验证式 (1.2.7b) 或 (1.2.7c) 确是三维波动方程 Cauchy 问题的古典解. 由方程 (1.2.7c) 可知, $\boldsymbol{r}$ 点处 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的值完全由球面

$$(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2=t^2 \tag{1.2.7d}$$

上的初始分布 $\phi$ 及 $\psi$ 值决定, 如果 $\phi$ 和 $\psi$ 局域在某一区域 $G$ 中, 如图 1.2.2, 当 $t<d$ 或 $t>D$ 时, $\boldsymbol{r}$ 点 (观察点) 处 $u(\boldsymbol{r},t)$ 等于零, 其中 $d$ 和 $D$ 分别是 $\boldsymbol{r}$ 点到 $G$

的最小和最大距离. 因此波动有明显的前阵面和后阵面, 该现象称为 **Huygens 原理**.

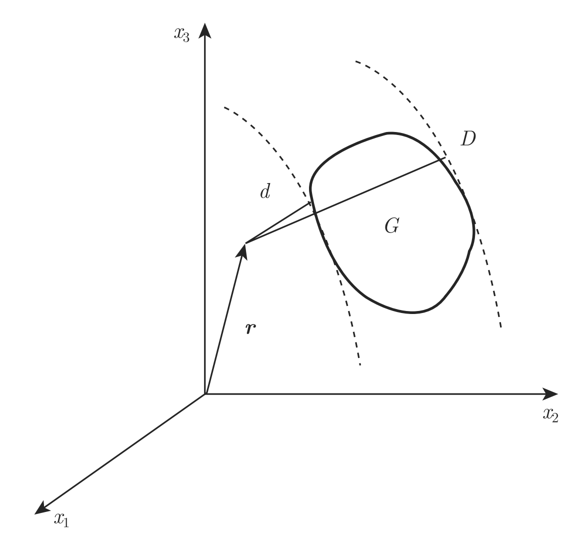



图 1.2.2 Huygens 原理

**降维法** 对二维波动 $n=2$, 初值分布

$$u|_{t=0}=\phi(x_1,x_2);\ u_t|_{t=0}=\psi(x_1,x_2) \tag{1.2.8a}$$

可看作三维情况的特殊情况, 故式 (1.2.7c) 仍成立. 由于初始条件与 $x_3$ 无关, 故可积出. 把积分面投影到 $x_1'-x_2'$ 平面上, 球面元与平面元之间有关系

$$\mathrm{d}S'\cos\gamma=\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2' \tag{1.2.8b}$$

其中 $\gamma$ 为两个面元的法向之间的夹角

$$\cos\gamma=\frac{1}{t}\sqrt{t^2-(x_1-x_1')^2-(x_2-x_2')^2} \tag{1.2.8c}$$

代入式 (1.2.7c) 可得

$$\begin{aligned}u(x_1,x_2,t)=&\frac{1}{2\pi}\iint_D\frac{\psi(x_1',x_2')\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'}{\sqrt{t^2-(x_1-x_1')^2-(x_2-x_2')^2}}\\&+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_D\frac{\phi(x_1',x')\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'}{\sqrt{t^2-(x_1-x_1')^2-(x_2-x_2')^2}}\end{aligned} \tag{1.2.9a}$$

其中 $D$ 为圆域

$$(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2\leqslant t^2 \tag{1.2.9b}$$

以上方法从三维 Cauchy 问题的解得到二维 Cauchy 问题的解, 称为**降维法**. 由于积分在圆面上进行, 如图 1.2.3, 故对二维 Cauchy 问题, Huygens 原理已不再成立.

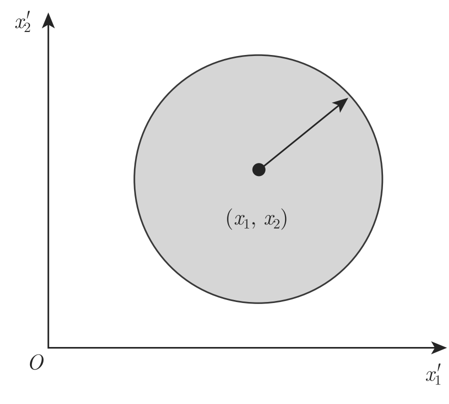



图 1.2.3　积分在圆内进行

进一步对式 (1.2.9a) 使用降维法, 可得一维波动方程 Cauchy 问题的解, 设初始条件为

$$u|_{t=0} = \phi(x_1);\ u_t|_{t=0} = \psi(x_1) \tag{1.2.10a}$$

作坐标平移 $\eta_1 = x_1' - x_1;\ \eta_2 = x_2' - x_2$, 在圆域积分, 式 (1.2.9a) 化成

$$\begin{aligned} u(x_1,t) = &\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\psi(x_1+\eta_1)\mathrm{d}\eta_1\cdot\int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} \\ &+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t}\phi(x_1+\eta_1)\mathrm{d}\eta_1\cdot\int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} \end{aligned} \tag{1.2.10b}$$

求出积分得到

$$u(x_1,t) = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t}\psi(x_1+\eta_1)\mathrm{d}\eta_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t}\phi(x_1+\eta_1)\mathrm{d}\eta_1 \tag{1.2.10c}$$

即

$$u(x_1,t) = \frac{1}{2}[\phi(x_1+t)+\phi(x_1-t)] + \frac{1}{2}\int_{x_1-t}^{x_1+t}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.10d}$$

上式与 (1.1.9d) 式一致. 当 $\phi \in C^2$, $\psi \in C^1$ 时不难验证上式确是一维波动方程 Cauchy 问题的古典解.

**影响区、依赖区和决定区**: 进一步分析式 (1.2.10d) 的意义, 考察 $x_1 \in [a,b]$ 区域内的初始分布, 如图 1.2.4, 经过时间 $t$ 后, 波动到达的范围 (受初始分布影响的区域) 由不等式

$$a - t \leqslant x_1 \leqslant b + t, \quad (t > 0) \tag{1.2.11a}$$

限定. 而在此范围以外, 则 $u(x_1,t)=0$, 在 $x_1$-$t$ 平面上, 上式表示的区域称为区域 $[a,b]$ 的**影响区**, 如图 1.2.5.

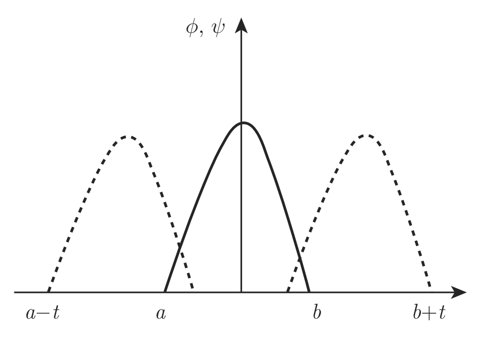



图 1.2.4　初值局域分布

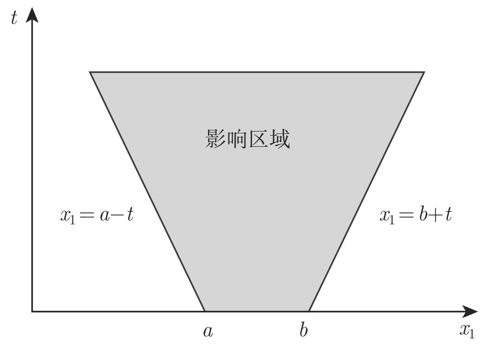



图 1.2.5　$[a,b]$ 的影响区域

由式 (1.2.10d) 可知, $u$ 在 $(x_1,t)$ 点的值仅仅依赖于 $x_1$ 轴上区间 $[x_1-t,x_1+t]$ 上的初始分布, 而与其他点上的初始分布无关, 因此区间 $[x_1-t,x_1+t]$ 称为点 $(x_1,t)$ 的**依赖区**. 作二条直线

$$x_1=a+t;\ \ x_1=b-t \tag{1.2.11b}$$

及 $x_1$ 轴围成的三角形区, 如图 1.2.6, 此区域内的任一点 $(x_1,t)$ 的依赖区间都落在区间 $[a,b]$ 之内部. 因此, 解在此三角形区域中的值就完全由 $[a,b]$ 上的初始分布决定, 而与此区域外的初始分布无关, 这个三角区域称为 $[a,b]$ 的**决定区**. 给定 $[a,b]$ 上初始分布, 就可以在其决定区域中求得 Cauchy 问题的解. 值得注意的是, 一维波动方程的特征线 ($x_1\pm t=$ 常数) 起着十分重要的作用, 这正是双曲型方程的普遍特性, 即在 $x_1$-$t$ 平面上, 波动沿特征线传播.

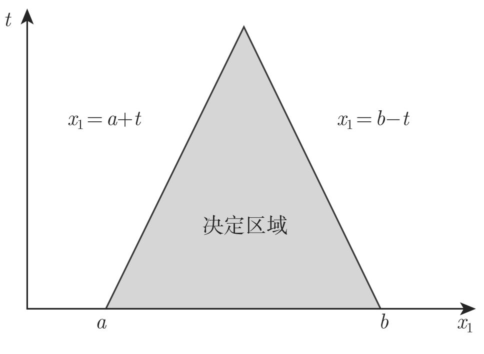



图 1.2.6　$[a,b]$ 的决定区域

### 1.2.2　非齐次波动方程和推迟势

考虑非齐次方程的 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}u=g(\boldsymbol{r},t),\ t>0 \\ &u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\phi(\boldsymbol{r});\ u_t(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{1.2.12a}$$

其中 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$, 在区域 $G$ 内 $p(\boldsymbol{r})>0$, 故上式是双曲型方程. 由于 (1.2.12a) 是线性方程, 可令 $u=u_1+u_2$, 其中 $u_1(\boldsymbol{r},t)$ 满足齐次方程, 但初值不为零, 而 $u_2(\boldsymbol{r},t)$ 满足非齐次方程, 但初值为零.

**Duhamel 齐次化原理**　只要求得 $u_1(\boldsymbol{r},t)$, 则 $u_2(\boldsymbol{r},t)$ 的解可用 $u_1(\boldsymbol{r},t)$ 来表示. 设齐次方程的下列 Cauchy 问题 (注意: 初值为 $t=\tau$ 的值)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}\chi=0,\ t>\tau \\ &\chi|_{t=\tau}=0;\ \chi_t|_{t=\tau}=g(\boldsymbol{r},\tau) \end{aligned} \tag{1.2.12b}$$

的解为 $\chi(\boldsymbol{r},t,\tau)$, 则 $u_2(\boldsymbol{r},t)$ 为

$$u_2(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t \chi(\boldsymbol{r},t,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.12c}$$

上述结论的证明是容易的, 事实上因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t}=&\chi(\boldsymbol{r},t,t)+\int_0^t \frac{\partial \chi}{\partial t}\mathrm{d}\tau=\chi(\boldsymbol{r},t,\tau)|_{t=\tau} \\ &+\int_0^t \frac{\partial \chi}{\partial t}\mathrm{d}\tau=\int_0^t \frac{\partial \chi}{\partial t}\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{1.2.13a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \left.\frac{\partial \chi}{\partial t}\right|_{t=\tau} + \int_0^t \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\mathrm{d}\tau = g(\boldsymbol{r},t) + \int_0^t \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\mathrm{d}\tau \\ &= g(\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{L}\int_0^t \chi\mathrm{d}\tau = g(\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{L}u_2\end{aligned} \tag{1.2.13b}$$

故

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \boldsymbol{L}u_2 = g(\boldsymbol{r},t) \tag{1.2.13c}$$

因此, 式 (1.2.12c) 满足非齐次方程. 由式 (1.2.12c) 和 (1.2.13a) 立即看出 $u_2(\boldsymbol{r},t)$ 同样满足齐次初始条件. 利用齐次化原理及上节的结果, 立即可求得下列定解问题的解

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = g(\boldsymbol{r},t),\ \ t>0 \\ &u|_{t=0} = 0;\ \ u_t|_{t=0} = 0\end{aligned} \tag{1.2.14a}$$

当 $n$=3 时, 由式 (1.2.7c) 得

$$\chi(\boldsymbol{r},t,\tau) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_{t-\tau}} \frac{g(\boldsymbol{r}',\tau)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S' \tag{1.2.14b}$$

故

$$u(\boldsymbol{r},t) = \int_0^t \chi(\boldsymbol{r},t,\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint_{S_{t-\tau}} \frac{g(\boldsymbol{r}',\tau)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S'\mathrm{d}\tau \tag{1.2.14c}$$

作变换 $t-\tau=\tau'$ 则

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint_{S_{\tau'}} \frac{g(\boldsymbol{r}',t-\tau')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S'\mathrm{d}\tau' \tag{1.2.15a}$$

在半径为 $\tau'$ 的球面上, 面元为 $\mathrm{d}S' = \tau'^2\mathrm{d}\Omega$, 于是上式变成

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint_{\Omega} \frac{g(\boldsymbol{r}',t-\tau')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\tau'^2\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}\Omega \tag{1.2.15b}$$

上式中积分相当于在球 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2=t^2$ 中作体积分, 于是有

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\leqslant t} \frac{g(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{1.2.15c}$$

其中 $\mathrm{d}V'$ 是球 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2=t^2$ 中的体元. 上式 $u(\boldsymbol{r},t)$ 称为**推迟势**.

当 $n$=2, 利用式 (1.2.9a) 得

$$\chi(x_1,x_2,t,\tau) = \frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{g(x_1',x_2',\tau)\mathrm{d}x'\mathrm{d}x_2'}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-x')^2-(x_2-x_2')^2}} \tag{1.2.16a}$$

其中 $D$ 为圆内: $(x_-x_1')^2+(x_2-x_2')^2\leqslant(t-\tau)^2$. 因此, 当 $n$=2 时, 方程 (1.2.14a) 的解为

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\iint_D\frac{g(x_1',x_2',\tau)\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-x_1')^2-(x_2-x_2')^2}}\tag{1.2.16b}$$

最后, 当 $n$=1 时, 由式 (1.2.10d)

$$\chi(x,t,\tau)=\frac{1}{2}\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}g(s,\tau)\mathrm{d}\tau\tag{1.2.16c}$$

于是, 方程 (1.2.14a) 的解为

$$u(x,t)=\int_0^t\chi(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}g(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\tag{1.2.16d}$$

### 1.2.3　能量不等式和 Cauchy 问题的适定性

为了简单, 考虑一维波动方程 Cauchy 问题的适定性问题. 由 1.2.1 小节的讨论, 当 $\phi$ 和 $\psi$ 满足一定的可微性条件时

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0,\ t>0,\ x\in(-\infty,+\infty)\\ u|_{t=0}=\phi(x,);\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ x\in(-\infty,+\infty)\end{gathered}\tag{1.2.17}$$

的古典解存在且由式 (1.2.10d) 表示.

余下的问题是讨论方程 (1.2.17) 解的唯一性和稳定性. 为此引进能量积分的概念. 考虑图 1.2.7 中 $x-t$ 平面上的三角形区, 即区间 $(a,b)$ 的决定区, 用平行于 $x$ 轴的直线截三角区为二部分, 交特征线于 $(A,B)$ 二点, 线段 $AB$ 用 $L_t$ 表示, 显然 $L_t$ 随 $t$ 变化, 当 $t=0$ 时, $L_0$ 表示三角区的底边 $ab$. 在 $L_t$ 上作积分

$$E(L_t)=\frac{1}{2}\int_A^B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\tag{1.2.18a}$$

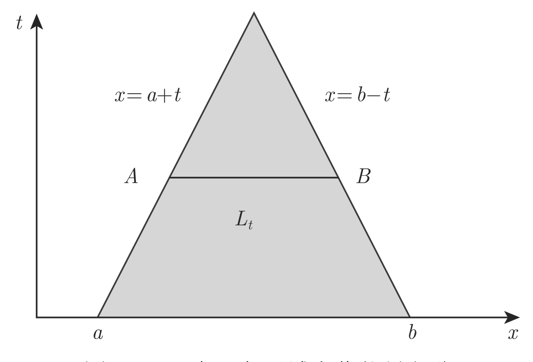



图 1.2.7　在三角区域上作能量积分

$E(L_t)$ 在物理上有能量的意义 (上式积分号下第一项相当于动能, 第二项相当于势能), 故称为**能量积分**. 注意：式 (1.2.18a) 的积分只能在决定区间上进行, 因为对 Cauchy 问题, 无限大区域的积分可能发散. 下面证明不等式

$$E(L_t) \leqslant E(L_0) \tag{1.2.18b}$$

由于 $E(L_t) \geqslant 0$, 故只要证明 $E(L_t)$ 随 $t$ 单调下降即可, 即证明

$$\frac{\mathrm{d}E(L_t)}{\mathrm{d}t} \leqslant 0 \tag{1.2.18c}$$

因 $(A, B)$ 二点坐标是 $t$ 的函数, 故式 (1.2.18a) 中上、下限是 $t$ 的函数, 利用变上下限求导公式可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(L_t)}{\mathrm{d}t} =& \int_A^B \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\mathrm{d}x \\ &-\frac{1}{2}[u_t^2(A) + u_x^2(A) + u_t^2(B) + u_x^2(B)]\end{aligned} \tag{1.2.19a}$$

积分号内第二项分部积分有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(L_t)}{\mathrm{d}t} =& \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x + u_t(A)u_x(A) - u_t(B)u_x(B) \\ &-\frac{1}{2}[u_t^2(A) + u_x^2(A) + u_t^2(B) + u_x^2(B)]\end{aligned} \tag{1.2.19b}$$

由于 $u$ 满足波动方程 (1.2.17), 故

$$\frac{\mathrm{d}E(L_t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}[u_t(A) - u_x(A)]^2 - \frac{1}{2}[u_t(B) + u_x(B)]^2 \leqslant 0 \tag{1.2.19c}$$

因此, 式 (1.2.18c) 得证. 利用式 (1.2.18b) 可证明波动方程 Cauchy 问题解的唯一性: 三角形区域内的解 $u(x, t)$ 由 $[a, b]$ 上的初值分布唯一地决定, 而与此区间以外的初值无关. 设方程 (1.2.17) 存在两个解 $u_1$ 和 $u_2$, 则 $\chi = u_1 - u_2$ 满足

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = 0,\ t > 0,\ x \in (-\infty, \infty) \\ &\chi|_{t=0} = \chi_t|_{t=0} = 0,\ x \in (-\infty, \infty)\end{aligned} \tag{1.2.20a}$$

由于 $t = 0$ 时

$$E(L_0) = \frac{1}{2}\int_A^B \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x = 0 \tag{1.2.20b}$$

故由式 (1.2.18b), 在三角形区域恒有 $E(L_t) = 0$, 即 $\chi_t = \chi_x = 0$, 因此 $\chi =$ 常数, 又当 $t = 0$ 时 $\chi = 0$, 故 $\chi \equiv 0$, 于是 $u_1 = u_2$, 唯一性得证!

为了证明稳定性, 考虑积分 ($u$ 的平方积分, 反映 $u$ 的大小)

$$E_1(L_t)=\frac{1}{2}\int_A^B u^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{1.2.21a}$$

对 $E_1(L_t)$ 求导

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_1(L_t)}{\mathrm{d}t}&=\int_A^B u\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}[u^2(x_A)+u^2(x_B)]\\&\leqslant\int_A^B u\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_A^B u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_A^B\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.2.21b}$$

上式右边进一步放大

$$\frac{\mathrm{d}E_1(L_t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\frac{1}{2}\int_A^B u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_A^B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{1.2.21c}$$

利用能量积分式 (1.2.18a), 上式变成

$$\frac{\mathrm{d}E_1(L_t)}{\mathrm{d}t}\leqslant E_1(L_t)+E(L_t) \tag{1.2.21d}$$

两边乘 $\mathrm{e}^{-t}$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}E_1(L_t)]\leqslant\mathrm{e}^{-t}E(L_t) \tag{1.2.21e}$$

故

$$E_1(L_t)\leqslant\mathrm{e}^tE_1(L_0)+\mathrm{e}^t\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}E(L_\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.21f}$$

利用式 (1.2.18b), 上式变成

$$E_1(L_t)\leqslant\mathrm{e}^tE_1(L_0)+(\mathrm{e}^t-1)E(L_0) \tag{1.2.22a}$$

上式称为**能量不等式**, 其意义是把 $t$ 时刻解的平方积分值 $E_1(L_t)$ 与初始给定的条件联系起来. 下面利用能量不等式来说明 Cauchy 问题关于初值微小变化的稳定性. 设 $u_1$ 和 $u_2$ 为式 (1.2.17) 中初值分别为 $(\phi_1,\psi_1)$ 和 $(\phi_2,\psi_2)$ 时的解, 由式 (1.2.22a)

$$\begin{aligned}&\int_A^B|u_1-u_2|^2\mathrm{d}x\leqslant\mathrm{e}^t\int_A^B|\phi_1-\phi_2|^2\mathrm{d}x\\&+(\mathrm{e}^t-1)\int_A^B\left(|\psi_1-\psi_2|^2+\left|\frac{\partial\phi_1}{\partial x}-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right|^2\right)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.2.22b}$$

故当 $t\in(0,T)$(其中 $T$ 为任一有限正数) 时, 对任一给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使

$$\begin{gathered}\int_A^B|\phi_1-\phi_2|^2\,\mathrm{d}x<\eta;\ \int_A^B|\psi_1-\psi_2|^2\,\mathrm{d}x<\eta\\\int_A^B\left|\frac{\partial\phi_1}{\partial x}-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x<\eta\end{gathered} \tag{1.2.22c}$$

时有

$$\int_A^B |u_1 - u_2|^2\,\mathrm{d}x < \varepsilon \tag{1.2.22d}$$

因此 Cauchy 问题式 (1.2.17) 在均方偏差意义下, 对初值分布是稳定的. 对高维波动方程的 Cauchy 问题, 类似的结论也成立, 甚至可推广到更一般的双曲型方程的 Cauchy 问题上去. 见 1.2.5 小节讨论.

### 1.2.4　混合问题解的唯一性和稳定性

首先考虑最简单情形, 即一维波动方程的混合问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ t > 0,\ x \in (0,l)\\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,\ t \geqslant 0\\ u|_{t=0} = \phi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in [0,l]\end{gathered} \tag{1.2.23a}$$

用分离变数法 (见下章) 不难求解上述定解问题, 但我们不具体求解它, 而假定其解存在, 证明解的唯一性和关于初始分布 $(\phi,\psi)$ 的稳定性.

考虑能量积分 (注意：与式 (1.2.18a) 比较, 混合问题的区间是有限的, 故可以在全区间上积分)

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{1.2.23b}$$

对 $t$ 求导

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\mathrm{d}x \tag{1.2.23c}$$

第二项分步积分, 并利用边界条件 (注意：边界上 $u = 0$ 意味着 $u_t = 0$) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right|_0^l\\ &= \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.2.24a}$$

即

$$E(t) = \text{常数} \tag{1.2.24b}$$

上式的物理意义很明显, 它表示波动过程中能量守恒. 利用上式证明混合问题解的

唯一性, 为此只要证明下列零初值问题只有零解即可

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ t>0,\ x\in(-\infty,\infty)$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0,\ t\geqslant 0 \tag{1.2.25a}$$

$$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0,\ x\in(-\infty,\infty)$$

因 $t=0$ 时

$$E(0)=\frac{1}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg|_{t=0}\mathrm{d}x=0 \tag{1.2.25b}$$

故由 (1.2.24b), $E(t)\equiv 0$, 于是 $u_t=u_x=0$, 因此 $u=$ 常数, 而由初始条件, $u\equiv 0$, 即零初值问题只有零解, 于是混合问题的唯一性得证.

为了证明混合问题关于初值的稳定性, 考虑积分

$$E_1(t)=\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{1.2.26a}$$

与 1.2.3 小节一样, 不难推出下列能量不等式

$$E_1(t)\leqslant \mathrm{e}^t E_1(0)+(\mathrm{e}^t-1)E(0) \tag{1.2.26b}$$

于是立即得出结论: 波动方程的混合问题, 即方程 (1.2.23a) 的解在下述意义下是稳定的, 对任何给定的 $\varepsilon>0$, 一定可以找到 $\eta>0$, 只要初值分布之差满足

$$\int_0^l |\phi_1-\phi_2|^2\mathrm{d}x<\eta;\ \int_0^l |\psi_1-\psi_2|^2\mathrm{d}x<\eta$$

$$\int_0^l \left|\frac{\partial \phi_1}{\partial x}-\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x<\eta \tag{1.2.26c}$$

则解 $u_1$ 和 $u_2$ 之差 $(u_1-u_2)$ 满足

$$\int_0^l |u_1-u_2|^2\mathrm{d}x<\varepsilon \tag{1.2.26d}$$

即初值的微小变化只能引起解的微小变化, 故稳定性得证.

注意: (1) 当混合问题的边界条件为 $u_x|_{x=0}=u_x|_{x=l}=0$ 时, 方程 (1.2.24a) 和 (1.2.24b) 也成立, 故所有结论都正确; (2) 对第三类边界条件 $(\alpha_1 u-\beta_1 u_x)|_{x=0}=0$ 和 $(\alpha_2 u+\beta_2 u_x)|_{x=l}=0$, 能量积分式 (1.2.23b) 必须修改成 (包括边界的作用)

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}u^2(0,t)+\frac{\alpha_2}{\beta_2}u^2(l,t)\right] \tag{1.2.27a}$$

当 $\alpha_1/\beta_1 > 0$ 和 $\alpha_2/\beta_2 > 0$ 时, $E(t) \geqslant 0$ 恒成立. 由上式且利用第三类边界条件得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}^{x=l} \\ &+ \frac{\alpha_1}{\beta_1}u(0,t)\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}u(l,t)\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = 0\end{aligned} \tag{1.2.27b}$$

故方程 (1.2.24b) 也成立, 所有结论都正确.

**三维齐次混合问题**：设三维齐次波动方程的混合问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} - \nabla^2 u(\boldsymbol{r},t) = 0,\ \boldsymbol{r} \in G,\ t > 0 \\ &u|_{t=0} = \phi(\boldsymbol{r}),\ u_t|_{t=0} = \psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G + \partial G \\ &\left.\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0,\ (\alpha/\beta \geqslant 0;\ \beta/\alpha \geqslant 0)\end{aligned} \tag{1.2.28a}$$

的解存在, 现在证明其唯一性和关于初值分布 $\phi(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的稳定性. 为此只要推出与式 (1.2.24b) 和 (1.2.26b) 相似的能量守恒式和不等式. 考虑能量积分

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + (\nabla u)^2\right]\mathrm{d}\tau + B_1(u) \tag{1.2.28b}$$

其中边界积分 $B_1(u) \geqslant 0$ 定义为

$$B_1(u) \equiv \frac{1}{2}\begin{cases}\displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\alpha}{\beta}u^2\mathrm{d}S,\ (\beta \neq 0) \\ \displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\mathrm{d}S,\ (\alpha \neq 0)\end{cases} \tag{1.2.28c}$$

注意：(1) 上式中取 $\alpha = 0$(第一个式子), 退化到第二类边界条件；而取 $\beta = 0$(第二个式子), 退化到第二类边界条件; (2) 条件 $\alpha/\beta \geqslant 0$ 或者 $\beta/\alpha \geqslant 0$ 保证了能量积分的正定性；(3) 如果在部分边界 $\partial G_1$ 和 $\partial G_2$ 上分别满足不同的边界条件, 则上式修改成在不同边界的积分之和. 下面来证明能量守恒式

$$E(t) = 常数 \tag{1.2.28d}$$

对 $E(t)$ 求导 ($\alpha$ 和 $\beta$ 一般与 $t$ 无关)

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = \int_G\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\nabla u)\cdot\left(\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}\tau + \frac{\mathrm{d}B_1(u)}{\mathrm{d}t} \\ &\frac{\mathrm{d}B_1(u)}{\mathrm{d}t} = \begin{cases}\displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\alpha}{\beta}u\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}S,\ (\beta \neq 0) \\ \displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S, (\alpha \neq 0)\end{cases}\end{aligned} \tag{1.2.29a}$$

利用 Green 公式

$$\int_G (\nabla u)\cdot\left(\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_G\frac{\partial u}{\partial t}\nabla^2 u\mathrm{d}\tau \tag{1.2.29b}$$

代入方程 (1.2.29a)

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\int_G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nabla^2 u\right)\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\tau+B_2(u) \tag{1.2.29c}$$

其中边界积分 $B_2(u)$ 定义为

$$B_2(u)=\begin{cases}\displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\alpha}{\beta}u\right)\mathrm{d}S,\ (\beta\neq 0)\\ \displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial n}+u\right)\mathrm{d}S, (\alpha\neq 0)\end{cases} \tag{1.2.29d}$$

由于 $u$ 满足齐次波动方程和齐次边界条件 (即方程 (1.2.28a) 中的第一、三式), 故式 (1.2.29c) 右边体积分和面积分都为零, 因此 $\mathrm{d}E(t)/\mathrm{d}t=0$. 于是, 式 (1.2.28d) 得证. 由此可推出定解问题 (1.2.28a) 解的唯一性.

说明：对第一、二类边界条件, 系统的能量守恒, 如声学中的硬边界和软边界, 声波不能穿过硬、软边界向外辐射, 但对第三类边界条件, 则必须考虑边界上能量的交换, 也就是方程 (1.2.28b) 中面积分项.

下面来证明能量不等式 (1.2.26b) 对三维齐次混合问题也成立, 只要 $E(t)$ 的定义改成 (1.2.28b). 事实上, 对积分 $E_1(t)$

$$E_1(t)=\frac{1}{2}\int_G u^2\mathrm{d}\tau \tag{1.2.30a}$$

二边求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_1(t)}{\mathrm{d}t}&=\int_G u\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\tau\leqslant\frac{1}{2}\int_G u^2\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\int_G\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\frac{1}{2}\int_G u^2\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\int_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+(\nabla u)^2\right]\mathrm{d}\tau+B_1(u)\\&=E_1(t)+E(t)\end{aligned} \tag{1.2.30b}$$

注意：因边界积分 $B_1(u)\geqslant 0$, 上式第二个不等式加 $B_1(u)$ 起放大作用. 上式两边乘 $\mathrm{e}^{-t}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}E_1(t)]\leqslant\mathrm{e}^{-t}E(t) \tag{1.2.30c}$$

积分得

$$E_1(t)\leqslant\mathrm{e}^{t}E_1(0)+\mathrm{e}^{t}\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}E(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.30d}$$

利用式 (1.2.28d) 得到

$$E_1(t)\leqslant \mathrm{e}^tE_1(0)+(\mathrm{e}^t-1)E(0) \tag{1.2.31a}$$

由上式不难得到结论: 当二个定解问题的初始条件 $(\phi_1,\phi_2)$ 与 $(\psi_1,\psi_2)$ 任意 “接近” 时, 解 $u_1$ 与 $u_2$ 也可任意接近. 具体有, 对任何给定的 $\varepsilon>0$, 一定可以找到 $\eta>0$, 只要初始条件之差 $(\phi_1-\phi_2)$ 与 $(\psi_1-\psi_2)$ 满足

$$\begin{gathered}\int_G|\phi_1-\phi_2|^2\mathrm{d}\tau<\eta;\ \int_G|\psi_1-\psi_2|^2\mathrm{d}\tau<\eta\\ \int_G\left|\frac{\partial\phi_1}{\partial x_i}-\frac{\partial\phi_2}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}\tau<\eta,\ (i=1,\ 2,\ 3)\end{gathered} \tag{1.2.31b}$$

以及

$$\begin{gathered}\iint_{\partial G}\frac{\alpha}{\beta}|\phi_1-\phi_2|^2\mathrm{d}S<\eta,\ (\beta\neq0)\\ \iint_{\partial G}\frac{\beta}{\alpha}\left|\frac{\partial\phi_1}{\partial n}-\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\right|^2\mathrm{d}S<\eta,\ (\alpha\neq0)\end{gathered} \tag{1.2.31c}$$

那么总有

$$\int_G|u_1-u_2|^2\mathrm{d}\tau<\varepsilon \tag{1.2.31d}$$

**非齐次方程的混合问题** 考虑非齐次方程的混合问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}-\nabla^2u(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\ u|_{t=0}=\phi(\boldsymbol{r}),\ u_t|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G\\ \left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0,\ (\alpha/\beta\geqslant0;\beta/\alpha\geqslant0)\end{gathered} \tag{1.2.32a}$$

注意：边界条件仍然是齐次的！对非齐次方程的混合问题, 由于 “源” 函数 $f(\boldsymbol{r},t)$ 存在, 系统的能量不守恒, 式 (1.2.28d) 已不成立. 仍然考虑式 (1.2.28b) 和 (1.2.28c) 表示的能量积分. 但式 (1.2.29c) 改变成 (注意：因为边界条件是齐次的, $B_2(u)=0$ 仍然成立)

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\int_Gf\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\tau\leqslant\frac{1}{2}\int_G\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\int_Gf^2\mathrm{d}\tau \tag{1.2.32b}$$

上式右边进一步放大得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}&\leqslant\frac{1}{2}\int_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+(\nabla u)^2\right]\mathrm{d}\tau+B_1(u)+\frac{1}{2}\int_Gf^2\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant E(t)+\frac{1}{2}\int_Gf^2\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.2.32c}$$

上式左右两边乘 $\mathrm{e}^{-t}$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{e}^{-t}E(t)]}{\mathrm{d}t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{2}\int_G f^2\mathrm{d}\tau \tag{1.2.33a}$$

从 0 到 $t$ 积分得到

$$E(t) \leqslant \mathrm{e}^t\left[E(0) + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{-t'}\int_G f^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t'\right] \tag{1.2.33b}$$

对 $0 \leqslant t \leqslant T$, $\mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$, 于是就有

$$E(t) \leqslant \mathrm{e}^T\left[E(0) + \frac{1}{2}\int_0^T \int_G f^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t'\right] \tag{1.2.33c}$$

注意：式 (1.2.28d) 由上式代替. 另一方面, 式 (1.2.30d) 仍然成立 (但式 (1.2.31a)) 不成立, 因现在 $E(t)$ 不等于常数), 利用式 (1.2.33c), 由式 (1.2.30d) 得到

$$E_1(t) \leqslant \mathrm{e}^t E_1(0) + (\mathrm{e}^t - 1)\mathrm{e}^T\left[E(0) + \frac{1}{2}\int_0^T \int_G f^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t'\right] \tag{1.2.34a}$$

于是, 对 $0 \leqslant t \leqslant T$, 就有

$$E_1(t) \leqslant c_1(T)E_1(0) + c_2(T)\left[E(0) + \frac{1}{2}\int_0^T \int_G f^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t'\right] \tag{1.2.34b}$$

式中 $c_1(T)$ 和 $c_2(T)$ 仅是与 $T$ 有关的正常数. 由不等式 (1.2.33c) 和 (1.2.34b), 可以证明非齐次方程混合问题解的唯一性和稳定性. 稳定性可表示为：当二个定解问题的初始条件 $(\phi_1, \phi_2)$ 与 $(\psi_1, \psi_2)$ 以及非齐次项 $(f_1, f_2)$ 任意 “接近” 时, 解 $u_1$ 与 $u_2$ 及其一阶偏导数也可任意接近, 即对任何给定的 $\varepsilon > 0$, 一定可以找到 $\eta > 0$, 只要初始条件之差 $(\phi_1 - \phi_2)$ 与 $(\psi_1 - \psi_2)$ 满足式 (1.2.31b) 和 (1.2.31c), 且非齐次项之差 $(f_1 - f_2)$ 满足

$$\int_0^T \int_G |f_1 - f_2|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t' < \eta \tag{1.2.34c}$$

那么总有式 (1.2.31d), 以及

$$\int_G \left|\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}\tau < \varepsilon;\ \int_G \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}\tau < \varepsilon,\ (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.2.34d}$$

注意：比较式 (1.2.31d), 由于方程的非齐次项 $f$, 解的光滑性反而更好.

**非齐次混合问题**　设方程和边界条件都是非齐次的

$$\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}-\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G,t>0$$

$$u|_{t=0}=\phi(\boldsymbol{r}),\ u_t|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G \tag{1.2.35a}$$

$$\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=b,\ (\alpha/\beta\geqslant 0;\beta/\alpha\geqslant 0)$$

由方程 (1.2.29c) 和 (1.2.29d)

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\int_G f\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\begin{cases}\displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{b}{\beta}\mathrm{d}S,\ (\beta\neq 0)\\ \displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial b}{\partial t}\mathrm{d}S,(\alpha\neq 0)\end{cases} \tag{1.2.35b}$$

上式右边放大得到

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\frac{1}{2}\int_G f^2\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\int_G\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}\tau+B_3(u) \tag{1.2.35c}$$

其中

$$B_3(u)\equiv\frac{1}{2}\begin{cases}\displaystyle\iint_{\partial G}\frac{b^2}{\beta^2}\mathrm{d}S+\iint_{\partial G}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}S,\ (\beta\neq 0)\\ \displaystyle\iint_{\partial G}\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}S+\iint_{\partial G}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\mathrm{d}S,\ (\alpha\neq 0)\end{cases} \tag{1.2.35d}$$

仿照式 (1.2.32c) 进行放大时, 注意到边界积分 $B_3(u)$ 中包含边界 “动能” 或边界 “势能” 的项, 这些项也可以以一定比例放到能量积分中去, 故式 (1.2.35c) 和 (1.2.35d) 可以放大成

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\gamma E(t)+\frac{1}{2}\int_G f^2\mathrm{d}\tau+B_4(b) \tag{1.2.36a}$$

其中 $\gamma>1$, $B_4(b)$ 是非齐次边界积分

$$B_4(b)\equiv\frac{1}{2}\begin{cases}\displaystyle\iint_{\partial G}\frac{b^2}{\beta^2}\mathrm{d}S,\ (\beta\neq 0)\\ \displaystyle\iint_{\partial G}\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}S,(\alpha\neq 0)\end{cases} \tag{1.2.36b}$$

式 (1.2.36a) 左右两边乘 $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{e}^{-\gamma t}E(t)]}{\mathrm{d}t}\leqslant\mathrm{e}^{-\gamma t}\left[\frac{1}{2}\int_G f^2\mathrm{d}\tau+B_4(b)\right] \tag{1.2.36c}$$

于是, 式 (1.2.33c) 修改成

$$E(t) \leqslant \mathrm{e}^{\gamma T}\left[E(0)+\int_0^T\left[\frac{1}{2}\int_G f^2\mathrm{d}\tau+B_4(b)\right]\mathrm{d}t'\right] \tag{1.2.37a}$$

相应的能量不等式 (1.2.34b) 修改成

$$E_1(t) \leqslant \mathrm{e}^T E_1(0)+(\mathrm{e}^T-1)\mathrm{e}^{\gamma T}\left[E(0)+\int_0^T\left[\frac{1}{2}\int_G f^2\mathrm{d}\tau+B_4(b)\right]\mathrm{d}t'\right] \tag{1.2.37b}$$

由不等式 (1.2.37a) 和 (1.2.37b), 不难讨论非齐次混合问题的唯一性和稳定性.

至此, 我们证明了波动方程混合问题的解在平方平均意义下的唯一性和稳定性.

### 1.2.5　一般双曲型方程的能量积分

考虑一般双曲型方程的定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+b_0\frac{\partial u}{\partial t}+cu=f(\boldsymbol{r},t),\ t>0,\ \boldsymbol{r}\in G \tag{1.2.38a}$$

满足的初始和边界条件分别为

$$\begin{gathered} u|_{t=0}=\phi(\boldsymbol{r}),\ u_t|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G \\ u|_{\partial G}=0,\ t\geqslant 0 \end{gathered} \tag{1.2.38b}$$

方程 (1.2.38a) 和 (1.2.38b) 中 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G$ 为空间变量, 时间变量 $t\geqslant 0$ 单独写出；假定所有系数及非齐次项 $f$ 是 $\boldsymbol{r}$ 和 $t$ 的连续函数, 系数 $a_{ij}$ 不仅对称 $(a_{ij}=a_{ji})$ 还具有连续的一阶偏导数; 为了保证方程是双曲型的, 关于空间变量的二阶偏导数部分必须是椭圆型的, 即对任意的实向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 存在正常数 $a$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant a\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \tag{1.2.38c}$$

为了定义方程 (1.2.38a) 的能量积分, 以 $u_t$ 乘以方程 (1.2.38a) 两边, 并在 $G$ 上积分得到

$$\int_G u_t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+b_0\frac{\partial u}{\partial t}+cu\right)\mathrm{d}\tau=\int_G fu_t\mathrm{d}\tau \tag{1.2.39a}$$

上式左边第二项积分可用 Green 公式分部积分 (其中 $U_j$ 是满足可微性条件的任意函数)

$$\int_G\sum_{j=1}^n\frac{\partial U_j}{\partial x_j}\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}\sum_{j=1}^n U_j n_j\mathrm{d}S \tag{1.2.39b}$$

取 $U_j = \sum_{i=1}^{n} u_t a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 得到

$$\int_G \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_t a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} \sum_{i,j=1}^{n} u_t a_{ij} n_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}S \tag{1.2.39c}$$

注意到边界条件 $u|_{\partial G}=0$ 也意味 $u_t|_{\partial G}=0$, 故上式面积分为零. 顺便指出：为了保证上式右边积分为零, 第二类齐次边界条件应该是

$$\left.\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} n_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|_{\partial G} = 0 \tag{1.2.39d}$$

才能保证面积分为零 (见 1.3.5 小节讨论). 注意到微分关系

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_t a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u_t}{\partial x_j} + u_t \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + u_t a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.2.40a}$$

方程 (1.2.39a) 中第二项积分变成

$$-\int_G u_t \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\mathrm{d}\tau = \int_G \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j} + u_t \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.40b}$$

利用系数对称性 $a_{ij}=a_{ji}$, 上式右边第一项可以改写成

$$\begin{aligned}\int_G \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\tau \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_G \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.2.40c}$$

由方程 (1.2.40b) 和 (1.2.40c), 方程 (1.2.39a) 改写成

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \int_G R(u,u_t,u_x)\mathrm{d}\tau + \int_G f u_t \mathrm{d}\tau \tag{1.2.41a}$$

其中能量积分 $E$ 和函数 $R(u,u_t,u_x)$ 分别为

$$E \equiv \frac{1}{2}\int_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right]\mathrm{d}\tau \tag{1.2.41b}$$

$$\begin{aligned}R(u,u_t,u_x) \equiv &\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\ &-\left(\sum_{i=1}^{n} b_i u_t \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0 u_t^2 + c u_t u\right)\end{aligned} \tag{1.2.41c}$$

因假定系数 $a_{ij}$ 的一阶偏导数连续, 故存在不等式

$$\left|\int_G R(u,u_t,u_x)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant C_0\int_G\left[u^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau \tag{1.2.42a}$$

其中 $C_0$ 是一个与 $u$ 无关的正常数. 只要把式 (1.2.41c) 左边的体积分逐步放大就可以得到式 (1.2.42a). 为了得到与式 (1.2.32c) 类似的不等式, 必须消去式 (1.2.42a) 中关于 $u^2$ 的积分. 事实上, 如果 $u$ 在 $G$ 上连续可微, 且在边界上为零: $u|_{\partial G}=0$(注意这个条件, 限制了我们只能讨论第一类边界条件), 则存在不等式

$$\int_G u^2\mathrm{d}\tau \leqslant C_1\int_G\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}\tau \tag{1.2.42b}$$

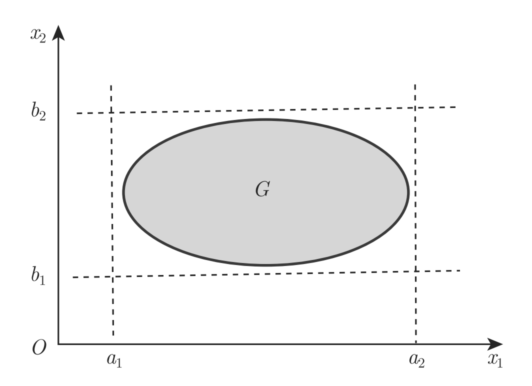



图 1.2.8　矩形 $(a_1\leqslant x_1\leqslant a_2; b_1\leqslant x_1\leqslant b_2)$ 包含区域 $G$

其中 $C_1$ 是一个与 $u$ 无关的正常数. 证明如下：如图 1.2.8, 仅考虑 $n$=2 情况, 设区域位于第一象限, 作矩形 $(a_1\leqslant x_1\leqslant a_2; b_1\leqslant x_1\leqslant b_2)$ 区域 $G'$ 包含区域 $G$, 在区域 $G'-G$ 上, 定义 $u$=0. 在 $G'$ 中取任意一点 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$, 显然有关系

$$u(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=\int_{a_1}^{\bar{x}_1}1\cdot\frac{\partial u(x_1,\bar{x}_2)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 \tag{1.2.43a}$$

利用 Schwarz 积分不等式

$$\begin{aligned}u^2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)&=\left[\int_{a_1}^{\bar{x}_1}1\cdot\frac{\partial u(x_1,\bar{x}_2)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right]^2 \leqslant\int_{a_1}^{\bar{x}_1}\left[\frac{\partial u(x_1,\bar{x}_2)}{\partial x_1}\right]^2\mathrm{d}x_1\cdot\int_{a_1}^{\bar{x}_1}1\mathrm{d}x_1\\&\leqslant\int_{a_1}^{a_2}\left[\frac{\partial u(x_1,\bar{x}_2)}{\partial x_1}\right]^2\mathrm{d}x_1\cdot\int_{a_1}^{a_2}1\mathrm{d}x_1 =(a_2-a_1)\int_{a_1}^{a_2}\left[\frac{\partial u(x_1,\bar{x}_2)}{\partial x_1}\right]^2\mathrm{d}x_1\end{aligned} \tag{1.2.43b}$$

将上式在 $G'$ 上积分得到

$$\begin{aligned}\int_{G'} u^2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\mathrm{d}\bar{x}_1\mathrm{d}\bar{x}_2 &\leqslant (a_2-a_1)^2\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\left[\frac{\partial u(x_1,\bar{x}_2)}{\partial x_1}\right]^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}\bar{x}_2\\ &\leqslant (a_2-a_1)^2\int_{G'}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\end{aligned} \tag{1.2.43c}$$

由于在区域 $G'$-$G$ 上, $u$=0, 取 $C_1=(a_2-a_1)^2$, 得到

$$\int_G u^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \leqslant C_1\int_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1.2.43d}$$

对 $n>2$, 不难推广上述结果, 故式 (1.2.42b) 得证.

把式 (1.2.42b) 代入式 (1.2.42a) 得到

$$\begin{aligned}\left|\int_G R(u,u_t,u_x)\mathrm{d}\tau\right| &\leqslant C_0\int_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+(C_1+1)\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant C_2\int_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.2.44a}$$

其中 $C_2=C_0(C_1+1)$ 是一个与 $u$ 无关的正常数. 于是, 把上式代入式 (1.2.41a) 得到

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \leqslant \gamma E(t)+\frac{1}{2}\int_G f^2\mathrm{d}\tau \tag{1.2.44b}$$

其中 $\gamma$ 是一个与 $u$ 无关的正常数. 与得到式 (1.2.37a) 的过程类似, 我们得到一般双曲型方程的能量积分不等式

$$E(t) \leqslant \mathrm{e}^{\gamma t}\left[E(0)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_G f^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t'\right] \tag{1.2.44c}$$

利用上式就可以讨论一般双曲型方程的定解问题 (在第一类边界条件下) 的解的唯一性、关于初值和非齐次项 $f$ 的稳定性.

## 1.3 Laplace 方程与 Helmholtz 方程

本节讨论二个最简单的椭圆型方程, 即 Laplace 方程与 Helmholtz 方程, 主要分析二个自变量的 Laplace 方程和调和函数的基本性质、Laplace 方程边值问题的适定性讨论和 Helmholtz 方程与辐射问题. 最后, 在 1.3.5 小节中介绍一般椭圆型方程的能量积分估计.

### 1.3.1　二个自变量的 Laplace 方程和 Hilbert 变换

满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0 \tag{1.3.1a}$$

的函数 $u(x_1,\cdots,x_n)$ 称为调和函数. 考虑 $n=2$ 情况, 分别以 $x$ 和 $y$ 代替 $x_1$ 和 $x_2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.3.1b}$$

由复变函数理论, 任何解析函数 $w(z)$

$$w(z)=\xi(x,y)+\mathrm{i}\eta(x,y) \tag{1.3.1c}$$

(其中 $z=x+\mathrm{i}y$) 的实部 $\xi(x,y)$ 及虚部 $\eta(x,y)$ 都是方程 (1.3.1b) 的解. 幂次函数 $z^n$, $(n\geqslant 0)$ 是解析函数

$$w=z^n=(x+\mathrm{i}y)^n=\rho^n\exp(\mathrm{i}n\varphi) \tag{1.3.2a}$$

其中 $(\rho,\varphi)$ 是平面极坐标, 于是

$$\mathrm{Re}(w)=\rho^n\cos n\varphi;\quad \mathrm{Im}(w)=\rho^n\sin n\varphi \tag{1.3.2b}$$

都是方程 (1.3.1b) 的解. 由于方程 (1.3.1b) 是线性方程, 故上式的任一线性组合也是它的解

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\rho^n \tag{1.3.2c}$$

当 $\rho\to\infty$ 时, $w=z^{-n}$ 是解析函数, 故

$$\mathrm{Re}(w)=\rho^{-n}\cos n\varphi;\quad \mathrm{Im}(w)=-\rho^{-n}\sin n\varphi \tag{1.3.2d}$$

是方程 (1.3.1b) 在无限远处正则的解. 可以证明, 在平面极坐标下 Laplace 方程 (1.3.1b) 有分离变数形式的通解

$$u(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}) \tag{1.3.3}$$

式中 $D_0\ln\rho$ 可有解析函数 $w=\ln z,(z\neq 0)$ 的实部推得, 当然, 通解中还应该包括 $w=\ln z$ 的虚部 $\mathrm{i}\varphi$, 但它没有周期性, 实际情况中较少遇到.

Laplace 方程的一个重要性质是在变换下

$$\xi=\xi(x,y);\ \ \eta=\eta(x,y) \tag{1.3.4a}$$

方程的形式不变, 其中 $\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ 是任一解析函数的实部和虚部. 验证如下: 由复合函数求导法则

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \eta}+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial \eta}+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=&\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\\&+\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}+2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}\end{aligned}$$

因 $\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ 是解析函数的实部与虚部, 满足 Laplace 方程, 并且满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y};\ \frac{\partial \xi}{\partial y}=-\frac{\partial \eta}{\partial x}\tag{1.3.4b}$$

代入上式即得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\tag{1.3.4c}$$

因此只要

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\neq 0\tag{1.3.4d}$$

在新坐标系 $(\xi,\eta)$ 下, Laplace 方程仍变成 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0\tag{1.3.4e}$$

而且由于曲线族 $\xi(x,y)=C_1$ 与 $\eta(x,y)=C_2(C_1$ 和 $C_2$ 为常数) 代表两族相互正交的曲线, 故变换式 (1.3.4a) 构成正交曲线坐标系.

**椭圆坐标系** 一个简单例子是复平面 $(x+\mathrm{i}y)$ 到复平面 $(\xi+\mathrm{i}\eta)$ 的映射

$$\xi+\mathrm{i}\eta=\operatorname{arc\,cosh}\left(\frac{x+\mathrm{i}y}{c}\right)\tag{1.3.5a}$$

其中 $c$ 为常数. 上式可写成

$$\xi = \mathrm{Re}\left[\operatorname{arc}\cosh\left(\frac{x+\mathrm{i}y}{c}\right)\right];\ \eta = \mathrm{Im}\left[\operatorname{arc}\cosh\left(\frac{x+\mathrm{i}y}{c}\right)\right] \tag{1.3.5b}$$

或者

$$x = c\cosh\xi\cos\eta;\ y = c\sinh\xi\sin\eta \tag{1.3.5c}$$

其中取值范围为 $(0<\xi<\infty)$ 和 $(0<\eta<2\pi)$. 上式消去变量 $\eta$ 得到

$$\frac{x^2}{c^2\cosh^2\xi} + \frac{y^2}{c^2\sinh^2\xi} = 1 \tag{1.3.5d}$$

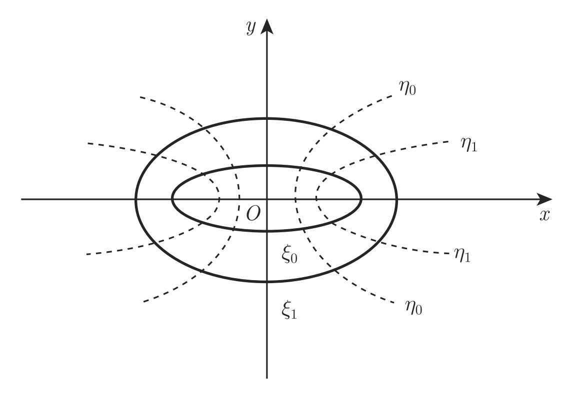



图 1.3.1 椭圆柱坐标系统: 椭圆焦距为 $2c$

显然, 对给定的 $\xi$, 上式表示 $xOy$ 平面上的一个椭圆, 故对一系列 $\xi$, 上式定义平面上的一个椭圆族 (图 1.3.1 中的实线), 椭圆族中每个椭圆的二个焦点之间距离为 $2\sqrt{c^2\cosh^2\xi - c^2\sinh^2\xi} = 2c$ 与 $\xi$ 无关, 故椭圆族共焦点; 由方程 (1.3.5c) 的消去变量 $\xi$

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2\eta} - \frac{y^2}{c^2\sin^2\eta} = 1 \tag{1.3.5e}$$

对给定的 $\eta$, 上式定义平面的一个双曲线族 (图 1.3.1 的虚线), 每条双曲线的二个焦点之间距离 $2\sqrt{c^2\cos^2\eta + c^2\sin^2\eta} = 2c$, 即双曲线族与椭圆族共焦点. 故 $(\xi,\eta)$ 定义了一个正交曲线坐标系, 称为**椭圆坐标系**.

上述结论是应用保角变换法求解二维 Laplace 方程边值问题的基础. 因涉及许多复变函数方面的理论, 这里不作进一步讨论.

**Cauchy 积分公式** 复变函数中一个十分有用的公式是 Cauchy 积分公式, 设 $f(z)$ 是区域 $G$ 中单值解析函数, 则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial G}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \begin{cases} f(z), & z\in G \\ 0, & z\notin G \end{cases} \tag{1.3.6a}$$

下面利用上式求解圆内的 Laplace 方程的第一类边值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \rho<R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\&u|_{\rho=R}=u(R,\varphi)\equiv g(\varphi),\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\end{aligned}\tag{1.3.6b}$$

暂且设 $f(z)$ 在圆 $\rho=R$ 上解析, 则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{r=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'})\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}\mathrm{d}\varphi'}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\tag{1.3.6c}$$

因在圆周 $\rho=R$ 上:$\xi=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}$, 而在圆内 $\rho<R$:$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. 记 $z^*=(R^2/\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 显然 $z^*$ 位于圆外, 故由方程 (1.3.6a)

$$0=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{r=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z^*}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'})\frac{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}\mathrm{d}\varphi'}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\tag{1.3.6d}$$

两式相减

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'})\left[\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}-\frac{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\right]\mathrm{d}\varphi'\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'})(R^2-\rho^2)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi'\end{aligned}\tag{1.3.7a}$$

取上式的实部, 即得方程 (1.3.6b) 的解

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi')(R^2-\rho^2)\mathrm{d}\varphi'}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi'-\varphi)},\ (\rho<R)\tag{1.3.7b}$$

上式称为 **Poisson 公式**, 函数

$$G(R,\varphi;\rho,\varphi')=\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\varphi')}\tag{1.3.7c}$$

称为 **Poisson 核**. 推得方程 (1.3.7b) 时, 曾假定 $f(z)$ 在圆上解析. 事实上, 可以证明, 只要 $g(\varphi)$ 在圆周上连续, 方程 (1.3.7b) 仍是边值问题的解.

利用关系

$$G(R,\varphi;\rho,\varphi')=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n(\cos n\varphi'\cos n\varphi+\sin n\varphi'\sin n\varphi)\tag{1.3.8a}$$

(其中 $\rho/R<1$), 不难表明方程 (1.3.7b) 具有方程 (1.3.3) 的形式, 因此, 方程 (1.3.7b) 确是 Laplace 方程的解. 进一步还可验证: 当 $g(\varphi)$ 是连续函数时, 它还满足边界条件. 如果引进广义函数弱收敛的概念 (见第三章), 有关系

$$\lim_{\rho\to R}[G(R,\varphi;\rho,\varphi')]=2\pi\delta(\varphi-\varphi')\tag{1.3.8b}$$

于是有

$$u(\rho,\varphi)|_{\rho=R}=\lim_{\rho\to R}[u(\rho,\varphi)]=\int_0^{2\pi}g(\varphi')\delta(\varphi-\varphi')\mathrm{d}\varphi'=g(\varphi) \tag{1.3.8c}$$

故方程 (1.3.7b) 也满足边界条件.

**上半空间边值问题**　考虑 Laplace 方程在上半平面的第一类边值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,\ y>0,\ x\in(-\infty,\infty)\\&u(x,y)|_{y=0}=u(x,0),\ x\in(-\infty,\infty)\end{aligned} \tag{1.3.9a}$$

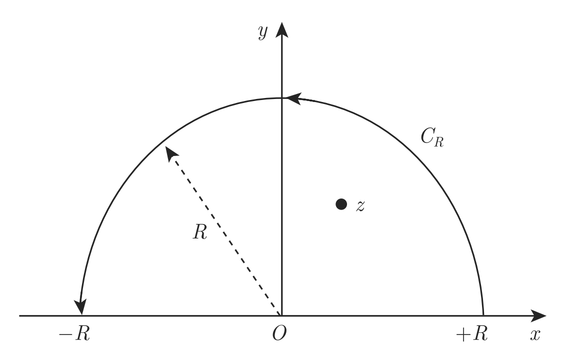



图 1.3.2　围道 $C_R$ 是上半平面的半径为 $R$ 的半圆, 包含区域 $G$

我们仍然用方程 (1.3.6a) 解上述问题, 如图 1.3.2, 考虑积分围道 $\partial G$ 由 $x$ 轴上 -$R$ 到 $+R$ 以及半径为 $R$ 的大半圆 $C_R$ 组成, 在围道 $\partial G$ 的区域 $G$ 内取一点 $z$, 则复共轭 $z^*=x-\mathrm{i}y$ 位于下半平面, 在区域 $G$ 外, 由方程 (1.3.6a) 得到

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial G}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi;\ 0=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial G}\frac{f(\xi)}{\xi-z^*}\mathrm{d}\xi \tag{1.3.9b}$$

上二式相减

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial G}f(\xi)\left(\frac{1}{\xi-z}-\frac{1}{\xi-z^*}\right)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial G}\frac{2\mathrm{i}yf(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{1.3.10a}$$

把 $\partial G$ 分成 $(-R,+R)$ 及 $C_R$ 上的积分

$$f(z)=\frac{y}{\pi}\left\{\int_{-R}^{R}\left[\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}\right]_{\mathrm{Im}\xi=0}\mathrm{d}\xi+\int_{C_R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}\mathrm{d}\xi\right\} \tag{1.3.10b}$$

当 $R\to\infty$ 时, 对固定的点 $z$, 有下列估计

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}\mathrm{d}\xi\right|\sim\frac{\pi|f(\xi)|R}{R^2}\sim\frac{\pi|f(\xi)|}{R} \tag{1.3.10c}$$

故当 $\lim\limits_{R\to\infty}|f(\xi)|=$ 有限时, 方程 (1.3.10b) 中大圆上积分趋近零, 因此

$$f(z)=\frac{y}{\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\left[\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}\right]_{\mathrm{Im}\xi=0}\mathrm{d}\xi \tag{1.3.11a}$$

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 代入上式且实部和虚部分开得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\eta,0)}{(x-\eta)^2+y^2}\mathrm{d}\eta\\ v(x,y)&=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(\eta,0)}{(x-\eta)^2+y^2}\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{1.3.11b}$$

因 $u(x,y)$ 满足 Laplace 方程, 故方程 (1.3.11a) 的第一式就是定解问题式 (1.3.9a) 的解. 顺便指出, 利用类似的上述过程, 可以导出一个重要的积分关系, 即 Hilbert 变换.

**Hilbert 变换** 把方程 (1.3.9b) 中的二式相加得到

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial G}f(\xi)\left(\frac{1}{\xi-z}+\frac{1}{\xi-z^*}\right)\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial G}\frac{2(\xi-x)f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{1.3.12a}$$

同样把 $\partial G$ 分成 $(-R,+R)$ 及 $C_R$ 上的积分

$$\begin{aligned}f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}&\int_{-R}^{+R}\left[\frac{2(\xi-x)f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}\right]_{\mathrm{Im}\xi=0}\mathrm{d}\xi\\ &+\int_{C_R}\frac{2(\xi-x)f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{1.3.12b}$$

第二项估计为

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R}\frac{2(\xi-x)f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}\mathrm{d}\xi\right|\sim\frac{2\pi R^2|f(\xi)|}{R^2}\sim|f(\xi)| \tag{1.3.12c}$$

因此当 $\lim\limits_{R\to\infty}|f(\xi)|=0$ 时, 方程 (1.3.12b) 中大圆上积分趋近零. 注意：上式与式 (1.3.10c) 的区别! 于是, 由式 (1.3.12b) 得到

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2f(\xi)(\eta-x)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}\right]_{\mathrm{Im}\xi=0}\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[u(\eta,0)+\mathrm{i}v(\eta,0)](\eta-x)}{(\eta-x)^2+y^2}\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{1.3.12d}$$

实部和虚部分开得到

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(\eta,0)(\eta-x)}{(\eta-x)^2+y^2}\mathrm{d}\eta$$
$$v(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\eta,0)(\eta-x)}{(\eta-x)^2+y^2}\mathrm{d}\eta \tag{1.3.13a}$$

上式从实轴上实部的值决定整个平面上的虚部, 而从实轴上虚部的值决定整个平面上的实部. 取 $y=0$(即在实轴上取值) 且令 $\chi(x)=u(x,0)$ 和 $\alpha(x)=v(x,0)$ 是函数的实部和虚部, 则

$$\chi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha(\eta)}{\eta-x}\mathrm{d}\eta;\ \alpha(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(\eta)}{\eta-x}\mathrm{d}\eta \tag{1.3.13b}$$

显然, 一旦知道了函数的虚部 $\alpha(x)$, 就可以通过式 (1.3.13b) 的第一式求得实部, 反之亦然. 变换式 (1.3.13b) 称为 **Hilbert 变换**, 其中积分是在 Cauchy 主值意义的积分. 物理上, 变量 $x$ 一般是声波或电磁波的频率 $\omega$, $\chi(\omega)$ 和 $\alpha(\omega)$ 分别为波传播速度和衰减因子与频率的关系, 故方程 (1.3.13b) 也叫**色散关系**. 我们在 5.4.5 小节中将从积分方程的角度进一步讨论 Hilbert 变换.

上面简单介绍了复变函数方法讨论二维 Laplace 方程, 它们在弹性力学、流体力学和电磁学等方面有十分重要的应用.

### 1.3.2　调和函数的基本性质

首先考虑三维空间情形, 介绍调和函数 $u(\boldsymbol{r})$ 的两个基本性质, (1) 均值性: 调和函数 $u(\boldsymbol{r})$ 在其定义域 $G$ 内任一点 $\boldsymbol{r}_0$ 的值, 等于 $u(\boldsymbol{r})$ 在以 $\boldsymbol{r}_0$ 为球心, 而含于 $G$ 中的任一球面 $S_R$ 上的积分平均值

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R}u(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{1.3.14}$$

反之, 如果 $u(\boldsymbol{r})$ 满足均值公式, 则 $u(\boldsymbol{r})$ 在 $G$ 内必定是调和函数; (2) 极值性: 调和函数不可能在其区域内部达到极值, 故极大和极小只能在 $G$ 的边界 $\partial G$ 上取得. 为了证明上述性质, 先引进 Green 公式, 利用

$$\int_G\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.3.15a}$$

取 $\boldsymbol{A}=u\nabla v$ 得第一 Green 公式

$$\int_G u\nabla^2v\ \mathrm{d}\tau+\int_G(\nabla u)\cdot(\nabla v)\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1.3.15b}$$

取 $\boldsymbol{A}=v\nabla u$ 则

$$\int_G v\nabla^2u\mathrm{d}\tau+\int_G(\nabla u)\cdot(\nabla v)\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1.3.15c}$$

上两式相减得到 Green 公式

$$\int_G (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{1.3.15d}$$

显然要求 $u$ 和 $v$ 在 $G$ 内二次可微, 在 $\partial G$ 上一次可微. 取 $v = 1/R$, 其中 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|$, 但该函数在 $G$ 内存在奇点 $\boldsymbol{r}_0$, 故不能把 Green 公式直接应用到 $G$ 内. 设在 $G$ 内挖去以 $\boldsymbol{r}_0$ 点为球心、半径为 $\varepsilon > 0$ 的小球 $K_\varepsilon$(如图 1.3.3), 在区域 $G - K_\varepsilon$ 内, $v$ 连续可导, 应用 Green 公式 (1.3.15d)

$$\int_{G-K_\varepsilon}\left(u\nabla^2\frac{1}{R} - \frac{\nabla^2 u}{R}\right)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G+\partial K_\varepsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S \tag{1.3.16a}$$

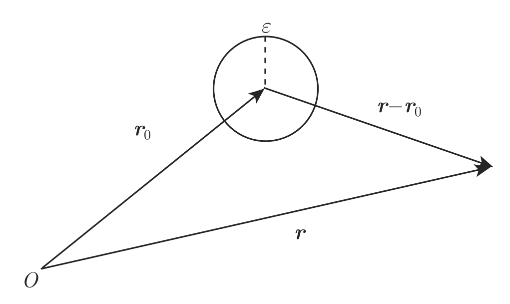



图 1.3.3 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 的矢量关系

其中 $\partial K_\varepsilon$ 是小球的表面. 直接计算表明：在 $G - K_\varepsilon$ 内, $\nabla^2(1/R) = 0$; 在小球面 $\partial K_\varepsilon$ 上 $R = \varepsilon$, 故

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{R=\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{R=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} \tag{1.3.16b}$$

注意：对球面 $\partial K_\varepsilon$, 区域的法向指向球心, 故增加 “−”. 于是

$$\iint_{\partial K_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{R=\varepsilon}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\partial K_\varepsilon} u\mathrm{d}S = 4\pi\bar{u} \tag{1.3.16c}$$

$$\iint_{\partial K_\varepsilon}\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\iint_{\partial K_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = 4\pi\varepsilon\overline{\frac{\partial u}{\partial n}} \tag{1.3.16d}$$

其中 $\bar{u}$ 和 $\overline{\partial u/\partial n}$ 是球面 $\partial K_\varepsilon$ 上的平均值

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{\partial K_\varepsilon} u\mathrm{d}S;\ \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{\partial K_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1.3.16e}$$

显然 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\bar{u} = u(\boldsymbol{r}_0)$. 因此, 式 (1.3.16a) 右边的面积分为

$$\iint_{\partial G}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S + 4\pi\bar{u} - 4\pi\varepsilon\overline{\frac{\partial u}{\partial n}} \tag{1.3.17a}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 类似地, 由式 (1.3.16a) 得到

$$u(\boldsymbol{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_G \frac{\nabla^2 u}{R}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right]\mathrm{d}S \tag{1.3.17b}$$

由于 $u(\boldsymbol{r})$ 满足 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$ 则

$$u(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right]\mathrm{d}S \tag{1.3.17c}$$

如果在式 (1.3.15d) 中取 $v = 1$, 而 $u$ 满足 Laplace 方程, 可得调和函数的另一性质

$$\iint_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = 0 \tag{1.3.18a}$$

上式有明显的物理意义: 在静电场中, 意味着穿过闭曲面 $\partial G$ 的电通量守恒; 如果描述热平衡, 则意味着 $G$ 内能量守恒, 因为 $G$ 内不存在热源. 由方程 (1.3.18a) 也可以得到: Laplace 方程的第二类边值问题 $\partial u/\partial n|_{\partial G} = b$ 有解的必要条件是

$$\iint_{\partial G} b\mathrm{d}S = 0 \tag{1.3.18b}$$

为了证明式 (1.3.14), 取 $\partial G$ 为以 $\boldsymbol{r}_0$ 为球心, $R$ 为半径的球面 $S_R$, 在 $S_R$ 上

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right|_{S_R} = -\frac{1}{R^2} \tag{1.3.19a}$$

代入式 (1.3.17c)

$$u(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R}\iint_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R} u(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{1.3.19b}$$

利用式 (1.3.18a) 即得式 (1.3.14), 反之结论证明较为复杂, 故略.

从均值公式 (1.3.14) 可直接推出极值性. 下面给出一直观的说明, 详细的证明可参看有关书籍. 如果调和函数 $u(\boldsymbol{r})$ 在 $G$ 内 $M_0$ 点取极值, 则由 $u$ 的连续性, 总可取以 $M_0$ 为圆心, $\varepsilon$ 为半径的小球, 在球内一致有

$$u(\boldsymbol{r}) > u(M_0)(M_0\text{ 是极小时}); u(\boldsymbol{r}) < u(M_0)(M_0\text{ 是极大时})$$

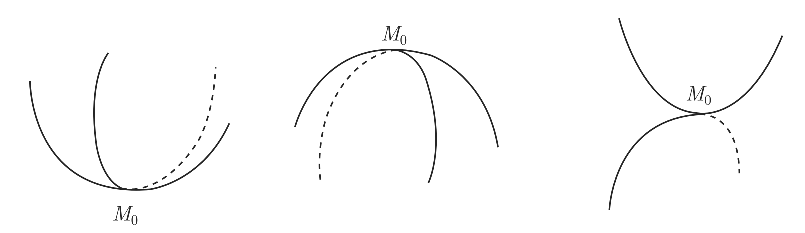



图 1.3.4　$M_0$ 极小、极大和鞍点三种情况

两种情况均值公式都不可能成立, 因此 $u(\boldsymbol{r})$ 不是调和函数, 于是极值点 $M_0$ 不可能在 $G$ 内取得, 在 $G$ 内调和函数只可能存在鞍点, 如图 1.3.4. 设 $u(\boldsymbol{r})$ 在 $\partial G$ 上取极大值为 $M$

$$\underset{\boldsymbol{r}\in G+\partial G}{\mathrm{Max}}[u(\boldsymbol{r})] = \underset{\boldsymbol{r}\in\partial G}{\mathrm{Max}}[u(\boldsymbol{r})] = M \tag{1.3.20a}$$

又因 Laplace 方程是齐次方程, $(-M)$ 一定是 $[-u(\boldsymbol{r})]$ 的极小值, 因此, 极值性可表示成

$$\underset{\boldsymbol{r}\in G+\partial G}{\mathrm{Max}}|u(\boldsymbol{r})| = \underset{\boldsymbol{r}\in\partial G}{\mathrm{Max}}|u(\boldsymbol{r})| = M \tag{1.3.20b}$$

**Poisson 方程** 当 $u(\boldsymbol{r})$ 满足 Poisson 方程 $\nabla^2 u = f$ 则

$$u(\boldsymbol{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_G \frac{f(\boldsymbol{r})}{R}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right]\mathrm{d}S \tag{1.3.21a}$$

由叠加原理, 上式第一项体积分

$$u(\boldsymbol{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_G \frac{f(\boldsymbol{r})}{R}\mathrm{d}\tau \tag{1.3.21b}$$

一定是 Poisson 方程的一个特解 (但不一定满足边界条件).

对 $n$ 维情形, 方程 (1.3.15d) 中取 $v(\boldsymbol{r})$ 为

$$v(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^{n-2}}, & n>2 \\ -\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|, & n=2 \end{cases} \tag{1.3.21c}$$

于是, 可得均值公式

$$u(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\iint_{S_R} u\mathrm{d}S_n \tag{1.3.22}$$

其中 $S_R$ 是半径为 $R$ 的 $n$ 维球面, $\omega_n$ 为 $n$ 维单位球面的面积 $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

### 1.3.3 边值问题的适定性

考虑 Laplace 方程的第一类边值问题

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0,\ \boldsymbol{r}\in G;\quad u(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{1.3.23a}$$

设上述问题的解存在, 下面利用极值性证明它的唯一性和稳定性.

首先证明解的唯一性: 设存在两个解 $u_1(\boldsymbol{r})$ 和 $u_2(\boldsymbol{r})$, 则 $u(\boldsymbol{r}) = u_1(\boldsymbol{r}) - u_2(\boldsymbol{r})$ 满足

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0,\ \boldsymbol{r}\in G;\ u(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = 0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{1.3.23b}$$

由式 (1.3.20b)

$$\underset{\boldsymbol{r}\in G+\partial G}{\mathrm{Max}}|u(\boldsymbol{r})| = \underset{\boldsymbol{r}\in\partial G}{\mathrm{Max}}|u(\boldsymbol{r})| = 0 \tag{1.3.23c}$$

如果在 $G$ 内 $u(\boldsymbol{r}) \neq 0$, 则应有

$$\underset{\boldsymbol{r}\in G+\partial G}{\mathrm{Max}} |u(\boldsymbol{r})| = \underset{\boldsymbol{r}\in \partial G}{\mathrm{Max}} |u(\boldsymbol{r})| \neq 0 \tag{1.3.23d}$$

上式与式 (1.3.20b) 矛盾! 故在 $G$ 内恒有 $u(\boldsymbol{r}) \equiv 0$, 即 $u_1(\boldsymbol{r}) \equiv u_2(\boldsymbol{r})$, 唯一性得证. 显然, 结论对 Poisson 方程也成立.

下面证明稳定性, 设 $u_1(\boldsymbol{r})$ 和 $u_2(\boldsymbol{r})$ 分别是下列问题的解

$$\nabla^2 u_1(\boldsymbol{r}) = 0,\ \boldsymbol{r}\in G;\ u_1(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = f_1(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{1.3.24a}$$

$$\nabla^2 u_2(\boldsymbol{r}) = 0,\ \boldsymbol{r}\in G;\ u_2(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = f_2(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{1.3.24b}$$

并且在 $\partial G$ 上有 $|f_1(\boldsymbol{r}) - f_2(\boldsymbol{r})| < \varepsilon$, 令调和函数 $u(\boldsymbol{r}) = u_1(\boldsymbol{r}) - u_2(\boldsymbol{r})$, 则 $u(\boldsymbol{r})$ 满足

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0,\ \boldsymbol{r}\in G;\ u(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = f_1(\boldsymbol{r}) - f_2(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{1.3.24c}$$

利用式 (1.3.20b) 有

$$\underset{\boldsymbol{r}\in G+\partial G}{\mathrm{Max}} |u(\boldsymbol{r})| = \underset{\boldsymbol{r}\in \partial G}{\mathrm{Max}} |u(\boldsymbol{r})| = \underset{\boldsymbol{r}\in \partial G}{\mathrm{Max}} |f_1(\boldsymbol{r}) - f_2(\boldsymbol{r})| < \varepsilon \tag{1.3.24d}$$

即在 $G$ 内 $|u_1(\boldsymbol{r}) - u_2(\boldsymbol{r})| < \varepsilon$, 这表明解对边值的微小偏差是一致稳定的.

对第二、三类边界条件, 可用下述方法来证明其解的唯一性. 考虑下列边值问题

$$\begin{gathered}\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left.\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered} \tag{1.3.25a}$$

其中 $\alpha/\beta \geqslant 0$ 或者 $\beta/\alpha \geqslant 0$. 设边值问题 (1.3.25a) 存在两个解 $u_1(\boldsymbol{r})$ 和 $u_2(\boldsymbol{r})$, 则 $u(\boldsymbol{r}) = u_1(\boldsymbol{r}) - u_2(\boldsymbol{r})$ 满足

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0,\ \boldsymbol{r}\in G;\ \left.\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0 \tag{1.3.25b}$$

令方程 (1.3.15c) 中 $u = v$ 则有

$$\int_G u\nabla^2 u\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \int_G (\nabla u)^2\mathrm{d}\tau \tag{1.3.25c}$$

由方程 (1.3.25b) 的第一式

$$-\int_G (\nabla u)^2\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = 0 \tag{1.3.25d}$$

分三种情况讨论:

(1) 第一类边界条件 $u|_{\partial G}=0$ 代入上式得到

$$\int_G (\nabla u)^2 \mathrm{d}\tau = 0 \tag{1.3.26a}$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{1.3.26b}$$

故 $u=$ 常数, 又因 $u|_{\partial G}=0$ 故 $u(\boldsymbol{r})\equiv 0$, 于是 $u_1(\boldsymbol{r})\equiv u_2(\boldsymbol{r})$, 唯一性得证;

(2) 第二类边界条件, 同样得到方程 (1.3.26a), 故 $u(\boldsymbol{r})=$ 常数. 因此, 对第二类边界条件, 定解问题式 (1.3.25a) 的解可确定到只差一个任意常数;

(3) 第三类边界条件, 由式 (1.3.25b) 的边界条件及 (1.3.25d)

$$\int_G (\nabla u)^2 \mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} \frac{\beta}{\alpha} u^2 \mathrm{d}S = 0 \tag{1.3.26c}$$

由假定 $\beta/\alpha > 0$, 故由上式可推得 $u(\boldsymbol{r})=$ 常数和 $u(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=0$, 故 $u(\boldsymbol{r})\equiv 0$, 于是 $u_1(\boldsymbol{r})\equiv u_2(\boldsymbol{r})$, 唯一性得证.

### 1.3.4 Helmholtz 方程与辐射问题

考虑波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi(\boldsymbol{r},t) \tag{1.3.27a}$$

如果我们求上式的时谐解 (也称为稳态解, 与热扩散中稳态分布与时间无关是完全不同的概念)

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = u(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}kt) \tag{1.3.27b}$$

则 $u(\boldsymbol{r})$ 满足方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) + k^2 u(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1.3.27c}$$

其中 $k$ 为任一实数. 显然上式是椭圆型的, 称为 **Helmholtz 方程或约化波动方程**. 对 Helmholtz 方程, 边值问题的解已不存在唯一性.

**例 1.3.1** 考虑二维 Helmholtz 方程的边值问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + k^2 u(x,y) = f(x,y),\ (x,y\in G)\\ u(x,y)|_{\partial G} = g(x,y),\ (x,y)\in\partial G\end{gathered} \tag{1.3.28a}$$

其中 $G$ 为矩形区域 $(0<x<l_x;\ 0<y<l_y)$, $\partial G$ 为矩形的四条边. 当 $k^2$ 取下列值 (即本征值, 见第二章讨论) 时

$$k^2 = \left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2,\ (n,m=1,2,\cdots) \tag{1.3.28b}$$

齐次边值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}+k^2 w(x,y)=0,\ (x,y\in G)\\&w(x,y)|_{\partial G}=0,\ (x,y)\in\partial G\end{aligned}\tag{1.3.28c}$$

存在非零解 (即本征函数, 见第二章讨论)

$$w(x,y)=a_{mn}\sin\frac{n\pi}{l_x}x\sin\frac{m\pi}{l_y}y\tag{1.3.28d}$$

其中 $a_{mn}$ 为常数. 对式 (1.3.28a) 的解 $u$, 当 $k$ 满足式 (1.3.28b) 时, $u+w$ 也是解, 而且这样的解有无穷多. 故对有限区域上的 Helmholtz 方程, 当 $k$ 为本征值时, 解不唯一.

**例 1.3.2**　考虑第一类外边值问题

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u(\boldsymbol{r})+k^2 u(\boldsymbol{r})=0,\ \boldsymbol{r}\in\bar{G}\\&u|_{|\boldsymbol{r}|=\pi/k}=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial\bar{G}\end{aligned}\tag{1.3.29a}$$

其中 $\bar{G}$ 为半径等于 $\pi/k$ 的球外. 因齐次问题 $w|_{|\boldsymbol{r}|=\pi/k}=0$ 存在非零解

$$w(\boldsymbol{r})=c\frac{\sin k|\boldsymbol{r}|}{4\pi|\boldsymbol{r}|}\tag{1.3.29b}$$

其中 $c$ 为任一常数, 故对方程 (1.3.29a) 的解 $u(\boldsymbol{r})$, $u(\boldsymbol{r})+w(\boldsymbol{r})$ 也是解, 而且这样的解有无穷多. 但方程 (1.3.29a) 来源于具体的物理问题, 例如声波的辐射问题: 在球面 $|\boldsymbol{r}|=\pi/k$ 上给定声压 $u|_{|\boldsymbol{r}|=\pi/k}=g(\boldsymbol{r})$, 求球外开空间的辐射声场, 则 $u(\boldsymbol{r})$ 满足定解问题 (1.3.29a).

**Sommerfeld 辐射条件**　像例 1.3.2 这样的外边值问题, 为了使解 $u(\boldsymbol{r})$ 唯一, 还必须在无限远处附加其他条件, 这样的条件称为 Sommerfeld 辐射条件. 表述如下: 对边值问题

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u(\boldsymbol{r})+k^2 u(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\bar{G}\\&\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial\bar{G}}=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial\bar{G}\end{aligned}\tag{1.3.30a}$$

其中 $\bar{G}$ 表示闭区域 $G$ 以外的开区域, 要求解满足

(1) 无限远处条件为

$$\lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty}\sqrt{|\boldsymbol{r}|^{n-1}}\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial|\boldsymbol{r}|}-\mathrm{i}ku(\boldsymbol{r})\right]=0\tag{1.3.30b}$$

(2) 在 $\bar{G}$ 内

$$\left|\sqrt{|\boldsymbol{r}|^{n-1}}u(\boldsymbol{r})\right|\leqslant \text{常数}\tag{1.3.30c}$$

物理上, 方程 (1.3.30b) 表示 $u(\boldsymbol{r})$ 应取向外部空间辐射波场的解, 而式 (1.3.30c) 表示辐射能量的有限性.

**例 1.3.3** 考虑三维空间的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) + k^2 u(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1.3.31a}$$

的二个球对称解 (其中 $r > 0$, 直接代入就可以证明)

$$u_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r};\ u_2(\boldsymbol{r}) = \frac{\exp(-\mathrm{i}kr)}{4\pi r} \tag{1.3.31b}$$

因

$$\begin{gathered}\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \mathrm{i}ku_1\right) = -\lim_{r\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} = 0 \\ \lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u_2}{\partial r} - \mathrm{i}ku_2\right) = -\lim_{r\to\infty}(2\mathrm{i}kr+1)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} = -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\end{gathered} \tag{1.3.31c}$$

故 $u_1(\boldsymbol{r})$ 满足辐射条件式 (1.3.30b), 而 $u_2(\boldsymbol{r})$ 不满足. 事实上, 由式 (1.3.31b), 在时域

$$\begin{aligned}\psi_1(r,t) &= \frac{1}{4\pi r}\exp[\mathrm{i}k(r-t)] \\ \psi_2(r,t) &= \frac{1}{4\pi r}\exp[\mathrm{i}k(r+t)]\end{aligned} \tag{1.3.31d}$$

显然, $\psi_1(r,t)$ 表示从原点向外辐射的球面波, 而 $\psi_2(r,t)$ 表示由无穷远处向原点入射的球面波. 因此 $u_1(\boldsymbol{r})$ 表示辐射解. 如果要求式 (1.3.29a) 的解满足辐射条件, 显然应取 $w(\boldsymbol{r}) \equiv 0$, 故这时式 (1.3.29a) 的解就唯一了.

**Sommerfeld 辐射条件的导出** 考虑三维问题 ($n = 3$), 为了把 Green 式 (1.3.15d) 应用于 Helmholtz 方程的外边值问题, 我们把该式修改为

$$\int_{\bar{G}} [u(\nabla^2 + k^2)v - v(\nabla^2 + k^2)u]\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial\bar{G}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{1.3.32a}$$

其中 $u(\boldsymbol{r})$ 满足式 (1.3.30a), 而 $v$ 取为

$$v(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{4\pi R} \tag{1.3.32b}$$

其中 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \in \bar{G}$. 仿照得到式 (1.3.17b) 的过程, 不难得到

$$u(\boldsymbol{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\bar{G}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\bar{G}} \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\right]\mathrm{d}S \tag{1.3.32c}$$

式中 $\partial\bar{G}$ 由 $G$ 的边界面 $\partial G$(注意：法向相反) 与半径 $R \to \infty$ 大球面组成, 如图 1.3.5. 于是式 (1.3.32c) 右边的面积分可分为二部分：边界面上的 $\partial G$ 积分和在大

球面上的积分, 令大球面上的积分为 $I_R$

$$I_R=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_R}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\right]\mathrm{d}S \tag{1.3.33a}$$

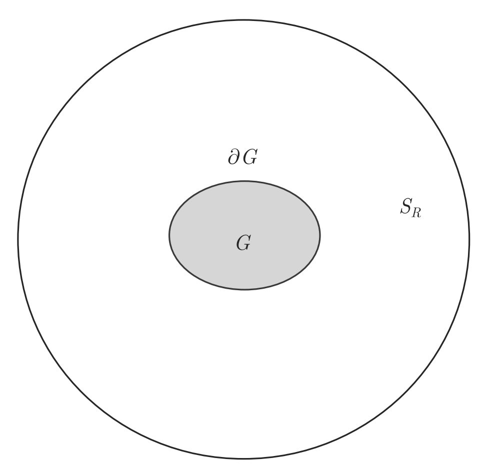



图 1.3.5　外边值问题: $\partial\overline{G}=\partial G+S_R$

物理上, 要求 $\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$, 否则 $u^2(\boldsymbol{r}_0)$ 在大球面的面积分 (通常代表通过大球面的能量) 要发散. 下面分析积分趋近零的条件. 作运算

$$\nabla\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\nabla R=\frac{\mathrm{i}kR-1}{R}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\mathbf{e}_R \tag{1.3.33b}$$

其中 $\boldsymbol{e}_R$ 是 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 方向的单位矢量, 在大球面 $S_R$ 上, $|\boldsymbol{r}|\to\infty$, 而 $|\boldsymbol{r}_0|$ 有限, 因此 $\boldsymbol{e}_R=\boldsymbol{R}/R\approx\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_r$(球面法向), $R\approx|\boldsymbol{r}|=r$, 于是, 式 (1.3.33a) 简化成

$$\begin{aligned}I_R&=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{4\pi}\iint_{S_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku\right)\mathrm{d}S\\&=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku\right)4\pi r^2\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{1.3.34a}$$

显然, 上式积分为零的条件是

$$\lim_{r\to\infty}r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku\right)=0 \tag{1.3.34b}$$

上式就是 $n=3$ 时的 Sommerfeld 辐射条件式 (1.3.30b).

注意：(1) 如果式 (1.3.27b) 中时间关系取为 $\psi(\boldsymbol{r},t)=u(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{i}kt)$, 则 Sommerfeld 辐射条件式 (1.3.30b) 应改为

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r^{n-1}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}ku\right)=0 \tag{1.3.35a}$$

而方程 (1.3.31b) 中 $u_2(\boldsymbol{r})$ 表示向外辐射的解；(2) 对时域波动方程 (1.3.27a) 的外边值问题, 同样存在 Sommerfeld 辐射条件

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r^{n-1}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0 \tag{1.3.35b}$$

### 1.3.5 一般椭圆型方程的积分估计

考虑一般的椭圆型方程的定解问题

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f(\boldsymbol{r}),\ (\boldsymbol{r}\in G) \tag{1.3.36a}$$

满足第一类边界条件 $u(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=0$. 假定：(1) 所有系数及非齐次项 $f$ 是 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的连续函数, 系数 $a_{ij}$ 不仅对称, 还具有连续的一阶偏导数；(2) 关于变量的二阶偏导数部分必须是椭圆型的, 即对任意的实向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 存在正常数 $a$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant a\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \tag{1.3.36b}$$

我们有结论：存在一个仅依赖于 $a$ 以及 $|\partial a_{ij}/\partial x_i|$, $|b_i|$, $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的正的常数 $c_0$, 当 $c(\boldsymbol{r})\leqslant -c_0$ 时, 解 $u(\boldsymbol{r})$ 满足积分不等式

$$\int_G\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+u^2\right]\mathrm{d}\tau\leqslant C\int_G fu\mathrm{d}\tau \tag{1.3.36c}$$

其中 $C$ 是一个不依赖于 $u(\boldsymbol{r})$ 的正常数.

证明：方程两边乘以 $u(\boldsymbol{r})$, 然后在 $G$ 上积分得到

$$\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_iu\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu^2\right)\mathrm{d}\tau=\int_G fu\mathrm{d}\tau \tag{1.3.37a}$$

Green 公式 (1.2.39b) 中取 $U_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 得到

$$\int_G\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}u\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}\sum_{i,j=1}^{n} ua_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}n_j\mathrm{d}S=0 \tag{1.3.37b}$$

其中利用了边界条件 $u|_{\partial G}=0$. 因此

$$\int_G\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\mathrm{d}\tau=-\int_G\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+u\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\tau \tag{1.3.37c}$$

把上式代入方程 (1.2.37a) 得到

$$\int_G \left( \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - cu^2 \right) \mathrm{d}\tau = \int_G P(u, u_x) \mathrm{d}\tau \tag{1.3.38a}$$

其中

$$P(u, u_x) \equiv -\left( \sum_{i,j=1}^{n} u \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}\tau + fu \tag{1.3.38b}$$

由系数 $a_{ij}$ 一阶偏导数的连续性, 假定

$$M \equiv \max_i \max_{\boldsymbol{r} \in G} \left( \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right|, |b_i| \right) \tag{1.3.38c}$$

则

$$\left| \int_G P(u, u_x) \mathrm{d}\tau \right| \leqslant 2M \int_G \sum_{i=1}^{n} |u| \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \mathrm{d}\tau + \int_G |f| \cdot |u| \mathrm{d}\tau \tag{1.3.39a}$$

对上式右边进一步放大, 对任意的正常数 $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_G P(u, u_x) \mathrm{d}\tau \right| &\leqslant 2M \int_G \sum_{i=1}^{n} \frac{|u|}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \mathrm{d}\tau + \int_G |f| \cdot |u| \mathrm{d}\tau \\ &\leqslant M\varepsilon \int_G \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}\tau + \int_G \left( \frac{n}{\varepsilon} M + \frac{1}{2} \right) u^2 \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2} \int_G f^2 \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{1.3.39b}$$

取 $\varepsilon = a/2M$, 把上式代入 (1.2.38a) 得到

$$\begin{aligned} \int_G \left( \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - cu^2 \right) \mathrm{d}\tau &\leqslant \frac{a}{2} \int_G \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}\tau \\ &+ \int_G c_0 u^2 \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2} \int_G f^2 \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{1.3.39c}$$

其中 $c_0 = 2nM^2/a + 1/2$. 再注意到式 (1.3.36b) 有

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \geqslant a \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \tag{1.3.39d}$$

代入式 (1.3.39c)

$$\frac{a}{2} \int_G \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}\tau + \int_G (-c) u^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \int_G c_0 u^2 \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2} \int_G f^2 \mathrm{d}\tau \tag{1.3.39e}$$

显然当 $-c \geqslant c_0$ 时就有

$$\frac{a}{2}\int_G \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{2}\int_G f^2 \mathrm{d}\tau \tag{1.3.40a}$$

另一方面, 由于 $u|_{\partial G}=0$(该条件限制了我们只能讨论第一类边界条件), 式 (1.2.42b) 仍然成立, 即

$$\frac{a}{2}\int_G u^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{C_1 a}{2}\int_G \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{C_1 a}{4}\int_G f^2 \mathrm{d}\tau \tag{1.3.40b}$$

式 (1.3.40a) 与 (1.3.40b) 相加得到

$$\int_G \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + u^2\right] \mathrm{d}\tau \leqslant C\int_G f^2 \mathrm{d}\tau \tag{1.3.40c}$$

其中 $C$ 是一个不依赖于 $u(\boldsymbol{r})$ 的正常数, 故积分不等式 (1.3.36c) 得证. 利用积分不等式 (1.3.40c), 可以讨论椭圆型方程 (1.2.36a) 的第一类边值问题的唯一性和稳定性.

注意: 在得到不等式 (1.3.40c) 时, 条件 $c(\boldsymbol{r}) \leqslant -c_0$ 是十分重要的. 显然 $c(\boldsymbol{r})$ 必须是足够小的负数, 否则解就可能不存在唯一性. 一个典型的例子就是 Helmholtz 方程 (1.3.27c), 此时 $c(\boldsymbol{r}) = k^2 > 0$, 见例 1.3.1. 事实上, 考虑简单的情况, 令方程 (1.3.38b) 中 $a_{ij} = \delta_{ij}$ 和 $b_i = f = 0$, 则方程 (1.3.38a) 简化成

$$\int_G \left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 - cu^2\right] \mathrm{d}\tau = 0 \tag{1.3.40d}$$

当 $c(\boldsymbol{r}) \leqslant 0$ 时, 积分号内各项恒正. 于是, 可得到结论: 相应方程的第一类边值问题解是唯一的; 但当 $c(\boldsymbol{r}) > 0$ 时, 不能得到该结论. 这一点也说明 $c(\boldsymbol{r}) \leqslant -c_0$ 是唯一性的一个充分条件, 而非必要条件.

**关于第二、三类边界条件的说明** 与方程 (1.2.39d) 相同, 为了保证方程 (1.3.37b) 右边的面积分为零, 第二类边界条件应该取

$$\left.\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} n_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|_{\partial G} = 0 \tag{1.3.41a}$$

我们就非均匀、各向异性介质中的热平衡问题考察上式的意义: 在非均匀、各向异性介质中, 热流矢量 $\boldsymbol{J}$ 的三个分量为

$$J_i = -\sum_{j=1}^{3} a_{ij}(\boldsymbol{r})\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial x_j},\ (i=1,2,3) \tag{1.3.41b}$$

其中 $u(\boldsymbol{r})$ 为平衡温度分布, $a_{ij}(\boldsymbol{r})$, $(i,j=1,2,3)$ 为热传导张量, 在法向矢量为 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ 的边界面 $\partial G$ 上, 热流矢量 $\boldsymbol{J}$ 在法向的投影 (流出区域的热流) 为

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}=\sum_{i=1}^{3}J_i n_i=-\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}(\boldsymbol{r})n_i\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial x_j} \tag{1.3.42a}$$

而第二类边界条件为 $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}=0$, 再利用 $a_{ij}(\boldsymbol{r})=a_{ji}(\boldsymbol{r})$, 就得到方程 (1.3.41a). 顺便指出, 当第二类边界条件式 (1.3.41a) 满足时, 不等式 (1.3.40a) 仍然成立, 可用于讨论解的唯一性. 但是, 式 (1.2.42b) 不成立, 故不等式 (1.3.40c) 也不成立.

如果流出区域的热流 $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}$ 正比于区域内、外的温度差, 则

$$-\left[\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}(\boldsymbol{r})n_i\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial x_j}\right]_{\partial G}=\frac{\alpha}{\beta}[u(\boldsymbol{r})-\vartheta(\boldsymbol{r})]_{\partial G} \tag{1.3.42b}$$

其中 $\vartheta$ 是区域外的温度分布, $\alpha/\beta\geqslant 0$ 为比例系数. 于是, 第三类边界条件为

$$\left[\alpha u(\boldsymbol{r})+\beta \ \ldots \right]_{\partial G}=\alpha\vartheta(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}\in\partial G \tag{1.3.42c}$$

如果 $\vartheta=0$, 就是第三类齐次边

## 1.4　热传 … inger 方程

本节讨论最简单的抛物型方程, 即热传导方程的定解问题, 以及解的若干重要性质. 主要内容有: 热传导方程的 Cauchy 问题、混合问题以及混合问题的适定性; 为了与热传导方程比较, 讨论了色散型 Schrödinger 方程解的性质; 在 1.4.5 小节中导出了一般抛物型方程的能量积分估计; 最后对三类典型方程的定解问题提法作一小结, 讨论几个不适定的定解问题.

### 1.4.1　热传导方程的 Cauchy 问题

考虑一维热传导方程的 Cauchy 问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ t>0,\ x\in(-\infty,\infty)\\ u|_{t=0}=\psi(x),\ x\in(-\infty,\infty)\end{gathered} \tag{1.4.1a}$$

用 Fourier 积分法解上述定解问题 (见第二章, 2.6 节), 首先设 $\psi(x)$ 的 Fourier 积分存在, 并且当 $x\to\pm\infty$ 时 $u$ 和 $u_x\to 0$ (最后这些条件可减弱), 用 $U(\lambda,t)$ 表示 $u(x,t)$ 的 Fourier 积分

$$U(\lambda,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}u(x,t)\mathrm{d}x \tag{1.4.1b}$$

逆变换为

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}U(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda \tag{1.4.1c}$$

对方程 (1.4.1a) 作 Fourier 变换, 得决定 $U(\lambda,t)$ 的方程

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}U(\lambda,t)}{\mathrm{d}t}+\lambda^2U(\lambda,t)=0\\&U(\lambda,t)\,|_{t=0}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\psi(x)\mathrm{d}x\equiv\Psi(\lambda)\end{aligned} \tag{1.4.2a}$$

上式的解为

$$U(\lambda,t)=\Psi(\lambda)\exp(-\lambda^2t) \tag{1.4.2b}$$

代入式 (1.4.1c) 即得解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x-\lambda^2t}\Psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-s)-\lambda^2t}\mathrm{d}\lambda\right]\psi(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{1.4.3a}$$

式中对 $\lambda$ 的积分如下

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-s)-\lambda^2t}\mathrm{d}\lambda=\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-t\left(\lambda+\mathrm{i}\frac{x-s}{2t}\right)^2\right]\mathrm{d}\lambda \tag{1.4.3b}$$

根据复变函数理论, 上式积分在实轴上进行, 作变换 $\eta=\lambda+\mathrm{i}(x-s)\,/\,2t$ 后, 相当于在虚轴上平移 $-(x-s)\,/\,2t$, 而积分值不变. 于是

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-s)-\lambda^2t}\mathrm{d}\lambda&=\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-t\eta^2)\mathrm{d}\eta\\&=\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\eta^2)\mathrm{d}\eta\\&=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right]\end{aligned} \tag{1.4.3c}$$

上式代入式 (1.4.3a) 得 Cauchy 问题的形式解

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-s,t)\psi(s)\mathrm{d}s \tag{1.4.4a}$$

其中函数 $G(x-s,t)$ 称为热传导方程的 **Poisson 核**, 在热传导方程中起着十分重要的作用

$$G(x-s,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right] \tag{1.4.4b}$$

下面验证式 (1.4.4a) 确为 Cauchy 问题 (1.4.1a) 的古典解, 分二步讨论.

首先验证式 (1.4.4a) 满足热导方程: 显然当初值函数 $\psi(x)$ 为有界的连续函数时, 积分式 (1.4.4a) 对所有的 $t>0$ 收敛, 且在积分号内对 $x$ 及 $t$ 微分任意次而得的积分也对所有的 $t>0$ 收敛, 故当 $t>0$ 时, 由积分式 (1.4.4a) 定义的 $u(x,t)$ 关于 $x$ 和 $t$ 都无穷可微. 此外直接计算表明 $G(x-s,t)$(当 $t>0$ 时) 满足方程 $G_t-G_{xx}=0$. 因此, 当 $t>0$ 时, 式 (1.4.4a) 也满足热导方程.

其次, 必须验证式 (1.4.4a) 满足初始条件. 这里不进行详细的证明, 仅指出, 如果引进广义函数弱收敛 (见第三章), 存在关系式

$$\lim_{t\to 0} G(x-s,t)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right]=\delta(x-s) \tag{1.4.4c}$$

利用 Dirac Delta 函数的性质, 当 $\psi(x)$ 是连续函数时

$$u(x,t)\,|_{t=0}=\lim_{t\to 0}u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-s)\psi(s)\mathrm{d}s=\psi(x) \tag{1.4.4d}$$

综上所述, 当 $\psi(x)$ 是 $x$ 的有界连续函数时, 式 (1.4.4a) 确实给出了 Cauchy 问题 (1.4.1a) 的古典解, 且此解当 $t>0$ 时关于 $x$ 和 $t$ 都无穷可微.

对初始 $\psi(x)$ 的限制可进一步放宽: 设 $\psi(x)$ 连续, 并且

$$|\psi(x)|\leqslant M\exp(Ax^2) \tag{1.4.5a}$$

其中常数 $M$ 和 $A$ 大于零, 则方程 (1.4.4a) 是 Cauchy 问题 (1.4.1a) 在 $x-t$ 平面上带状区域 $R$

$$R:[-\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T] \tag{1.4.5b}$$

中的古典解, 并且在 $R$ 中 $u(x,t)$ 无穷可微: $u\in C^\infty$, 其中 $T<1/(4A)$.

**例 1.4.1**　考虑初始值为 Gauss 分布

$$\psi(x)=A\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \tag{1.4.6a}$$

其中 $A$ 是归一化常数, 如果要求 $\psi(x)$ 绝对值归一化 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|\mathrm{d}x=1$, 则 $a\sqrt{\pi}A=1$; 如果要求 $\psi(x)$ 平方归一化 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x=1$, 则 $a\sqrt{\pi}A^2=\sqrt{2}$, 下面我们取平方归一化. 代入方程 (1.4.4a) 得到 $t>0$ 时刻的分布

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right]\exp\left(-\frac{s^2}{a^2}\right)\mathrm{d}s\\&=\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{a^2}{a^2+4t}}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2+4t}\right)\end{aligned} \tag{1.4.6b}$$

容易计算出

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\mathrm{d}x = \frac{a}{\sqrt{a^2+4t}} \sim \frac{1}{t^{1/2}} \tag{1.4.6c}$$

上式表明：一维扩散场的总 “能量”(如果是温度场, 可看作总内能) 随时间衰减, 并且以 $t^{-1/2}$ 趋向零! 显然, 对 $n$ 维的 Cauchy 问题, 衰减速度是 $t^{-n/2}$.

**扩散场的衰减速度** 我们通过计算具体例子, 表明了 Cauchy 问题中扩散场以 $t^{-1/2}$ 趋向零的特性. 事实上, 这是扩散场的基本性质. 由方程 (1.4.4a) 和 (1.4.4b), 扩散场的总 “能量” 为

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q(s,s')\psi(s)\psi(s')\mathrm{d}s\mathrm{d}s' \tag{1.4.7a}$$

其中 $Q(s,s')$ 为积分

$$Q(s,s') = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t} - \frac{(x-s')^2}{4t}\right]\mathrm{d}x \tag{1.4.7b}$$

不难得到

$$Q(s,s') = \sqrt{2\pi t}\exp\left[-\frac{(s'-s)^2}{8t}\right] \tag{1.4.7c}$$

上式代入方程 (1.4.7a), 当 $t\to\infty$ 时, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{8\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(s'-s)^2}{8t}\right]\psi(s)\psi(s')\mathrm{d}s\mathrm{d}s' \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{8\pi t}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s)\mathrm{d}s\right]^2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{8\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2(s)\mathrm{d}s \sim \frac{1}{t^{1/2}}\end{aligned} \tag{1.4.8a}$$

故只要初始分布平方可积, 那么总 “能量” 衰减速度是 $t^{-1/2}$, 因此说扩散方程是耗散型方程. 如果初始分布绝对可积, 则 $u(x,t)$ 本身的衰减速度是 $t^{-1/2}$, 由方程 (1.4.4a) 和 (1.4.4b)

$$\begin{aligned}|u(x,t)| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right]|\psi(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(s)|\,\mathrm{d}s \sim \frac{1}{t^{1/2}}\end{aligned} \tag{1.4.8b}$$

注意: 初始分布绝对可积并不一定平方可积, 例如, 当 $a\to 0$ 时, 如果要求 $\psi(x)$ 绝对值归一化, $\psi(x)\to\delta(x)$(见 3.1 节), 它不是平方可积的, 但绝对可积; 如果要求 $\psi(x)$ 平方归一化, 则当 $a\to 0$ 时, $\psi(x)$ 并不趋近 Dirac Delta 分布. 实际物理问题中更感兴趣的是平方可积.

**非齐次热传导方程** 对非齐次热传导方程的 Cauchy 问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ t>0,\ x\in(-\infty,\infty)\\&u|_{t=0}=0,\ x\in(-\infty,\infty)\end{aligned}\tag{1.4.9a}$$

也存在 Duhamel 齐次化原理. 设 $\chi(x,t,\tau)$ 是下列齐次问题的解

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \chi}{\partial t}-\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}=0,\ t>\tau,\ x\in(-\infty,\infty)\\&\chi|_{t=\tau}=f(x,\tau),\ x\in(-\infty,\infty)\end{aligned}\tag{1.4.9b}$$

则方程 (1.4.9a) 的解为

$$u(x,t)=\int_0^t \chi(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau\tag{1.4.10a}$$

于是, 从式 (1.4.4a) 立即可得到

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x-s,t-\tau)f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\tag{1.4.10b}$$

如果初始条件是非齐次的, 即满足方程 (1.4.1a) 的第二式, 由叠加原理, 显然有

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\int_{-\infty}^{\infty}G(x-s,t)\psi(s)\mathrm{d}s\\&+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x-s,t-\tau)f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{1.4.10c}$$

**高维初值问题** 用同样方法, 可求得 $n$ 维 Cauchy 问题的解

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t),\ t>0\\&u|_{t=0}=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{aligned}\tag{1.4.11a}$$

首先考虑齐次方程, 即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)=0$, 设 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的 $n$ 重 Fourier 变换和逆变换为

$$\begin{aligned}U(\boldsymbol{k},t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)}u(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\u(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)}U(\boldsymbol{k},t)\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\cdots\mathrm{d}k_n\end{aligned}\tag{1.4.11b}$$

其中 $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 和 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 方程 (1.4.11b) 的第二式代入方程 (1.4.11a)(注意：首先考虑 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)=0$) 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}U(\boldsymbol{k},t)}{\mathrm{d}t}+(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)U(\boldsymbol{k},t)=0\\ &U(\boldsymbol{k},t)|_{t=0}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)}\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}\tag{1.4.11c}$$

上式的解为

$$U(\boldsymbol{k},t)=U(\boldsymbol{k},t)|_{t=0}\mathrm{e}^{-(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)t}\tag{1.4.11d}$$

代入式 (1.4.11b) 的第二式, 并且结合式 (1.4.11c) 的第二式

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_j(x_j-x_j')-k_j^2)t}\mathrm{d}k_j\right]\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\cdots\mathrm{d}x_n'\tag{1.4.11e}$$

由上式可见, 高维空间的每一维都是独立的, 一维的结果直接应用就可以了. 对非齐次方程, 即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)\neq 0$, 方程 (1.4.11a) 的解为

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)=&\int_{-\infty}^{\infty}G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,t)\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}'\\ &+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,t-\tau)f(\boldsymbol{r}',\tau)\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{1.4.11f}$$

其中 Poisson 核为

$$G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,t)=\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}{4t}\right)\tag{1.4.11g}$$

其中 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2=\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-x_j')^2$ 和 $\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}'=\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\cdots\mathrm{d}x_n'$.

**半无限区域问题** 利用式 (1.4.4a) 还可求半无限区域的热传导问题的解

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ t>0,\ x\in(0,\infty)\\ &u|_{t=0}=\psi(x),\ x\in[0,\infty)\\ &u(x,t)|_{x=0}=0,\ t\geqslant 0\end{aligned}\tag{1.4.12a}$$

为了把上述问题化成式 (1.4.1a), 根据边界条件, 将 $f$ 作奇延拓于负半轴

$$\tilde{\psi}(x)=\begin{cases}\psi(x),\ x>0\\ -\psi(-x),\ x<0\end{cases}\tag{1.4.12b}$$

于是由式 (1.4.4a)

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(s) G(x-s,t) \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{0} G(x-s,t)\tilde{\psi}(s)\mathrm{d}s + \int_{0}^{\infty} G(x-s,t)\tilde{\psi}(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{1.4.12c}
$$

注意到奇延拓式 (1.4.12b), 即得问题的解为

$$
u(x,t) = \int_0^{\infty} \psi(s)[G(x-s,t) - G(x+s,t)]\mathrm{d}s \tag{1.4.12d}
$$

如果方程 (1.4.12a) 中为第二类边界条件 $u_x|_{x=0} = 0$, 则应对 $f(x)$ 作偶延拓

$$
\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ \psi(-x), & x < 0 \end{cases} \tag{1.4.13a}
$$

于是有解

$$
u(x,t) = \int_0^{\infty} \psi(s)[G(x-s,t) + G(x+s,t)]\mathrm{d}s \tag{1.4.13b}
$$

对更一般的第三类边界条件 $(\alpha u - \beta u_x)|_{x=0} = 0$, 上述延拓方法失效, 事实上, 此时 Fourier 变换中核函数应该用更复杂的本征函数, 见 2.6.2 小节讨论.

### 1.4.2 一维热传导方程的混合问题

下面求解有限区间上一维热传导方程的混合问题

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ t > 0, \ x \in (0,l) \\
u|_{t=0} = \psi(x), \ x \in [0,l] \\
u(x,t)|_{x=0} = u(x,t)|_{x=l} = 0, \ t \geqslant 0
\end{gathered}
\tag{1.4.14a}
$$

用分离变数法解之 (详细见第二章讨论), 设解 $u(x,t)$ 有形式

$$
u(x,t) = X(x)T(t) \tag{1.4.14b}
$$

代入方程 (1.4.14a) 的第一式可得 $X(x)$ 和 $T(t)$ 满足的方程

$$
X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0; \quad T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \tag{1.4.14c}
$$

其中 $\lambda$ 为分离变数常数, 为使 $u(x,t)$ 满足边界条件, 要求 $X(x)$ 满足

$$
X(x)|_{x=0} = X(x)|_{x=l} = 0 \tag{1.4.14d}
$$

方程 (1.4.14c) 的第一式和式 (1.4.14d) 构成本征值问题, 存在非零解的条件是 $\lambda$ 只能取分立值 $\lambda_n$, 相应的非零解为 $X_n(x)$

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right);\ \lambda_n = \frac{n\pi}{l},\ (n = 1, 2, \cdots) \tag{1.4.15a}$$

称 $X_n(x)$ 为**本征函数**, 而相应的 $\lambda_n$ 为**本征值** (本征值问题的详细讨论见第二章). 方程 (1.4.14c) 的第二式解为

$$T_n(t) = C_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right) \tag{1.4.15b}$$

因方程 (1.4.14a) 是线性问题, 故满足叠加原理, 通解可表示为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right) \tag{1.4.16a}$$

利用初始条件可求得

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x') \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) \mathrm{d}x' \tag{1.4.16b}$$

于是, 定解问题具有形式解

$$u(x,t) = \int_0^l g(x,x',t)\psi(x')\mathrm{d}x' \tag{1.4.17a}$$

其中 $g(x,x',t)$ 定义为

$$g(x,x',t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right) \tag{1.4.17b}$$

由于级数中存在指数因子, 容易证明当 $t > 0$ 时, 在区域 $(0 < x < l)$ 中, 对 $u(x,t)$ 求导与求和可以变换次序, 从而式 (1.4.17a) 确实满足方程 (1.4.14a). 此外, 为了保证式 (1.4.17a) 是问题的古典解,$\psi(x)$ 还必须满足: (1) 相容性条件 $\psi(0) = \psi(l) = 0$; (2)$\psi(x)$ 具有连续的一阶导数, 即 $\psi(x) \in C^1$. 函数 $g(x,x',t)$ 称为混合问题 (1.4.14a) 的含时 Green 函数 (见第三章详细讨论), 具有性质

$$\lim_{t\to 0} g(x,x',t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) = \delta(x - x') \tag{1.4.17c}$$

当边界条件为第二类边界条件 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$ 时, Green 函数为

$$g(x,x',t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right) \tag{1.4.18a}$$

如果边界条件是 $u|_{x=0}=0$ 和 $u_x|_{x=l}=0$, 可定义 Green 函数 $g(x,x',t)$

$$g(x,x',t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{\mu_n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{\mu_n\pi x'}{l}\right)\exp\left(-\frac{\mu_n^2\pi^2 t}{l^2}\right) \tag{1.4.18b}$$

其中 $\mu_n=(n+1/2)$.

**时间渐近特性** 考虑混合问题 (1.4.14a) 的解, 由方程 (1.4.16a), 总 “能量” 积分为

$$\begin{aligned}\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x&=\frac{l}{2}\sum_{n,m=1}^{\infty}B_nB_m\delta_{nm}\exp\left[-\frac{(n^2+m^2)\pi^2 t}{l^2}\right]\\&=\frac{l}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n^2\exp\left(-\frac{2n^2\pi^2 t}{l^2}\right)\leqslant\frac{l}{2}\exp\left(-\frac{2\pi^2 t}{l^2}\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}B_n^2\end{aligned} \tag{1.4.19a}$$

其中利用了积分

$$\int_0^l\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=\frac{l}{2}\delta_{nm} \tag{1.4.19b}$$

另一方面, 由方程 (1.4.16b) 并且注意到式 (1.4.17c)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}B_n^2&=\frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l\psi(x')\psi(x'')\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x''}{l}\right)\mathrm{d}x''\mathrm{d}x'\\&=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l\psi(x')\psi(x'')\delta(x'-x'')\mathrm{d}x''\mathrm{d}x'=\frac{2}{l}\int_0^l\psi^2(x')\mathrm{d}x'\end{aligned} \tag{1.4.19c}$$

上式代入式 (1.4.19a) 得到

$$\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x\leqslant\exp\left(-\frac{2\pi^2 t}{l^2}\right)\cdot\int_0^l\psi^2(x')\mathrm{d}x' \tag{1.4.19d}$$

因此, 只要初始分布平方可积, 那么总 “能量” 积分指数衰减. 比较式 (1.4.8a) 的结果, 我们得到 —Cauchy 问题的解 $t^{-1/2}$ 趋近与零, 而混合问题的解指数衰减到零.

### 1.4.3 色散型 Schrödinger 方程

为了比较扩散方程与色散型 Schrödinger 方程的区别, 考虑一维自由粒子的 Schrödinger 方程的初值问题

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\ t>0,\ x\in(-\infty,\infty)\\ \psi|_{t=0}=\psi_0(x),\ x\in(-\infty,\infty)\end{gathered} \tag{1.4.20a}$$

与方程 (1.4.1a) 类似, 也用 Fourier 积分方法求解, 不难得到

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-s)-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\lambda^2 t}\mathrm{d}\lambda\right]\psi_0(s)\mathrm{d}s \tag{1.4.20b}$$

其中积分运算如下

$$
\begin{aligned}
G_s(x-s,t) &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-s)-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\lambda^2 t}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m(x-s)^2}{2\hbar t}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\hbar}{2m}t\eta^2}\mathrm{d}\eta = \sqrt{\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m(x-s)^2}{2\hbar t}}
\end{aligned}
\tag{1.4.21a}
$$

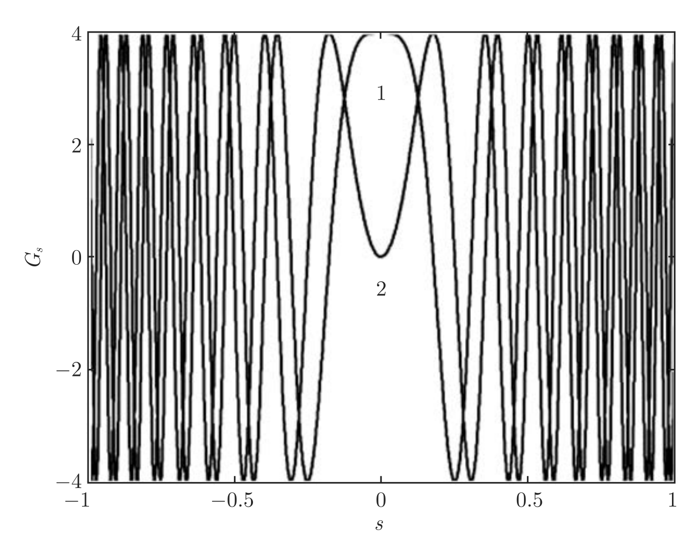



图 1.4.1 $G_s(x-s,t)$ 随 $s$ 的变化, 计算中取 $m/\hbar=1, x=0$ 和 $t=0.01$. 曲线 1 和 2 分别表示 $G_s(x-s,t)$ 的实部和虚部

上式代入式 (1.4.20b) 得到 Schrödinger 方程的初值问题的解为

$$
\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G_s(x-s,t)\psi_0(s)\mathrm{d}s \tag{1.4.21b}
$$

注意: 上式中 $G_s(x-s,t)$ 也可由式 (1.4.4b) 作替换 $t\to \mathrm{i}\hbar t/2m$, 因为 Schrödinger 方程作替换 $t\to \mathrm{i}\hbar t/2m$ 后就变成热扩散方程.

当 $t\to 0$ 时, $G_s(x-s,t)$ 并不趋向通常的 Dirac Delta 函数, 如图 1.4.1, 当 $t\to 0$ 时, $G_s(x-s,t)$ 是高速震荡的函数, 式 (1.4.21b) 中积分主要由 $s=x$ 点附近贡献, 于是

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\psi(x,t) &\approx \psi_0(x)\int_{-\infty}^{\infty}G_s(x-s,t)\mathrm{d}s \\
&= \psi_0(x)\sqrt{\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar t}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m(x-s)^2}{2\hbar t}}\mathrm{d}s=\psi_0(x)
\end{aligned}
\tag{1.4.21c}
$$

对初始值为 Gauss 分布 $\psi_0(x) = A\exp(-x^2/a^2)$, 不难得到

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{a^2}{a^2+2\mathrm{i}\hbar t/m}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2+2\mathrm{i}\hbar t/m}\right) \tag{1.4.22a}$$

色散场的总 “能量” 为 (注意: 这里的解 $\psi(x,t)$ 一般是复函数, 因为 Schrödinger 方程是复系数方程; 而在热扩散问题中, 方程系数是实的, 我们总可以假定 $u(x,t)$ 是实函数, 如果 $u(x,t)$ 是复函数, 则实部和虚部都是热扩散方程的解)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x = &\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{a^4}{a^4+(2\hbar t/m)^2}} \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{2a^2}{a^4+(2\hbar t/m)^2}\right)x^2\right]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.4.22b}$$

完成积分后得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x = 1 \tag{1.4.22c}$$

在量子力学中 $|\psi(x,t)|^2$ 是 $t$ 时刻在 $x$ 点发现粒子的概率, 对 $x$ 的积分表示 $t$ 时刻在所有点发现粒子的概率, 当然为 1. 与热扩散方程得到的式 (1.4.6c) 相比, 其区别是十分明显的.

事实上, 对任意的初值分布, 由式 (1.4.21a) 和 (1.4.21b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x = \frac{m}{2\pi\hbar t} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q(s,s')\psi_0(s)\psi_0^*(s')\mathrm{d}s\mathrm{d}s' \tag{1.4.23a}$$

其中积分 $Q(s,s')$ 运算如下

$$\begin{aligned}Q(s,s') &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\mathrm{i}\frac{(x-s)^2-(x-s')^2}{2\hbar t/m}\right]\mathrm{d}x \\ &= \exp\left[\mathrm{i}\frac{m(s^2-s'^2)}{2\hbar t}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\mathrm{i}\frac{m(s-s')}{\hbar t}x\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即

$$Q(s,s') = \frac{2\pi\hbar t}{m} \exp\left[\mathrm{i}\frac{m(s^2-s'^2)}{2\hbar t}\right]\delta(s-s') \tag{1.4.23b}$$

得到上式, 利用了关系 (见 3.1.3 小节)

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k \tag{1.4.23c}$$

注意: 此时 $Q(s,s')$ 不能由式 (1.4.7c) 通过简单的替换 $t\to \mathrm{i}\hbar t/2m$ 得到, 因为这里存在复共轭运算. 由式 (1.4.23b) 代入式 (1.4.23a) 得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)|^2\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{i}\frac{m(s^2-s'^2)}{2\hbar t}\right]\delta(s-s')\psi_0(s)\psi_0^*(s')\mathrm{d}s\mathrm{d}s'\\&=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_0(s)|^2\mathrm{d}s=1\end{aligned}\tag{1.4.23d}$$

故方程 (1.4.22c) 恒成立!

对色散型 Schrödinger 方程的混合问题

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\ t>0,\ x\in(0,l)\\ \psi|_{t=0}=\psi_0(x),\ x\in[0,l]\\ \psi(x,t)|_{x=0}=\psi(x,t)|_{x=l}=0,t\geqslant 0\end{gathered}\tag{1.4.24a}$$

不难得到

$$\begin{gathered}\psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{n^2\pi^2}{2ml^2}t\right)\\ B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi_0(x')\sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right)\mathrm{d}x'\end{gathered}\tag{1.4.24b}$$

容易验证

$$\int_0^l|u(x,t)|^2\mathrm{d}x=\frac{l}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|B_n|^2=\int_0^l|\psi_0(x')|^2\mathrm{d}x'=1\tag{1.4.24c}$$

上式假定初始分布是平方归一化的. 可见, 对色散型 Schrödinger 方程, 混合问题的总 “能量” 积分也为常数! 比较式 (1.4.19d), 热扩散方程混合问题的总 “能量” 积分是指数衰减的.

**关于色散的说明** 在无限空间, 由叠加原理, 时间演化方程 (波动方程、热传导方程或者 Schrödinger 方程) 的解总可以表示为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(\boldsymbol{k},\omega)\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{d}\omega\tag{1.4.25}$$

由于上式必须满足时间演化方程, 故 $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$ 与 $\omega$ 必须满足一定的关系, 在各向同性的介质中, 该关系简化为 $k=|\boldsymbol{k}|$ 与 $\omega$ 的关系, 即 $\omega=\omega(k_x,k_y,k_z)=\omega(k)$— 称为**色散关系**.

(1) 把式 (1.4.25) 代入波动方程 (1.1.4b) 得到 $\omega^2-a^2k^2=0$ 或者 $k=\omega/a$, 即 $k$ 与 $\omega$ 是线性关系, 波传播的群速度 $c_g=\partial\omega/\partial k=a$ 为常数, 故称方程 (1.1.4b) 表达的波为非色散波;

(2) 把式 (1.4.25) 代入热扩散方程 (1.1.4a) 得到 $\mathrm{i}\omega - a^2k^2 = 0$ 或者 $k = \sqrt{\mathrm{i}\omega}/a$, "波" 传播的群速度 $c_g = a(1-\mathrm{i})\sqrt{\omega/2}$ 不仅与频率有关, 而且是复数, 虚部表示耗散, 故方程 (1.1.4a) 表达的波为耗散波;

(3) 把式 (1.4.25) 代入 Schrödinger 方程 (1.1.38a) 得到 $\omega = \hbar k^2/2m$, 波传播的群速度 $c_g = \sqrt{2\hbar\omega/m}$ 与频率有关, 频率越高, 群速度越大, 故 Schrödinger 方程 (1.1.38a) 表达的波为色散波.

### 1.4.4　极值原理和混合问题的适定性

设热传导方程的混合问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,t),\ t>0,\ x\in(a,b)\\ u(x,t)|_{t=0} = f(x),\ x\in[a,b]\\ u(x,t)|_{x=a} = \phi(t),\ u(x,t)|_{x=b} = \psi(t),\ t\geqslant 0\end{gathered}\tag{1.4.26a}$$

解存在, 现在证明其唯一性及关于 $f(x)$、$\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的稳定性. 为此首先介绍热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ t\in(0,T),\ x\in(a,b)\tag{1.4.26b}$$

的**极值原理**: 设 $u(x,t)$ 在矩形 $R:[a\leqslant x\leqslant b;\ 0\leqslant t\leqslant T]$ 上连续, 并且在 $R$ 内部满足方程 (1.4.26b), 则它在矩形的两个侧面 $(x=a,b;\ 0\leqslant t\leqslant T)$ 及底边 $(t=0, a\leqslant x\leqslant b)$ 上取得最大值和最小值, 如图 1.4.2. 换言之, $u(x,t)$ 的最大值或最小值在初始时刻 $t=0$ 或者边界上得到. 因方程 (1.4.26b) 是齐次方程, 如果 $u(x,t)$ 的最大值为 $M$, 则最小值一定是 $(-M)$. 于是, 极值原理可表示成

$$\underset{R}{\mathrm{Max}}\,|u(x,t)| = \underset{t=0\text{或}x=a,b}{\mathrm{Max}}\,|u(x,t)|\tag{1.4.26c}$$

用反证法来证明上述结果, 设 $u(x,t)$ 在点 $(x_0,t_0)$ 得到其最大值: $a<x_0<b;\quad 0<t_0\leqslant T$, 则应有

$$\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x^2}\leqslant 0;\quad \frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t}\geqslant 0\tag{1.4.27a}$$

如果 $t_0<T$ 则 $u_t(x_0,t_0)=0$, 但有可能最大值在 $t_0=T$ 发生, 故一般只有 $u_t(x_0,t_0)\geqslant 0$. 为了引出矛盾, 考虑辅助函数

$$w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2\tag{1.4.27b}$$

其中 $\varepsilon>0$ 为常数, 因 $w(x,t)$ 在区域 $R:[a\leqslant x\leqslant b;\ 0\leqslant t\leqslant T]$ 连续, 因此在某一点 $(x_1,t_1)$,$w(x,t)$ 达到最大值. 设 $a<x_1<b;\quad 0<t_1\leqslant T$, 则同样应有

$$\frac{\partial^2 w(x_1,t_1)}{\partial x^2}\leqslant 0;\ \frac{\partial w(x_1,t_1)}{\partial t}\geqslant 0\tag{1.4.27c}$$

但直接计算可得

$$w_t - w_{xx} = u_t - u_{xx} - 2\varepsilon = -2\varepsilon < 0 \tag{1.4.28a}$$

式 (1.4.27c) 和 (1.4.28a) 是矛盾的, 因为由式 (1.4.27c)

$$\frac{\partial w(x_1, t_1)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w(x_1, t_1)}{\partial x^2} \geqslant 0 \tag{1.4.28b}$$

上式右边非负, 而式 (1.4.28a) 右边严格为负, 于是 $w(x,t)$ 只可能在 $t = 0$ 或者 $x = a$ 和 $b$ 上取得其最大值, 设 $M$ 是 $u(x,t)$ 在初值 $t = 0$ 或者边界 $x = a$ 和 $b$ 上的最大值, 下面来证明在整个 $R$ 上

$$u(x,t) \leqslant M \tag{1.4.29a}$$

因我们已证明 $w(x,t)$ 的最大值在 $t = 0$ 或者 $x = a$ 和 $b$ 上得到, 故在 $R$ 内

$$w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2 \leqslant M + \varepsilon b^2 \tag{1.4.29b}$$

因此

$$u(x,t) = w - \varepsilon x^2 \leqslant w \leqslant M + \varepsilon b^2 \tag{1.4.29c}$$

式中令 $\varepsilon \to 0$, 则在整个 $R$ 区域上均有 (1.4.29a) 成立. 而由假定, $M$ 是 $u(x,t)$ 在初值 $t = 0$ 或边界 $x = a$ 和 $b$ 上的最大值, 故极值原理得证.

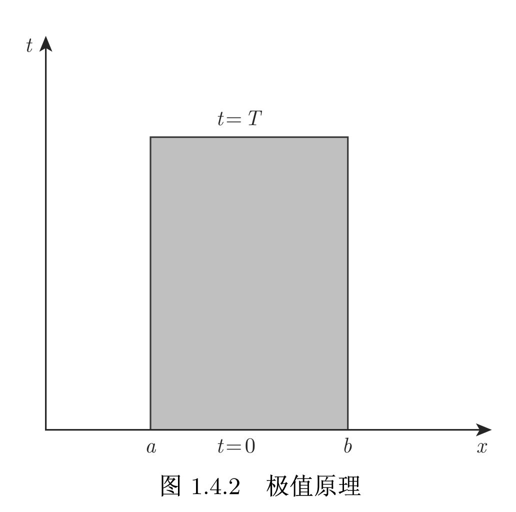



图 1.4.2 极值原理

利用极值原理, 容易证明混合问题 (1.4.26a) 解的唯一性和稳定性.

(1) 唯一性: 设存在两个解 $u_1$ 和 $u_2$, 则 $u = u_1 - u_2$ 满足齐次问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ t > 0,\ x \in (a,b) \\ u|_{t=0} = 0,\ x \in [a,b] \\ u|_{x=a} = u|_{x=b} = 0,\ t \geqslant 0\end{gathered} \tag{1.4.30a}$$

由极值原理

$$\operatorname*{Max}_{R} |u(x,t)| = \operatorname*{Max}_{t=0\text{或}=a,b} |u(x,t)| = 0 \tag{1.4.30b}$$

故在整个 $R$ 上有 $u \equiv 0$, 于是 $u_1 \equiv u_2$, 唯一性得证;

(2) 稳定性: 设初值或边值偏差 $|u_1 - u_2| < \varepsilon$, 由极值原理, 在 $R$ 内都有 $|u_1 - u_2| < \varepsilon$, 于是稳定性得证.

下面介绍另一种方法证明高维热传导方程混合问题解的唯一性和稳定性, 这种方法不仅对第一类边界条件适用, 且对第二和三类边界条件也成立. 考虑混合问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} - \nabla^2 u(\boldsymbol{r},t) = g(\boldsymbol{r},t),\ t > 0,\ \boldsymbol{r} \in G \\ u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0} = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G + \partial G \\ \left.\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = b(\boldsymbol{r},t),\ t \geqslant 0, \boldsymbol{r} \in \partial G\end{gathered} \tag{1.4.31a}$$

为证明解的唯一性, 只需证明齐次问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial w(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} - \nabla^2 w(\boldsymbol{r},t) = 0,\ t > 0, \boldsymbol{r} \in G \\ w(\boldsymbol{r},t)|_{t=0} = 0,\ \boldsymbol{r} \in G + \partial G \\ \left.\left(\alpha w + \beta \frac{\partial w}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0,\ t \geqslant 0\end{gathered} \tag{1.4.31b}$$

只有零解即可, 为此作积分

$$I(t) = \int_G w^2 \mathrm{d}\tau \tag{1.4.32a}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 2\int_G w \frac{\partial w}{\partial t} \mathrm{d}\tau = 2\int_G w \nabla^2 w \mathrm{d}\tau \tag{1.4.32b}$$

利用 Green 公式

$$\int_G w \nabla^2 w \mathrm{d}\tau = -\int_G (\nabla w)^2 \mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} w \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{1.4.32c}$$

方程 (1.4.32b) 变成

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-2\int_G(\nabla w)^2\mathrm{d}\tau+2\iint_{\partial G}w\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1.4.33a}$$

利用方程 (1.4.31b) 的第三式边界条件, 上式第二项化为

$$\iint_{\partial G}w\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S=\begin{cases}-\iint_{\partial G}\dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{\partial w}{\partial n}\right)^2\mathrm{d}S, & \alpha\neq 0\\ -\iint_{\partial G}\dfrac{\alpha}{\beta}w^2\mathrm{d}S, & \beta\neq 0\end{cases} \tag{1.4.33b}$$

于是, 当 $\alpha/\beta\geqslant 0$ 或者 $\beta/\alpha\geqslant 0$ 时总有 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t\leqslant 0$, 因此 $I(t)$ 是单调下降函数, 又根据初始条件: $I(0)=0$, 故 $I(t)\leqslant 0$. 但根据定义式 (1.4.32a): $I(t)\geqslant 0$, 故只有 $I(t)=0$, 因此 $w=0$, 唯一性即证.

下面来证明方程 (1.4.31a) 的解对初值 $f(\boldsymbol{r})$ 的均方渐近稳定性, 为此设 $g(\boldsymbol{r},t)=0$ 和 $b(\boldsymbol{r},t)=0$, 对积分

$$I(t)=\int_G u^2\mathrm{d}\tau \tag{1.4.34a}$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=2\int_G u\nabla^2u\mathrm{d}\tau=-2\left[\int_G(\nabla u)^2\mathrm{d}\tau-\iint_{\partial G}u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\right] \tag{1.4.34b}$$

利用不等式

$$0<\lambda_1\leqslant\frac{\displaystyle\int_G(\nabla u)^2\mathrm{d}\tau-\iint_{\partial G}u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S}{\displaystyle\int_G u^2\mathrm{d}\tau} \tag{1.4.35a}$$

(上式的证明将在 4.3.1 小节中给出, 见式 (4.3.13)) 其中 $\lambda_1>0$ 是本征值问题

$$\begin{gathered}-\nabla^2\psi(\boldsymbol{r})=\lambda\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left.\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered} \tag{1.4.35b}$$

的最小本征值. 式 (1.4.35a) 代入式 (1.4.34b) 应有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\leqslant-2\lambda_1^2I(t) \tag{1.4.36a}$$

即

$$I(t)\leqslant I(0)\exp(-2\lambda_1^2t) \tag{1.4.36b}$$

注意: 上式与式 (1.4.19d) 的结论一致. 因此, 对混合问题

$$\begin{gathered} u_t(\boldsymbol{r},t)-\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)=0,\ t>0,\ \boldsymbol{r}\in G \\ u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G \\ \left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0,\ t\geqslant 0 \end{gathered} \tag{1.4.37a}$$

不管初值 $f(\boldsymbol{r})$ 相差多少, 解 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的平方平均偏差当 $t$ 足够大时可任意地小, 故混合问题对初值 $f(\boldsymbol{r})$ 是均方渐近稳定的, 即

$$\int_G |u_1(\boldsymbol{r},t)-u_2(\boldsymbol{r},t)|^2\mathrm{d}\tau\leqslant \mathrm{e}^{-2\lambda_1^2 t}\int_G |f_1(\boldsymbol{r})-f_2(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}\tau \tag{1.4.37b}$$

### 1.4.5　一般抛物型方程的能量积分估计

考虑一般抛物型方程的定解问题

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f(\boldsymbol{r},t) \\ t>0,\ \boldsymbol{r}\in G \end{gathered} \tag{1.4.38a}$$

满足的初始和边界条件分别为

$$\begin{gathered} u|_{t=0}=\phi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G \\ u|_{\partial G}=0,\ t\geqslant 0 \end{gathered} \tag{1.4.38b}$$

方程 (1.2.38a) 和 (1.2.38b) 中各变量和系数的说明同 1.2.5 小节. 为了保证方程是抛物型的, 关于空间变量的二阶偏导数部分必须是椭圆型的, 即对任意的实向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 存在正常数 $a$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant a\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \tag{1.4.38c}$$

为了定义方程 (1.2.38a) 的能量积分, 以 $u(\boldsymbol{r},t)$ 乘以方程 (1.2.38a) 两边, 并在 $G$ 上积分得到

$$\int_G u\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu\right)\mathrm{d}\tau=\int_G fu\mathrm{d}\tau \tag{1.4.39a}$$

其中左边第二项积分可用 Green 公式分部积分, 与式 (1.2.40b) 类似有

$$-\int_G u\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\mathrm{d}\tau=\int_G\sum_{i,j=1}^n\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+u\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\tau \tag{1.4.39b}$$

上式代入方程 (1.4.39a) 得到

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}+\int_G\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\mathrm{d}\tau=\int_G Q(u,u_x)\mathrm{d}\tau+\int_G fu\mathrm{d}\tau \tag{1.4.40a}$$

其中定义能量积分为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_G u^2\mathrm{d}\tau \tag{1.4.40b}$$

以及

$$Q(u,u_x)=-\sum_{i,j=1}^{n}u\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}-u\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu\right) \tag{1.4.40c}$$

与式 (1.2.42a) 类似, 因假定 $a_{ij}$ 的一阶偏导数连续, 对 $0\leqslant t\leqslant T$, 存在不等式

$$\left|\int_G Q(u,u_x)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant C_T\int_G\left(u^2+\sum_{i=1}^{n}|u|\cdot\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right)\mathrm{d}\tau \tag{1.4.41a}$$

其中 $C_T$ 是与 $u$ 无关的常数. 对任意的正常数 $\varepsilon>0$, 上式第二项积分为

$$\int_G\sum_{i=1}^{n}\frac{|u|}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}\tau\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_G\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}\tau+\frac{n}{2\varepsilon}\int_G u^2\mathrm{d}\tau \tag{1.4.41b}$$

上式代入式 (1.4.41a) 且取 $\varepsilon$ 满足 $\varepsilon=2a/C_T$

$$\left|\int_G Q(u,u_x)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant a\int_G\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}\tau+C_1\int_G u^2\mathrm{d}\tau \tag{1.4.41c}$$

其中 $C_1\equiv C_T(1+nC_T/a)$. 上式代入式 (1.4.40a)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}+\int_G\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\mathrm{d}\tau\leqslant a\int_G\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\tau\\+\left(C_1+\frac{1}{2}\right)\int_G u^2\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\int_G f^2\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.4.42a}$$

再注意到式 (1.4.38c)

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\geqslant a\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \tag{1.4.42b}$$

上式代入不等式 (1.4.42a) 就得到

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\gamma E(t)+\frac{1}{2}\int_G f^2\mathrm{d}\tau \tag{1.4.43a}$$

其中 $\gamma = C_1 + 1/2$. 式 (1.4.43a) 左右两边乘 $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{e}^{-\gamma t}E(t)]}{\mathrm{d}t} \leqslant \mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{1}{2}\int_G f^2 \mathrm{d}\tau \tag{1.4.43b}$$

于是得到

$$E(t) \leqslant \mathrm{e}^{\gamma t}\left[E(0) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_G f^2 \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t'\right],\ (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1.4.43c}$$

利用上式就可以证明抛物型方程的混合问题的解的唯一性和稳定性.

### 1.4.6 三类典型方程定解问题提法比较

由前面各节的讨论可以看出, 我们对 Laplace 方程提边值问题, 而对波动方程和热传导方程则提混合问题或 Cauchy 问题. 特别是热传导方程, 总是给定 $t = 0$ 的初始值, 求 $t > 0$ 方程的解, 这些定解问题来源于实际的物理问题, 它们是适定的. 那么为什么对 Laplace 方程不提 Cauchy 问题, 对波动方程不提边值问题呢? 如果给定 $t = 0$ 的值, 求 $t < 0$ 时热传导方程的解, 将给出什么样的结果呢? 下面的讨论指出, 这些定解问题都是不适定的, 我们用简单的例子来说明之. 如何求不适定问题的解讨论见第七章.

**例 1.4.2** 二维 Laplace 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ y > 0,\ x \in (-\infty, \infty) \\ u|_{y=0} = \phi(x),\ u_y|_{y=0} = \psi(x),\ x \in (-\infty, \infty)\end{gathered} \tag{1.4.44a}$$

如果作变换 $t = \mathrm{i}y$, 则上述定解问题变成波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\ x \in (-\infty, \infty) \\ u|_{y=0} = \phi(x);\ u_t|_{t=0} = -\mathrm{i}\psi(x),\ x \in (-\infty, \infty)\end{gathered} \tag{1.4.44b}$$

由式 (1.1.9d), 上述问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x + t) + \phi(x - t)] - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(s)\mathrm{d}s \tag{1.4.44c}$$

于是, 方程 (1.4.44a) 的解为

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{1}{2}[\phi(x+\mathrm{i}y)+\phi(x-\mathrm{i}y)]-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{x-\mathrm{i}y}^{x+\mathrm{i}y}\psi(s)\mathrm{d}s\\&=\mathrm{Re}[\phi(x+\mathrm{i}y)]-\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\int_{x}^{x+\mathrm{i}y}\psi(s)\mathrm{d}s-\int_{x}^{x-\mathrm{i}y}\psi(s)\mathrm{d}s\right]\\&=\mathrm{Re}[\phi(x+\mathrm{i}y)]+\frac{1}{2}\left[\int_0^y\psi(x+\mathrm{i}t)\mathrm{d}t+\int_0^y\psi(x-\mathrm{i}t)\mathrm{d}t\right]\\&=\mathrm{Re}\left[\phi(x+\mathrm{i}y)+\int_0^y\psi(x+\mathrm{i}t)\mathrm{d}t\right]\end{aligned}\tag{1.4.45a}$$

根据复变函数理论, 上式要求在复平面 $z=x+\mathrm{i}y$ 上, 函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 是解析函数. 因此边值不能任意给定, 否则定解问题 (1.4.44a) 无解. 下面考察关于初值的稳定性, 对初值 $\psi$ 附加微小变化 $\delta\psi=n^{-k}\sin nx$, 其中 $k$ 和 $n$ 都是正整数, 当 $n$ 充分大时, $\delta\psi$ 及 $(k-1)$ 阶以下导数的绝对值都可任意小. 但解的变化

$$\delta u=\frac{1}{n^{k-1}}\sinh ny\sin nx=\frac{1}{2n^{k-1}}(\mathrm{e}^{ny}-\mathrm{e}^{-ny})\sin nx\tag{1.4.45b}$$

由此可见, 尽管 $\delta\psi$ 可任意小, 但 $\delta u$ 且可任意大, 因此二维 Laplace 方程的 Cauchy 问题是不稳定的. 详细讨论见 7.3.1 小节.

**例 1.4.3** 波动方程的边值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=g(x,y),\ (x,y)\in G\\&u|_{\partial G}=f(x,y),\ (x,y)\in\partial G\end{aligned}\tag{1.4.46a}$$

其中 $G$ 为 $(0<x<l_x;\ 0<y<l_y)$ 的矩形, $\partial G$ 为其四条边. 下面来证明上述定解问题的解不唯一, 为此只要证明相应的齐次问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\in G\\&u|_{\partial G}=0,\ (x,y)\in\partial G\end{aligned}\tag{1.4.46b}$$

存在非零解. 令 $u(x,y)$ 有分离变数形式

$$u(x,y)=\phi(x)\psi(y)\tag{1.4.47a}$$

代入式 (1.4.46b)

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)}=\frac{\psi''(y)}{\psi(y)}\tag{1.4.47b}$$

两边恒等的条件是等于同一常数 (设为 $-k^2$), 于是可得

$$\phi''(x) + k^2\phi(x) = 0;\ \psi''(y) + k^2\psi(y) = 0 \tag{1.4.47c}$$

上式的通解是

$$\begin{aligned} \phi(x) &= A\sin kx + B\cos kx \\ \psi(y) &= C\sin ky + D\cos ky \end{aligned} \tag{1.4.48a}$$

由 $u(0,y) = u(x,0) = 0$ 得 $B = D = 0$；而由 $u(l_x,y) = u(x,l_y) = 0$ 得

$$k = \frac{n\pi}{l_x};\ k = \frac{m\pi}{l_y},\ (n,m = 1,2,\cdots) \tag{1.4.48b}$$

因此, 齐次问题有非零解

$$u(x,y) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{l_y}\right) \tag{1.4.49a}$$

其中 $n$ 和 $m$ 还必须满足自洽条件

$$\frac{l_y}{l_x} = \frac{m}{n},\ (n,m = 1,2,\cdots) \tag{1.4.49b}$$

上式意味着当 $l_y/l_x$ 为有理数时, 定解问题 (1.4.46a) 的解不唯一, 并且存在无穷多解; 当 $l_y/l_x$ 为无理数时, 解唯一.

**例 1.4.4** 热传导方程对负时间的不稳定性, 考虑定解问题

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ t < 0,\ x \in (0,l) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,\ t \leqslant 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x),\ x \in [0,l] \end{gathered} \tag{1.4.50a}$$

用分离变数不难求得上述问题的解为

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\ ,\quad (t<0) \\ A_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \phi(x')\sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right)\mathrm{d}x' \end{gathered} \tag{1.4.50b}$$

若初值条件有扰动

$$\delta\phi = \frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{1.4.50c}$$

其中 $k$ 为正整数. 解的变化为

$$\delta u = \frac{1}{k^2}\exp\left(-\frac{k^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{1.4.50d}$$

显然, 当 $k$ 充分大时 $\delta\phi$ 可任意小, 但由于 $t<0,\delta u$ 却可任意大. 事实上, 由于 $t<0$, 级数式 (1.4.50b) 是不收敛的. 因此, 热传导问题对负时间是不稳定的. 物理上, 热传导方程描述不可逆过程, 不可能根据 $t=0$ 时刻的状态反推 $t<0$ 的状态. 从方程本身的形式来看, 由于热传导方程仅出现 $t$ 的一阶偏导, 故对时间反演不具有不变性; 而波动方程则出现 $t$ 的二阶偏导, 对时间反演具有不变性, 可从 $t=0$ 的波动状态反推知 $t<0$ 的波动状态, 但是如果波动方程包含不可逆的阻尼或耗散项, 同样不具有时间反演不变性.

## 习　题　一

1.1 求方程

$$(l+x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

的双曲型、椭圆型和抛物型区域, 并研究它们与参数 $l$ 的相关性.

1.2 求下列方程的标准形式

(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (注意与上题比较, 说明一阶项对方程的影响);

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$

(d) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\ x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$

(e) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\ y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

1.3 证明两个自变数的二阶常系数椭圆型或双曲型方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\pm\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+Cu=f$$

经过函数变换

$$u(x,y)=\exp(ax+by)v(x,y)$$

能化成简单形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\pm\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+cv=g$$

并求 $a$ 和 $b$.

1.4 证明方程

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

在单位圆 $x^2+y^2=1$ 的附近是混合型的.

1.5 证明函数

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}$$

在锥面 $x^2+y^2=t^2$ 内部满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

1.6 证明球面波问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u|_{t=0}=\phi(r);\ u_t|_{t=0}=\psi(r),\ 0\leqslant r<\infty$$

的解为

$$u(r,t)=\frac{1}{2r}[(r-at)\phi(r-at)+(r+at)\phi(r+at)]+\frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\rho\psi(\rho)\mathrm{d}\rho$$

(提示：可利用 Poisson 公式或直接在球坐标中求解). 利用该公式求当

$$\phi(r)=\begin{cases} u_0,\ r<R \\ 0,\ r>R \end{cases};\ \psi(r)=0$$

时的解.

1.7 以下列问题为例, 说明双曲型方程的极值原理不成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ x\in(0,\pi),\ t>0$$

$$u(x,t)|_{t=0}=\sin x;\ u_t(x,t)|_{t=0}=\sin x$$

$$u(x,t)|_{x=0}=u(x,t)|_{x=\pi}=0$$

1.8 考虑方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+cu=0,\ (c>0)$$

及正方形区域

$$\Omega:x,y\in\left[-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{c}},\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{c}}\right]$$

证明函数

$$u(x,y)=\cos\sqrt{\frac{c}{2}}x\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{2}}y$$

满足上述方程, 由此说明对上述方程不成立极值原理.

1.9 求解 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ t>0$$

$$u(x,y,z,t)|_{t=0}=\phi(x,y,z)$$

提示: 作变换 $x=\sqrt{a}x'$; $y=\sqrt{b}y'$; $z=\sqrt{c}z'$.

1.10 若方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+cu,\ (c>0)$$

的解 $u$ 的绝对值在矩形 $R$:($\alpha\leqslant x\leqslant\beta$; $0\leqslant t\leqslant T$) 的侧边 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$ 上不超过 $B$, 而在底面 $t=0$ 上不超过 $M$, 证明解在 $R$ 内满足不等式

$$|u(x,t)|\leqslant\max(M\mathrm{e}^{ct},B)$$

由此证明混合问题的唯一性和稳定性. 提示: 作变换 $u(x,t)=\mathrm{e}^{ct}v(x,t)$, 对 $v(x,t)$ 利用极值原理.

# 第 2 章　本征值问题和分离变量法

分离变数法是解定解问题的基本方法, 其关键是一定函数类按某一正交函数系展开, 以及求解本征值问题. 本章 2.1 节介绍 Hilbert 空间 (主要是平方可积的函数空间) 及完备的正交归一函数系概念, 介绍若干完备的正交归一系, 如定义在 $[-1,1]$ 区间上的 Legendre 多项式集和定义在单位球面上的球谐函数集, 其方法直接利用著名的 Weierstrass 定理; 2.2 节介绍微分算子及其本征值问题, 特别是非 Hermite 对称算子; 2.3 节介绍 Sturm-Liouville 系统; 2.4 节介绍分离变数法求有限区域内定解问题; 2.5 节介绍正交曲线坐标系中 Laplace 方程和本征方程的分离变数; 最后在 2.6 节介绍无穷区域 (或半无穷区域) 定解问题的分离变数, 由于此时本征值构成连续谱, 正交函数展开中级数求和变成积分, 故必须运用积分变换技术.

## 2.1　Hilbert 空间及完备的正交函数集

利用 Hilbert 空间的概念来处理数学物理中出现的 “特殊函数”(如 Legendre 多项式和球谐函数) 是十分方便的. 因此, 本节首先介绍 Hilbert 空间的概念, 特别是元素为区间 $x \in [a,b]$ 上平方可积函数组成的 Hilbert 空间, 然后讨论一定的函数类如何按完备的正交、归一函数集合展开问题.

### 2.1.1　Hilbert 空间和平方可积函数空间

根据泛函分析理论, 完备的内积空间称为 **Hilbert 空间**, 所谓**内积空间**是指定义在复数域 $F$ 上的向量空间 $L$, 对它的每一对向量 $u$ 和 $v$ 存在一个复数 $(u,v)$ 满足

(1) **正定**, $(u,u) \geqslant 0$, 当且仅当 $u=0$ 时等号成立;

(2) **共轭对称**, $(u,v)=(v,u)^*$;

(3) **线性**, $(au+bv,w)=a^*(u,w)+b^*(v,w)$.

复数 $(u,v)$ 称为向量 $u$ 与 $v$ 的内积. 内积的引进使我们可以讨论向量之间的 “角度”, 从而可讨论向量之间的正交性. 所谓 “完备” 则指 $L$ 中的每一 Cauchy 序列都收敛于 $L$ 中的一个元素. 不完备性的一个例子是有理数集, 序列 $[S_1, S_2, \cdots, S_N, \cdots]$ (其中 $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} 1/n!$) 是有理数集, 但收敛到无理数 e. 现在我们特别感兴趣的是由元素为 $[a,b]$ 上的平方可积复值函数组成的函数空间, 记为 $L^2[a,b]$. 下面来证

明这个函数空间是一个完备的内积空间, 因此是一个 Hilbert 空间, 证明分三步：

(1) 首先证明 $L^2[a,b]$ 是一个向量空间: 在函数空间中, 两向量 $u$ 和 $v$ 的加法按自然规律定义为逐点相加

$$(u+v)(x)=u(x)+v(x) \tag{2.1.1a}$$

而与复标量 $a$ 乘法定义为

$$au \equiv au(x) \tag{2.1.1b}$$

可以证明二个平方可积的函数之和仍是平方可积的. 事实上, 因为

$$\begin{aligned}|u+v|^2&=|u|^2+|v|^2+2\mathrm{Re}(uv)\leqslant |u|^2+|v|^2+2|uv|\\&\leqslant |u|^2+|v|^2+2|u|\cdot|v|\leqslant 2(|u|^2+|v|^2)\end{aligned}$$

两边积分表明, 平方可积函数 $u$ 和 $v$ 之和仍是平方可积的, 因此函数空间 $L^2[a,b]$ 是一个向量空间.

(2) 其次, 定义函数空间 $L^2[a,b]$ 上任意二个函数 $u$ 和 $v$ 的内积

$$(u,v)=\int_a^b u^*(x)v(x)\mathrm{d}x \tag{2.1.2a}$$

因为

$$\begin{aligned}|(u,v)|&=\left|\int_a^b u^*(x)v(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_a^b |u^*(x)|\cdot|v(x)|\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\left[\int_a^b |u(x)|^2\mathrm{d}x+\int_a^b |v(x)|^2\mathrm{d}x\right]<\infty\end{aligned} \tag{2.1.2b}$$

故对平方可积函数 $u$ 和 $v$, 内积总是存在的.

由上式定义的内积显然满足公理 (1)~(3), 因此 $L^2[a,b]$ 是一个内积空间；

(3) 最后必须证明 $L^2[a,b]$ 的完备性, 根据 Risez-Fisher 定理, 设函数序列 $[u_1(x), u_2(x), u_3(x),\cdots]$(为了简单, 以后函数序列或函数集表示成 $\{u_n(x)\}$ 的形式) 是 $L^2[a,b]$ 中的元素, 若

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\|u_n-u_m\|^2\equiv\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\int_a^b |u_n(x)-u_m(x)|^2\,\mathrm{d}x\to 0 \tag{2.1.2c}$$

则存在一平方可积函数 $u(x)$, 而序列 $\{u_n(x)\}$ 平方平均收敛于它, 即存在 $u(x)\in L^2[a,b]$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |u(x)-u_n(x)|^2\,\mathrm{d}x=0 \tag{2.1.2d}$$

综上所述, 函数空间 $L^2[a,b]$ 是完备的内积空间, 因此它是一个 Hilbert 空间, 以后将直接称这个函数空间为 Hilbert 空间. 根据内积的定义式 (2.1.2a) 可以定义函数系 $\{f_n\}$ 的正交性和归一性, 若 $f_i$ 和 $f_j$ 满足

$$(f_i, f_j) \equiv \int_a^b f_i^*(x) f_j(x) \mathrm{d}x = \delta_{ij} \tag{2.1.3a}$$

则称函数系 $\{f_n\}$ 是正交归一的函数系. 上式中, $\delta_{ij} = 1$(如果 $i = j$); $\delta_{ij} = 0$(如果 $i \neq j$). 另一种常用的正交归一性定义为上式的推广

$$(f_i, f_j) \equiv \int_a^b f_i^*(x) f_j(x) \rho(x) \mathrm{d}x = \delta_{ij} \tag{2.1.3b}$$

其中权函数 $\rho(x) > 0$, 这时称 $\{f_n\}$ 是一个带权 $\rho(x)$ 的正交、归一函数系.

**Schwarz 不等式**　对内积空间中的任意二个向量 $u$ 和 $v$, 下列不等式成立

$$|(u,v)|^2 \leqslant (u,u)(v,v) \tag{2.1.4a}$$

对函数空间 $L^2[a,b]$, 内积由方程 (2.1.2a) 定义, Schwarz 积分不等式为

$$\left| \int_a^b u^*(x) v(x) \mathrm{d}x \right|^2 \leqslant \int_a^b |u(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_a^b |v(x)|^2 \mathrm{d}x \tag{2.1.4b}$$

注意: 另一个常用的积分不等式是

$$\int_a^b u(x) v(x) \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2} \left[ \int_a^b u^2(x) \mathrm{d}x + \int_a^b v^2(x) \mathrm{d}x \right] \tag{2.1.4c}$$

其中 $u$ 和 $v$ 为实值函数, 注意二个积分不等式的区别.

**度量空间**　函数空间 $L^2[a,b]$ 也是一个度量空间. 所谓度量空间是指: 对空间中的任意二个元素 $u$ 和 $v$, 存在一个实数 $d(u,v)$ 满足

(1) **正定**, $d(u,v) \geqslant 0$, 当且仅当 $u = v$ 时等号成立;

(2) **对称**, $d(u,v) = d(v,u)$;

(3) **满足三角不等式**, $d(u,v) \leqslant d(u,w) + (v,w)$.

实数 $d(u,v)$ 称为**度量函数**或者**距离函数**. 注意: 度量空间不要求一定是向量空间, 因为定义中用不到二个元素 $u$ 和 $v$ 的加法和数乘. 函数空间 $L^2[a,b]$ 的距离 $d(u,v)$ 可以定义为均方根

$$d(u,v) = \sqrt{\int_a^b |u(x) - v(x)|^2 \mathrm{d}x} \tag{2.1.5a}$$

或者与式 (2.1.3b) 类似, 推广为

$$d(u,v)=\sqrt{\int_a^b |u(x)-v(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x} \tag{2.1.5b}$$

其中权函数 $\rho(x)>0$. 显然 $d(u,v)$ 满足 $d(u,v)\geqslant 0$ 和 $d(u,v)=d(v,u)$. 由 Schwarz 积分不等式 (2.1.4b), 不难证明 $d(u,v)\leqslant d(u,w)+d(v,w)$ 也成立. 事实上, 因为

$$|u-v|^2=|(u-w)+(w-v)|^2=|u-w|^2+|w-v|^2+2\mathrm{Re}[(u-w)^*(w-v)]$$

上式二边积分

$$\begin{aligned}d^2(u,v)&=d^2(u,w)+d^2(v,w)+2\mathrm{Re}\int_a^b (u-w)^*(w-v)\mathrm{d}x\\&\leqslant d^2(u,w)+d^2(v,w)+2d(u,w)\cdot d(v,w)\\&\leqslant [d(u,w)+d(v,w)]^2\end{aligned}$$

故 $d(u,v)\leqslant d(u,w)+d(v,w)$. 因此, $d(u,v)$ 可作为函数空间 $L^2[a,b]$ 的一个度量. 当 $d(u,v)=0$ 时, 意味着: 在平方平均的意义下, $u(x)=v(x)$, 但不排除个别测度为零的点 (有限个点, 对积分的贡献为零) 上, $u(x)$ 并不等于 $v(x)$. 函数空间 $L^2[a,b]$ 上的距离函数选择不是唯一的, 例如取绝对值平均

$$d'(u,v)=\int_a^b |u(x)-v(x)|\mathrm{d}x \tag{2.1.5c}$$

此时, 当 $d(u,v)=0$ 时, 意味着 $u(x)$ 与 $v(x)$ 逐点相等, 即 $u(x)=v(x)$.

**赋范空间** 所谓赋范空间就是指, 对向量空间中的任意一个向量 $u$, 存在一个实数 $||u||$ 满足

(1) **正定**, $||u||\geqslant 0$, 当且仅当 $u=0$ 时等号成立;

(2) **伸缩性**, $||au||=|a|\cdot||u||$;

(3) **满足不等式**, $||u+v||\leqslant||u||+||v||$.

实数 $||u||$ 称为向量 $u$ 的**范数**或者**模**. 注意: 赋范空间一定是向量空间, 因为定义中用到二个元素 $u$ 和 $v$ 的加法和数乘. 对函数空间 $L^2[a,b]$, 向量 $u$ 的范数可以定义为

$$||u||=\sqrt{\int_a^b |u(x)|^2\mathrm{d}x} \tag{2.1.5d}$$

显然, 向量 $u$ 的范数与距离函数 $d(u,v)$ 的关系为 $||u||=d(u,0)$. 当 $||u||=0$ 时, 意味着: 在平方平均的意义下, $u(x)=0$. 同样, 与距离函数类似, 向量 $u$ 的范数选择也不是唯一, 也可取 $||u||=d'(u,0)$.

函数空间 $L^2[a,b]$ 中的任意一个向量 $u$ 总可以用它的模来归一化, 即定义新的向量 $u'=u/||u||$, 显然 $||u'||=1$.

顺便指出, 对定义在 $N$ 维空间的区域 $G$ 上的平方可积函数 $u(\boldsymbol{r})$ 和 $v(\boldsymbol{r})\in L^2(G)$, 内积、距离和范数的定义与以上诸式类似, 只要把积分改成区域 $G$ 上的 $N$ 重体积分就可

$$\begin{aligned}(u,v)&=\int_G u^*(\boldsymbol{r})v(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^N\boldsymbol{r}\\ d(u,v)&=\sqrt{\int_G |u(\boldsymbol{r})-v(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}^N\boldsymbol{r}}\\ ||u||&=\sqrt{\int_G |u(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}^N\boldsymbol{r}}\end{aligned}\tag{2.1.6a}$$

在以上的讨论中, 以一维空间为例, 仅仅是为了表示方便.

总之, 函数空间 $L^2[a,b]$ 不仅是一个 Hilbert 空间, 还是一个度量空间和赋范空间. 定义了内积、范数和距离函数后, 就可以分别讨论二个平方可积函数的 “夹角”(即正交性)、和 “远近” 以及函数本身的 “大小”. 这里的 “夹角”、“远近” 和 “大小” 是与三维矢量运算中的直观几何概念类比而来的. 对二个三维矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 内积就是它们的点乘 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 由点乘 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 就可以求二个矢量的夹角, 分析二个矢量是否正交; 三维矢量由空间的一点表示, 二个矢量的距离就是二个点的距离 $d=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 当距离为零, 二个矢量相等; 一个矢量的大小由矢量的长度 $||\boldsymbol{a}||=|\boldsymbol{a}|$ 来表征.

我们知道, 任意一个三维矢量都可以用一组基矢量 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$(注意: 这样的基有无限多) 上的分量来表示, 例如矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 可表示成 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3\equiv(a_1,a_2,a_3)$ 和 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3\equiv(b_1,b_2,b_3)$, 基矢量的特征是正交和归一, 即 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$. 矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 用基矢量上的三个分量表示后, 内积 (点乘)、距离和长度就很容易分别写出为

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\\ &d=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}\\ &||\boldsymbol{a}||=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\end{aligned}\tag{2.1.6b}$$

我们的问题是: $L^2[a,b]$ 中的任意一个函数也能否用一组基 (称为**基函数**) 来表示呢? 什么样的函数起到基函数的作用? 一组基需要有多少个函数? 在三维矢量表示中, 一组基 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 有三个矢量. 类似地, 对函数空间, 如果一组基有 $N$ 个函数, 则称这个函数空间是 $N$ 维的. 事实上, 2.1.2 小节将表明, 对函数空间 $L^2[a,b]$, 一组基一般有无限多个函数 $(N\to\infty)$, 因此, 我们说 $L^2[a,b]$ 是无限维的.

### 2.1.2　完备的正交归一函数集

假如我们有一组 Hilbert 空间中的正交、归一函数集 $\{f_n\}$, 问题是: $\{f_n\}$ 能否作为 Hilbert 空间中的基函数呢? 亦即 Hilbert 空间中的任一元素 $f(x)$ 能否表示成 $\{f_n\}$ 的线性组合

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x) \tag{2.1.7a}$$

且上式右边的无穷级数在 $[a,b]$ 中每一点 $x$ 上收敛于 $f(x)$, 称这种收敛为逐点收敛. 如果方程 (2.1.7a) 成立, 称正交归一函数集 $\{f_n\}$ 是完备的正交归一函数集, 且当方程 (2.1.7a) 右边一致收敛于 $f(x)$ 时, 称 $c_i$ 为**广义 Fourier 系数**, 或展开系数. 这时 $c_i$ 很容易求得, 事实上, 只要方程 (2.1.7a) 二边用 $f_j(x)$ 求内积, 且注意到一致收敛性, 积分与求和交换次序, 可以得到

$$(f_j,f)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i(f_j,f_i)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\delta_{ji}=c_j \tag{2.1.7b}$$

但是要求方程 (2.1.7a) 右边一致收敛于 $f(x)$ 过于苛刻了. 有可能找不到满足上述完备性要求的正交归一集, 因为方程 (2.1.7a) 必须对 $L^2[a,b]$ 中所有 $f(x)$ 都成立, 这一点可以从 Fourier 级数展开理论中得到简单的说明, 定义三种收敛性的概念, 即**逐点收敛**、**一致收敛**和**平方平均收敛**(简称为**均方收敛**). 假如 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期函数, 则可以得到下列定理:

(1) 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段光滑, 则有**逐点收敛定理**

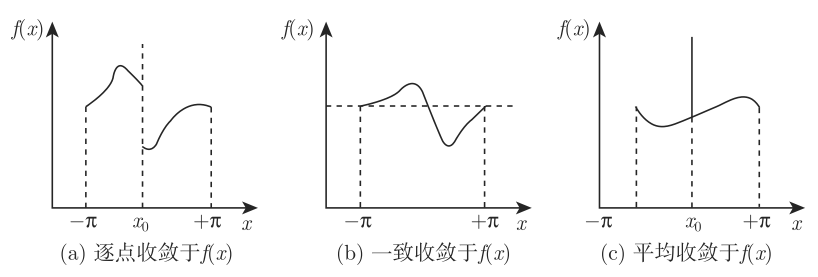
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] \tag{2.1.8a}$$

上式对具有第一类间断点的 $f(x)$ 意义很明显, 如图 2.1.1(a);

(2) 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, $f'(x)$ 分段连续并且 $f(-\pi)=f(\pi)$, 则有**一致收敛定理**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=f(x) \tag{2.1.8b}$$

显然, 要求左式一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 连第一类间断点都不允许, 如图 2.1.1(b);



(a) 逐点收敛于f(x)　(b) 一致收敛于f(x)　(c) 平均收敛于f(x)

图 2.1.1　三种不同的收敛特性

(3) 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段连续, 则均方收敛定义为

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\sum_{n=-N}^{N}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}|^2\mathrm{d}x=0 \tag{2.1.8c}$$

在均方收敛意义下, 不排除 $f(x)$ 在个别点存在 “脉冲” 型的有限值 (测度为零, 对积分的贡献为零, 当 “脉冲” 值无限大时, 将在 3.1 节讨论), 如图 2.1.1(c). 因此, 均方收敛对 $f(x)$ 的要求较低, 这样的函数也更符合物理信号, 例如, 电信号中常常含有这样的电脉冲. 以上三式中展开系数为

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \tag{2.1.8d}$$

**均方收敛**　由此重新定义 $L^2[a,b]$ 中正交归一集的完备性: 如果对任一 $f(x)\in L^2[a,b]$ 都可有正交归一函数集在均方收敛的意义上逼近

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f(x)-\sum_{i=1}^{n}a_if_i|^2\mathrm{d}x=0 \tag{2.1.9a}$$

则称 $\{f_n\}$ 是定义在 $L^2[a,b]$ 上的**完备函数集**. 下面求均方收敛意义下的展开系数 $a_i$: 记非负量 $M_n$

$$M_n=\int_a^b|f(x)-\sum_{i=1}^{n}a_if_i|^2\mathrm{d}x\geqslant 0 \tag{2.1.9b}$$

其中 $\{f_n\}$ 是一个正交归一系, 且 $f\in L^2[a,b]$. 我们要求 $a_i$ 使 $M_n$ 极小

$$\begin{aligned}M_n&=\int_a^b\left[f\cdot f^*-\sum_{i=1}^{n}(a_if^*\cdot f_i+a_i^*f\cdot f_i^*)+\sum_{i,j=1}^{n}a_i^*a_jf_i^*\cdot f_j\right]\mathrm{d}x\\&=(f,f)-\sum_{i=1}^{n}(a_ic_i^*+a_i^*c_i)+\sum_{i,j=1}^{n}a_i^*a_j\delta_{ij}\end{aligned} \tag{2.1.9c}$$

其中 $c_i\equiv(f_i,f)$, 上式加上和减去 $\sum c_i^*c_i$, 则有

$$M_n=(f,f)+\sum_{i=1}^{n}|a_i-c_i|^2-\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\geqslant 0 \tag{2.1.9d}$$

显然 $M_n$ 极小的条件是

$$a_i=c_i=\int_a^b f(x)f_i^*(x)\mathrm{d}x,\ (i=1,2,3,\cdots) \tag{2.1.10a}$$

这时有关系

$$M_n=\int_a^b|f(x)-\sum_{i=1}^{n}a_if_i(x)|^2\mathrm{d}x=(f,f)-\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\geqslant 0 \tag{2.1.10b}$$

亦即

$$(f,f) \geqslant \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \tag{2.1.10c}$$

上式称 **Bessel 不等式**. 当 $\{f_n\}$ 是完备系时, 根据式 (2,1.8d), $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$, 因此有

$$\int_a^b |f|^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \tag{2.1.10d}$$

上式称为 **Parseval 等式**或**完备关系式**. 因此, 在均方收敛意义下有展开关系

$$f(x) \cong \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x);\ a_i = \int_a^b f(x)\cdot f_i^*(x)\mathrm{d}x \tag{2.1.11a}$$

当第一式右边一致收敛时等号成立. 下面作几点说明:

(1) 对带权 $\rho(x) > 0$ 正交、归一的完备集, 均方收敛定义为

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f - \sum_{i=1}^{n} a_i f_i|^2 \rho(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{2.1.11b}$$

(2) 完备关系式 (2.1.10d) 可用另一关系式表示, 由方程 (2.1.11a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^b f(x') f_i^*(x')\mathrm{d}x'\right] f_i(x) \\ &= \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{\infty} f_i^*(x') f_i(x)\right] f(x')\mathrm{d}x' \end{aligned} \tag{2.1.11c}$$

成立条件为

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^*(x') f_i(x) = \delta(x' - x) \tag{2.1.11d}$$

称作**封闭关系式**(或者也称为**完备关系**). 有关右边的 Dirac Delta 函数的详细讨论见 3.1 节讨论.

上述我们假定已存在一个正交、归一的完备函数系, 接着的问题是在任何区间 $[a,b]$ 上是否确定存在一个完备的正交归一集? 如果存在, 如何找到它的表达式? 著名的 Weierstrass 定理告诉我们, 可以建立 $x$ 的幂次多项式序列, 使它一致收敛于有限闭区间 $[a,b]$ 上连续的任意函数, 由此我们可以解决刚才提出的问题.

**Weierstrass 定理** 若 $\psi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上**连续**, 则存在一个多项式序列 $P_n(x)$, 在 $[a,b]$ 上一致地

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \psi(x) \tag{2.1.12a}$$

Weierstrass 定理表明, 幂次函数系 $\{x^n\}$ 构成 $[a,b]$ 上连续函数类 (即 $C[a,b]$ 函数), 在一致收敛意义下的完备系. 但是 $L^2[a,b]$ 中的函数只要求在 $[a,b]$ 上平方可积, 不一定连续. 因此, 在一致收敛的意义上 $\{x^n\}$ 并不构成 $L^2[a,b]$ 上的完备系. 但我们来说明, 在均方收敛意义下, $\{x^n\}$ 构成 $L^2[a,b]$ 中的完备系.

首先指出 (证明略)$L^2[a,b]$ 中任一函数 $f(x)$, 可用连续函数以任意精度均方逼近, 即给定任意小 $\varepsilon$ 总存在 $\psi \in C[a,b]$

$$\int_a^b |f(x)-\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x < \varepsilon \tag{2.1.12b}$$

又 $f-P_n=(f-\psi)+(\psi-P_n)$, 因此

$$\begin{aligned}\int_a^b |f-P_n|^2\,\mathrm{d}x &= \int_a^b |(f-\psi)+(\psi-P_n)|^2\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b |f-\psi|^2\,\mathrm{d}x + \int_a^b |\psi-P_n|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.1.12c}$$

由 Weierstrass 定理, 上式第二项可任意小, 于是, 由式 (2.1.12b) 得到

$$\int_a^b |f-P_n|^2\,\mathrm{d}x < \varepsilon \tag{2.1.12d}$$

亦即 $L^2[a,b]$ 上任意函数 $f(x)$ 总可以用多项式序列 $P_n(x)$ 来平均逼近. 因此, 在均方收敛意义下 $\{x^n\}$ 构成 $L^2[a,b]$ 的完备系 (但不正交和归一).

我们不详细证明 Weierstrass 定理, 仅给一粗略的说明. 首先定义函数序列

$$\delta_n(x)=\begin{cases} C_n(1-x^2)^n, & 0\leqslant |x|\leqslant 1 \\ 0, & |x|>1\end{cases} \tag{2.1.13a}$$

其中 $C_n$ 由归一化条件决定

$$\int_{-1}^{+1} \delta_n(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{2.1.13b}$$

可以证明当 $n\to\infty$ 时 $C_n \sim n$. 事实上, 令积分 (注意：为了保证 $\delta_n(x)$ 收敛到 $\delta(x)$, 对 $\delta_n(x)$ 的归一化由上式定义)

$$I(n)=\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x \tag{2.1.14a}$$

通过分部积分, 可得到递推关系

$$\begin{aligned} I(n) &= x(1-x^2)^n\Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}(-2x)n(1-x^2)^{n-1}x\mathrm{d}x \\ &= -2n\int_{-1}^{+1}(1-x^2-1)(1-x^2)^{n-1}x\mathrm{d}x \\ &= -2n[I(n)-I(n-1)]\end{aligned} \tag{2.1.14b}$$

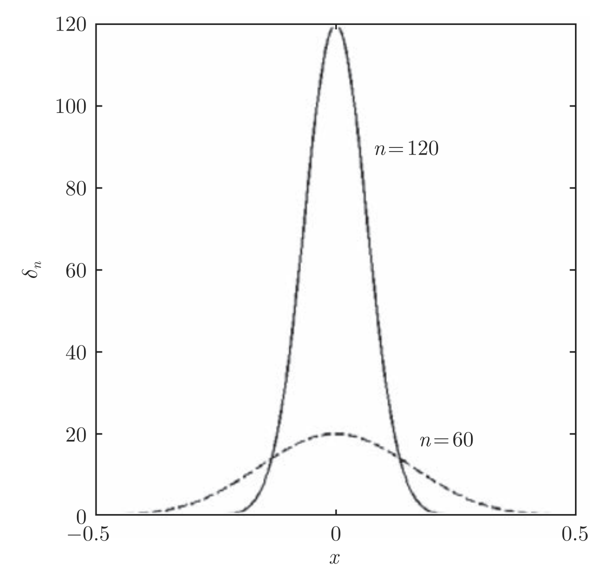



图 2.1.2 不同 $n$ 的函数形状

因此

$$I(n)=\frac{2n}{2n+1}I(n-1) \tag{2.1.14c}$$

当 $n$=0 时, $I(0)=2$, 故由递推关系得到

$$I(n)=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2(n-1)+1}\cdots 2=\frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots}=\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

当 $n$ 很大时, 利用 Stirling 公式 $\ln n!\approx n\ln n-n$, 可得到

$$\ln I(n)\approx\ln(2n)!-\ln(2n+1)! \tag{2.1.14d}$$

即

$$I(n)\approx\frac{(2n)!}{(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}\sim\frac{1}{n} \tag{2.1.14e}$$

函数 $\delta_n(x)$ 随 $n$ 变化的形式如图 2.1.2. 因此可望当 $n\to\infty$ 时, $\delta_n(x)$ 具有 $\delta(x)$(见 3.1 节讨论) 函数特性, 事实上可证明

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\delta_n(x) \tag{2.1.15}$$

不失一般性假定 $[a,b]$ 为 $[0,1]$, 这总可通过变换 $z=(x-a)/(b-a)$ 来实现. 设

$$P_n(x)=\int_{-1}^{+1}f(x+t)\delta_n(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[0,1] \tag{2.1.16a}$$

显然, 由 $\delta_n(x)$ 的 $\delta$ 函数特性

$$\lim_{n\to\infty} P_n = f(x) \tag{2.1.16b}$$

另一方面, 对式 (2.1.16a) 右边作积分变换 $t \to t + x$ 则

$$P_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\delta_n(t-x)\mathrm{d}t \tag{2.1.16c}$$

因 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上, 当 $x$ 位于区域 $[0,1]$ 以外可以定义 $f(x) \equiv 0$, 故上式为

$$P_n(x) = \int_0^1 f(t)\delta_n(t-x)\mathrm{d}t = C_n \int_0^1 f(t)[1-(t-x)^2]^n \mathrm{d}t \tag{2.1.16d}$$

显然, $P_n(x)$ 是 $x$ 的多项式, 因此, $f(x)$ 确可用多项式序列 $P_n(x)$ 来平均逼近. 严格的证明则要求 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 这时 $P_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

最后, 指出 Weierstrass 定理可推广到多变量函数: 若函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对于在 $[a_i, b_i](i = 1, 2, \cdots, n)$ 中每一个变量 $x_i$ 均连续, 则 $f$ 可用幂次函数来逼近

$$\begin{aligned} P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = &\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(t_1, t_2, \cdots, t_n)\delta_n(t_1 - x_1) \\ &\cdot \delta_n(t_2 - x_2) \cdots \delta_n(t_n - x_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_n \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

利用上述结果, 容易证明三角函数集

$$T_n(x) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\mathrm{i}nx),\ n = 0, \pm 1, \cdots \right\} \tag{2.1.18a}$$

是完备的正交归一集. 正交性和归一性是显然的, 至于完备性可由二维 Weierstrass 定理推出: 有限区间内连续函数 $g(x, y)$ 可用函数序列 $g_N(x, y)$

$$g_N(x, y) = \sum_{n,m=0}^{N} a_{nm}(N) x^n y^m \tag{2.1.18b}$$

来一致逼近, 即对 $x$ 和 $y$ 一致地

$$\lim_{N\to\infty} g_N(x, y) = g(x, y) \tag{2.1.18c}$$

注意: $a_{nm}(N)$ 是 $N$ 的函数, 故式 (2.1.18b) 不是 Taylor 级数展开. 作坐标变换

$$x = \rho\cos\vartheta;\ y = \rho\sin\vartheta \tag{2.1.19a}$$

从式 (2.1.18b) 得

$$g(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n,m=0}^{N} a_{nm}(N)\rho^{n+m}\cos^n\vartheta\sin^m\vartheta \tag{2.1.19b}$$

如果把 $(x,y)$ 的定义域限定在单位圆上, 令 $\rho=1$, $\psi(\vartheta)\equiv g(\cos\vartheta,\sin\vartheta)$

$$\psi(\vartheta)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n,m=0}^{N}a_{nm}(N)\cos^n\vartheta\sin^m\vartheta \tag{2.1.19c}$$

显然, 上式要求 $\psi(\vartheta)$ 只能是周期为 $2\pi$ 的周期函数. 利用 Euler 公式

$$\cos\vartheta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta});\quad \sin\vartheta=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}) \tag{2.1.19d}$$

代入式 (2.1.19c) 式

$$\psi(\vartheta)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n,m=0}^{N}a_{nm}(N)\frac{1}{2^{n+m}\mathrm{i}^m}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta})^n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta})^m \tag{2.1.19e}$$

上式求和指数可合并, 改写成

$$\psi(\vartheta)=\lim_{M\to\infty}\psi_M(\vartheta)\equiv\lim_{M\to\infty}\sum_{n=-M}^{M}\frac{c_n^M}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\vartheta} \tag{2.1.19f}$$

上式表明, 任意连续函数 $\psi(\vartheta)$, 只要满足

$$\psi(\vartheta)=\psi(\vartheta+2\pi) \tag{2.1.19g}$$

则总可用三角函数系来一致逼近. 对 $L^2[a,b]$ 中平方可积函数 $f(x)$, 设定义在闭区间 $[a,a+2\pi]$, 但不一定满足 $f(a)=f(a+2\pi)$, 由前面的讨论知, 总存在连续函数 $\psi(x)$ 满足 $\psi(a)=\psi(a+2\pi)$ 并且

$$\int_a^{a+2\pi}|f(x)-\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon \tag{2.1.20a}$$

因此, 在 $[a,a+2\pi]$ 上一致收敛于 $\psi(x)$ 的序列 $\psi_n(x)$ 平均收敛于 $f(x)$, 于是三角函数系是 $L^2[0,2\pi]$ 上完备的正交归一集, 在平均逼近意义下存在 Fourier 级数展开

$$f(x)\cong\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \tag{2.1.20b}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \tag{2.1.20c}$$

### 2.1.3 有限区间上的完备系: Legendre 和 Chebyshev 多项式

根据 Weierstrass 定理 $\{x^n\}$ 构成 $L^2[a,b]$ 上的一个完备系. 下面我们考虑在区间 $[-1,1]$ 上的完备正交归一多项式集, 对区间为 $[a,b]$ 的一般情况, 只要通过适当的变换即可化成区间 $[-1,1]$. 用 Gram−Schmidt 正交化方法来构成正交归一系, 记正交归一集中第 $n$ 个元素为 $p_n$, 且 $p_n$ 是多项式, 取 $p_0$ 为常数,$p_0=1/\sqrt{2}$(满足归一化条件). 根据 Gram-Schmidt 法取

$$p_1(x)=\frac{1}{||p_1||}[x-a_0p_0(x)] \tag{2.1.21a}$$

其中 $a_0$ 有正交性决定

$$\int_{-1}^{1}p_1(x)\cdot p_0(x)\mathrm{d}x=0;\quad a_0=\int_{-1}^{1}xp_0(x)\mathrm{d}x=0 \tag{2.1.21b}$$

故 $p_1(x)=\sqrt{3/2}x$, 同理取

$$p_2(x)=\frac{1}{||p_2||}[x^2-a_0p_0(x)-a_1p_1(x)] \tag{2.1.22a}$$

从正交化条件

$$\int_{-1}^{1}p_0(x)\cdot p_2(x)\mathrm{d}x=0;\ \int_{-1}^{1}p_1(x)\cdot p_2(x)\mathrm{d}x=0 \tag{2.1.22b}$$

求 $a_0$ 和 $a_1$, 得到

$$p_2(x)=\sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1) \tag{2.1.22c}$$

一般, 如果求得前 $m$ 个 $p_0,p_1,p_2,\cdots,p_m$, 则可令

$$p_{m+1}=\frac{1}{||p_{m+1}||}[x^{m+1}-(a_0p_0+a_1p_1+\cdots+a_mp_m)] \tag{2.1.23a}$$

由正交化条件

$$\int_{-1}^{1}p_{m+1}(x)\cdot p_i(x)\mathrm{d}x=0,(i=0,1,2,\cdots,m) \tag{2.1.23b}$$

可求得

$$a_i=\int_{-1}^{1}x^{m+1}p_i(x)\mathrm{d}x \tag{2.1.23c}$$

最后可以求得 $[-1,1]$ 上完备的正交归一多项式集, 但用 Gram-Schmidt 正交化方法来很难得到 $p_n$ 的统一表达式, 以后 (见 2.3.4 小节) 将证明

$$p_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x),(n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{2.1.24a}$$

其中 $P_n$ 称为 **Legendre 多项式**, 可有 Rodrigue 公式计算

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^n \tag{2.1.24b}$$

或者展开形式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} \tag{2.1.24c}$$

其中 $[n/2]$ 表示取 $n/2$ 的整数部分, 如果 $n$ 是偶数, $[n/2]=n/2$; 如果 $n$ 是奇偶数, 则 $[n/2]=(n-1)/2$. 前五个 Legendre 多项式为

$$\begin{aligned} &P_0(x)=1;\ P_1(x)=x;\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \\ &P_3(x)=\frac{1}{4}(5x^3-3x)\ ;\ P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \end{aligned} \tag{2.1.24d}$$

随 $x$ 的变化见图 2.1.3.

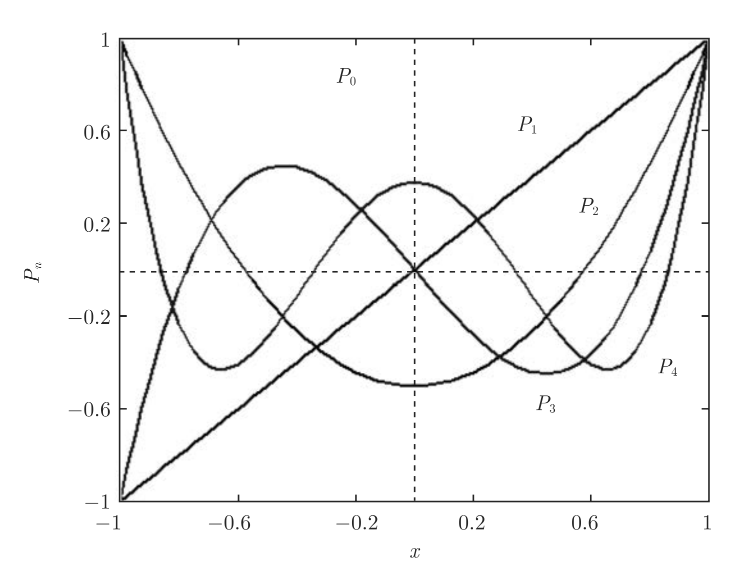



图 2.1.3　前五个 Legendre 多项式

下面证明函数系 $\{p_i(x)\}$ 确是 $[-1,1]$ 上完备的正交、归一系. 首先, 完备性有

Weierstrass 定理保证, 只要证明式 (2.1.24a) 的正交归一性即可, 为此计算

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)\mathrm{d}x=&\frac{1}{2^{n+m}n!m!}\sqrt{\frac{(2n+1)(2m+1)}{4}}\\&\times\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2^{n+m}n!m!}\sqrt{\frac{(2n+1)(2m+1)}{4}}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\Big|_{-1}^{1}\right.\\&\left.-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\cdot\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^m\mathrm{d}x\right]\end{aligned}\tag{2.1.25a}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n=(\text{一个多项式})\times(x^2-1)\tag{2.1.25b}$$

故上下限代入为零, 因此

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)\mathrm{d}x=&\frac{-1}{2^{n+m}n!m!}\sqrt{\frac{(2n+1)(2m+1)}{4}}\\&\times\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\cdot\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^m\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2^{n+m}n!m!}\sqrt{\frac{(2n+1)(2m+1)}{4}}\\&\times\int_{-1}^{1}(-1)^n(x^2-1)^n\cdot\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^m\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.1.25c}$$

当 $n\neq m$ 时, 上式微分号上 $n$ 和 $m$ 对称出现, 可设 $n>m$, 故 $m+n>2m$

$$\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^{2m}\equiv 0\tag{2.1.25d}$$

于是, 当 $m\neq n$ 时, 有

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)\cdot p_n(x)\mathrm{d}x=0,\quad (m\neq n)\tag{2.1.26a}$$

当 $n=m$ 时

$$\int_{-1}^{1}[p_n(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{(2n+1)(-1)^n}{2^{2n+1}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x\tag{2.1.26b}$$

因 $(x^2-1)^n$ 为 $2n$ 次多项式, 故

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x=(2n)!\tag{2.1.26c}$$

代入上式

$$\int_{-1}^{1}[p_n(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{(2n+1)!(-1)^n}{2^{2n+1}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x \tag{2.1.26d}$$

令 $x=\sin\vartheta$, 注意到

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x=2(-1)^n\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n+1}\vartheta\mathrm{d}\vartheta=(-1)^n\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \tag{2.1.26e}$$

故

$$\int_{-1}^{1}[p_n(x)]^2\mathrm{d}x=1 \tag{2.1.27a}$$

结合上式和式 (2.1.26a) 得正交归一性方程

$$\int_{-1}^{1}p_n(x)\cdot p_m(x)\mathrm{d}x=\delta_{nm} \tag{2.1.27b}$$

故 $\{p_n(x)\}$ 的正交、归一性得证. 因此, 任一 $f(x)\in L^2[-1,1]$, 在均方收敛意义下, 可展成 $[p_n(x),\ n=0,1,2,\cdots]$ 的广义 Fourier 级数 (也称为 Legendre-Fourier 级数展开)

$$f(x)\cong\sum_{n=0}^{\infty}c_np_n(x) \tag{2.1.28a}$$

其中

$$c_n=\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)\mathrm{d}x \tag{2.1.28b}$$

必须注意的是：当 Legendre 多项式的变量 $x$ 与球坐标的极角 $\vartheta$ 存在关系 $x=\cos\vartheta,\ \vartheta\in[0,\pi]$, 平方可积条件变成

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}|f(\cos\vartheta)|^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta \tag{2.1.28c}$$

展开式 (2.1.28a) 和 (2.1.28b) 变成

$$\begin{aligned}f(\cos\vartheta)&\cong\sum_{n=0}^{\infty}c_np_n(\cos\vartheta)\\ c_n&=\int_{0}^{\pi}f(\cos\vartheta)p_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\end{aligned} \tag{2.1.28d}$$

**例 2.1.1** 函数 $f(x)=|x|,x\in[-1,1]$ 展开成 Legendre-Fourier 级数, 即求下式的展开系数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x) \tag{2.1.29a}$$

由式 (2.1.28b)

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\left[\int_{-1}^{0}(-x)P_n(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 xP_n(x)\mathrm{d}x\right] \tag{2.1.29b}$$

即

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^1 x[P_n(-x)+P_n(x)]\mathrm{d}x \tag{2.1.29c}$$

由式 (2.1.24b), 可知 $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$, 故当 $n=2k+1$ 时, $C_{2k+1}=0$；当 $n=2k$ 时, 直接由式 (2.1.24b) 得到

$$C_{2k} = \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\int_0^1 x\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}(x^2-1)^{2k}\mathrm{d}x \tag{2.1.30a}$$

当 $k\neq 0$ 时, 上式分部积分得到

$$\begin{aligned}C_{2k} &= \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\left[x\frac{\mathrm{d}^{2k-1}(x^2-1)^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k-1}}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}}(x^2-1)^{2k}\mathrm{d}x\right]\\ &= -\frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}}(x^2-1)^{2k}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\frac{\mathrm{d}^{2k-2}(x^2-1)^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k-2}}\bigg|_0^1\end{aligned} \tag{2.1.30b}$$

注意: 式 (2.1.30b) 的第一个等式中已积出部分以 $x=\pm 1$ 为一阶零点, 且也以 $x=0$ 为零点, 故上、下限代入都为零；第三个等式中已积出部分以 $x=\pm 1$ 为二阶零点, 上限代入为零, 故只需求 $x=0$ 代入时的值, 即 $\mathrm{d}^{2k-2}(x^2-1)^{2k}/\mathrm{d}x^{2k-2}$ 的常数项, 因此只要注意 $(x^2-1)^{2k}$ 展开后的 $x^{2k-2}$ 项. 由二项式展开公式

$$(x^2-1)^{2k} = \sum_{\mu=0}^{2k}\frac{(-1)^\mu(2k)!}{(2k-\mu)!\mu!}x^{2(2k-\mu)} \tag{2.1.30c}$$

因当 $\mu=k+1$ 时, $x^{2(2k-\mu)}=x^{2k-2}$, 故取上式的 $\mu=k+1$ 项代入方程 (2.3.30b) 得到

$$\begin{aligned}C_{2k} &= \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}x^{2k-2}}\left[\frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{(k-1)!(k+1)!}x^{2k-2}\right]\\ &= (-1)^{k+1}\frac{(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}\end{aligned} \tag{2.1.31a}$$

当 $k=0$ 时, 由式 (2.1.30a) 直接得到

$$C_0 = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \tag{2.1.31b}$$

故得到 Fourier-Legendre 级数为

$$f(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}P_{2k}(x) \tag{2.1.31c}$$

**Chebyshev 多项式** 从完备系 $\{x^n\}$ 得到正交、归一的完备系 $\{p_n(x)\}$, 我们利用了正交、归一性定义式 (2.1.3a) 式. 如果引进权重因子 $\rho(x)\geqslant 0$, 由式 (2.1.3b) 的定义, 可得新的多项式集. 例如, 若取

$$\rho(x)=\frac{1}{1-x^2} \tag{2.1.32a}$$

相应的多项式集 $\{T_n(x)\}$ 构成 $L^2[-1,1]$ 上带权 $\rho(x)$ 的完备正交系, $T_n(x)$ 称为第一类 Chebyshev 多项式

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x) \tag{2.1.32b}$$

可有 Rodrigue 公式计算

$$T_n(x)=\frac{(-1)^n2^nn!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)^n\right] \tag{2.1.32c}$$

或者展开形式

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k},\ (n\geqslant 1) \tag{2.1.32d}$$

而 $T_0(x)=1$. 正交关系式为

$$(T_n,T_m)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n^*(x)T_m(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x=0,\ (n\neq m) \tag{2.1.33a}$$

若令 $x=\cos\vartheta$ 则

$$(T_n,T_m)=\int_{-\pi}^{\pi}T_m(\cos\vartheta)T_m(\cos\vartheta)\mathrm{d}\vartheta=0 \tag{2.1.33b}$$

故对 $f(x)$, 只要满足

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x<\infty \tag{2.1.33c}$$

可展成 $T_n(x)$ 的广义 Fourier 级数

$$f(x)\cong\sum_{n=0}^{\infty}c_n\bar{T}_n(x);\ c_n=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\bar{T}_n(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x \tag{2.1.33d}$$

$\bar{T}(x)$ 为完备的正交归一化系 (注意: 指带权函数的归一化)

$$\bar{T}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2T_n(x)}{\pi}, & n \neq 0 \\ \dfrac{T_0(x)}{\pi}, & n = 0 \end{cases} \tag{2.1.34a}$$

注意: 如果令 $x = \cos\vartheta$, 则平方可积条件式 (2.1.31a) 变成

$$\int_0^{\pi} |f(\cos\vartheta)|^2 \, \mathrm{d}\vartheta < \infty \tag{2.1.34b}$$

即 $f(\cos\vartheta)$ 关于 $\vartheta \in [0, \pi]$ 平方可积. Chebyshev 多项式前五个表达式为 (随 $x$ 的变化见图 2.1.4)

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1;\ T_1(x) = x \\ &T_2(x) = 2x^2 - 1;\ T_3(x) = 4x^3 - 3x \\ &T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned} \tag{2.1.34c}$$

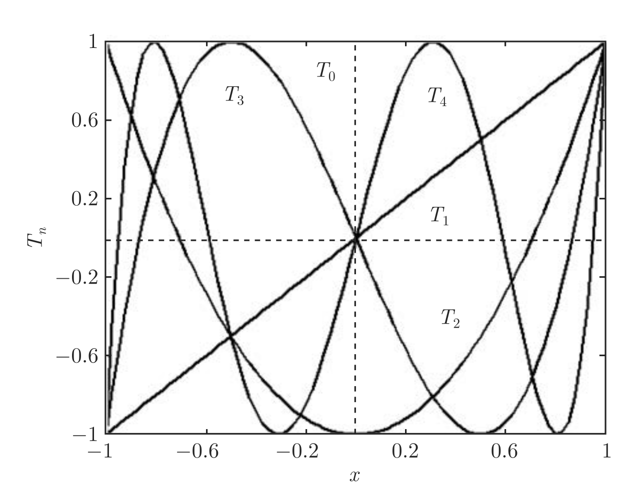



图 2.1.4 前五个 Chebyshev 多项式

### 2.1.4 单位球面上的完备系: 球谐函数

考虑三个变量的 Weierstrass 定理, 并限制在单位球面上, 可以推出完备的正交、归一的球谐函数系 $\{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\}$. 根据 Weierstrass 定理, 三元函数空间中函数系

$$\{x^t y^u z^v\},\ (t,\ u,\ v = 0,\ 1,\ 2, \cdots) \tag{2.1.35a}$$

是有限闭空间中的完备系, 作线性变换

$$z_3 = z;\ z_2 = x - \mathrm{i}y;\ z_1 = x + \mathrm{i}y \tag{2.1.35b}$$

显然, $\{z_1^t z_2^u z_3^v\}$ 也是完备系, 引进球坐标

$$z_3 = r\cos\vartheta; \quad z_2 = r\sin\vartheta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}; z_1 = r\sin\vartheta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{2.1.35c}$$

其中 $\vartheta \in [0, \pi]$,$r \in [0, \infty)$ 和 $\varphi \in [0, 2\pi]$, 由完备系 $\{z_1^t z_2^u z_3^v\}$ 可推出完备系

$$r^{t+u+v}\cos^v\vartheta \sin^{t+u}\vartheta \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-u)\varphi} \tag{2.1.35d}$$

如果把变量限定在单位球面上 $r = 1$, 则有完备系

$$\cos^v\vartheta \sin^{t+u}\vartheta \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-u)\varphi} \tag{2.1.36a}$$

引进新的变量 $m = |t-u|$, 有关系

$$\begin{aligned} t > u : m = t - u \to t + u = m + 2u \\ t < u : m = u - t \to t + u = m + 2t \end{aligned} \tag{2.1.36b}$$

即

$$t + u = m + \min\left\{\begin{array}{c} 2u \\ 2t \end{array}\right\} = m + 2k;\ t - u = \pm m \tag{2.1.36c}$$

故有

$$\sin^{t+u}\vartheta = \sin^m\vartheta \sin^{2k}\vartheta = \sin^m\vartheta(1-\cos^2\vartheta)^k \tag{2.1.36d}$$

因此, 完备系式 (2.1.36a) 可变成完备系

$$\cos^v\vartheta(1-\cos^2\vartheta)^k \sin^m\vartheta \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.1.37a}$$

归并 $\cos^v\vartheta(1-\cos^2\vartheta)^k$ 中同次幂, 可推出完备系

$$\{\cos^n\vartheta \sin^m\vartheta \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\varphi}\} \tag{2.1.37b}$$

其中 $m$ 和 $n$ 为正整数. 考察求和指标作: 由以上推导知 $\cos^n\vartheta$ 的最高次为

$$v + 2k = v + \min\left(\begin{array}{c} 2u \\ 2t \end{array}\right) = (v+t+u) - m \tag{2.1.37c}$$

令 $l = v + t + u$ 则 $n = v + 2k = l - m > 0$, 因此 $m \leqslant l$, 于是从式 (2.1.37b) 可推得完备系

$$\{\cos^{l-m}\vartheta \sin^m\vartheta \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\varphi},\ (m \leqslant l)\} \tag{2.1.37d}$$

但这个完备系并不正交、归一, 可用 Gram−Schmidt 正交化方法来求得正交、归一的完备系. 记相应的正交归一系为 $Y_{l\pm m}(\vartheta,\varphi)$, 显然 $Y_{00}(\vartheta,\varphi)=1/\sqrt{4\pi}$. 取 $l=1$, 则 $m=0$ 和 1, 令

$$\begin{aligned}Y_{10}(\vartheta,\varphi)&=a_1\cos\vartheta+a_2\\ Y_{11}(\vartheta,\varphi)&=a_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\vartheta\\ Y_{1-1}(\vartheta,\varphi)&=a_4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\vartheta\end{aligned}\tag{2.1.38a}$$

其中 $a_1$, $a_2$, $a_3$ 和 $a_4$ 由正交归一条件决定

$$\iint_{\Omega}Y_{00}Y_{1\pm m}\mathrm{d}\Omega=0;\quad \iint_{\Omega}|Y_{1\pm m}|^2\mathrm{d}\Omega=1,\quad (m=0,1)\tag{2.1.38b}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega=\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$ 为单位球面的面元. 最后, 可得前几个 $Y_{l\pm m}(\vartheta,\varphi)$ 的表达式

$$Y_{00}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{1}{4\pi}};\ Y_{11}(\vartheta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\vartheta\tag{2.1.38c}$$

$$Y_{10}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta;\ Y_{1-1}(\vartheta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\vartheta\tag{2.1.38d}$$

函数 $Y_{l\pm m}(\vartheta,\varphi)$ 称为**归一化球谐函数**. 改变表达式 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\varphi}$ $(m\leqslant l)\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$($m$ 可正可负, 但 $|m|\leqslant l$), 球谐函数可表达为

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\tag{2.1.39a}$$

其中 $|m|\leqslant l$, 而 $P_l^{|m|}(x)$ 称为**第一类连带 Legendre 函数**

$$P_l^{|m|}(x)=(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{\mathrm{d}^{|m|}P_l(x)}{\mathrm{d}x^{|m|}}\tag{2.1.39b}$$

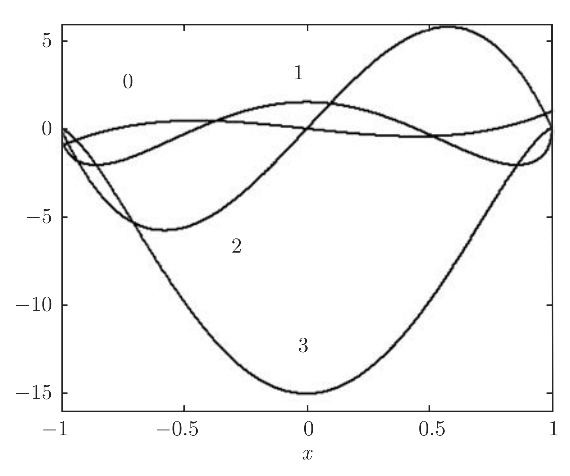



图 2.1.5 $P_3^0(x)=P_3(x)$(曲线 0): $P_3^1(x)$(曲线 1): $P_3^2(x)$(曲线 2): 和 $P_3^3(x)$(曲线 3)

常用的几个第一类连带 Legendre 函数为

$$
\begin{aligned}
&P_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}=\sin\vartheta\\
&P_2^1(x)=3x(1-x^2)^{1/2}=3\cos\vartheta\sin\vartheta\\
&P_2^2(x)=3(1-x^2)=3\sin^2\vartheta
\end{aligned}
\tag{2.1.39c}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_3^1(x)=\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}=\frac{3}{2}(5\cos^2\vartheta-1)\sin\vartheta\\
&P_3^2(x)=15x(1-x^2)=15\cos\vartheta\sin^2\vartheta\\
&P_3^3(x)=15(1-x^2)^{3/2}=15\sin^3\vartheta
\end{aligned}
\tag{2.1.39d}
$$

图 2.1.5 给出了 $P_3^0(x)=P_3(x)$, $P_3^1(x)$, $P_3^2(x)$ 和 $P_3^3(x)$ 四条曲线. 图 2.1.6 和图 2.1.7 画出了几个常用的球谐函数图像：$Y_{11}(\vartheta,\varphi)$(实部和虚部), $Y_{20}(\vartheta,\varphi)$, $Y_{21}(\vartheta,\varphi)$ 以及 $Y_{22}(\vartheta,\varphi)$(实部). 注意：$Y_{20}(\vartheta,\varphi)$ 的虚部为零, 只有实部.

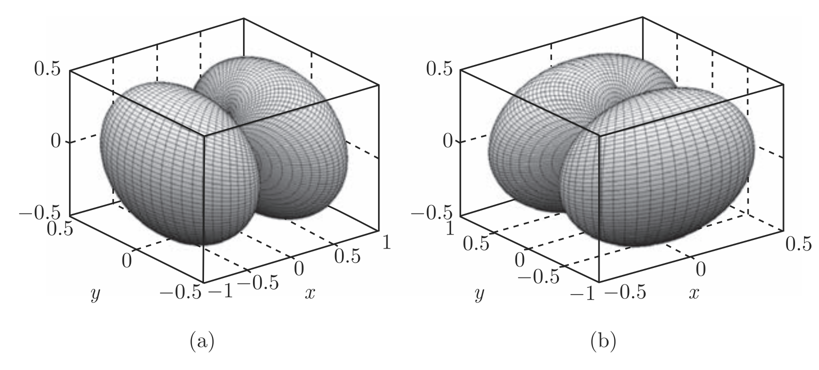



图 2.1.6 (a)Re$[Y_{11}(\vartheta,\varphi)]$; (b) Im$[Y_{11}(\vartheta,\varphi)]$

容易证明式 (2.1.39a) 确是正交归一的函数集

$$
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi=\delta_{ll'}\delta_{mm'}
\tag{2.1.40a}
$$

其中 $|m|\leqslant l$ 和 $|m'|\leqslant l'$. 因此, 球面上任一平方可积的函数 $f(\vartheta,\varphi)$

$$
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|f(\vartheta,\varphi)|^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi<\infty
\tag{2.1.40b}
$$

都可用 $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ 来作展开

$$
\begin{aligned}
&f(\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\\
&a_{lm}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)f(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
\tag{2.1.40c}
$$

特别是：(1) 当 $f(\vartheta,\varphi)$ 与 $\varphi$ 无关时, 只能取 $m=0$, 于是

$$f(\vartheta)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lP_l(\cos\vartheta) \tag{2.1.41a}$$

其中

$$a_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}f(\vartheta)P_l(\cos\vartheta)\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \tag{2.1.41b}$$

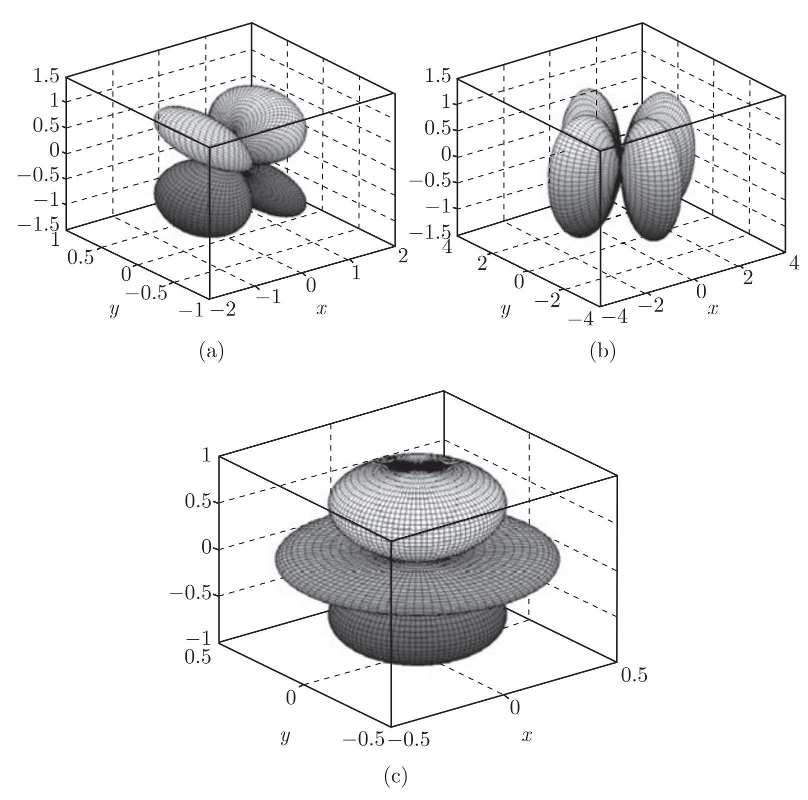



图 2.1.7　(a)Re$[Y_{21}(\vartheta,\varphi)]$; (b) Re$[Y_{22}(\vartheta,\varphi)]$: (c) $Y_{20}(\vartheta,\varphi)$

注意：上式与式 (2.1.28d) 的最大区别是, $f$ 可以是 $\vartheta$ 的任意函数 $f(\vartheta)$, 而不一定具有形式 $f(\cos\vartheta)$, 只要 $f(\vartheta)$ 带权平方可积, 即 $\int_0^{\pi}|f(\vartheta)|^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta<\infty$. 当然, 所得级数的收敛性可能不同, 但至少都是均方收敛的; (2) 如果 $f(\vartheta,\varphi)$ 具有变量分离的形式, $f(\vartheta,\varphi)=h(\vartheta)g(\varphi)$, 代入式 (2.1.40c) 可以得到

$$g(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\int_0^{2\pi}g(\varphi')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}\mathrm{d}\varphi'\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

$$h(\vartheta)=\sum_{l\geqslant|m|}^{\infty}\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}c_l^m P_l^{|m|}(\cos\vartheta) \tag{2.1.41c}$$

其中

$$c_l^m\equiv\int_0^{\pi}h(\vartheta')P_l^{|m|}(\cos\vartheta')\sin\vartheta'\mathrm{d}\vartheta' \tag{2.1.41d}$$

上式中第一式是 $g(\varphi)$ 的 Fourier 级数展开, 而第二式说明任意函数 $h(\vartheta)$ 只要带权平方可积 $\int_0^{\pi}|h(\vartheta)|^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta<\infty$, 则可用函数系 $\{P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\}$ 来展开, 就是说函数系 $\{P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\}$ 也是一个正交的完备系 (注意：对同一个 $m$, 且 $l\geqslant|m|$), 由式 (2.1.40a) 可得

$$\int_{-1}^{+1}P_l^{|m|}(\cos\vartheta)P_{l'}^{|m|}(\vartheta)\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta=\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \tag{2.1.42a}$$

**完备性关系** 从式 (2.1.11d) 得到完备性关系

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')=\frac{1}{\sin\vartheta'}\delta(\vartheta-\vartheta')\delta(\varphi-\varphi') \tag{2.1.42b}$$

除正交性关系式 (2.1.40a) 外, 球谐函数的一个有用的关系是

$$\iint_{\Omega}\tilde{\nabla}Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)\cdot\tilde{\nabla}Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi)\mathrm{d}\Omega=l(l+1)\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{2.1.42c}$$

其中 $\tilde{\nabla}$ 是定义在单位球面上的梯度算子

$$\tilde{\nabla}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.1.42d}$$

## 2.2 微分算子的本征值问题

本征值问题是分离变量法求解数学物理方程的核心, 因而也是本章的主要内容. 本节首先介绍 Hermite 对称算子 (微分算子) 和正算子的概念, 以及 Hermite 对称算子的本征值问题的基本特性. 然后介绍非 Hermite 对称算子, 特别是只有有限个离散谱的情况.

### 2.2.1 Hermite 对称算子及本征值问题

Hilbert 空间中的线性算子 $\boldsymbol{H}$(包括微分算子和积分算子, 后者在第五章讨论) 的共轭算子 $\boldsymbol{H}^+$ 定义为

$$(\boldsymbol{H}\psi_1,\psi_2)=(\psi_1,\boldsymbol{H}^+\psi_2) \tag{2.2.1a}$$

其中 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 为 Hilbert 空间中任意二个向量. 对 $L^2[a,b]$ 空间, 上式可写成

$$\int_G (\boldsymbol{H}\psi_1)^* \psi_2 \mathrm{d}\tau = \int_G \psi_1^* \boldsymbol{H}^+ \psi_2 \mathrm{d}\tau \tag{2.2.1b}$$

如果 $\boldsymbol{H}^+ = \boldsymbol{H}$ 则称 $\boldsymbol{H}$ 为**自厄算子**或者 **Hermite 对称算子**(简称为 **Hermite 算子**), 有关系式

$$\int_G (\boldsymbol{H}\psi_1)^* \psi_2 \mathrm{d}\tau = \int_G \psi_1^* \boldsymbol{H} \psi_2 \mathrm{d}\tau \tag{2.2.2a}$$

或者

$$(\boldsymbol{H}\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, \boldsymbol{H}\psi_2) \tag{2.2.2b}$$

我们首先讨论 Hermite 算子. 算子 $\boldsymbol{H}$ 的本征值问题就是求下列方程的非零解

$$\boldsymbol{H}\psi = \lambda\psi \tag{2.2.3}$$

上式称为**本征方程**. $\psi = 0$ 总是一个解, 称为**平凡解**, 而我们感兴趣的是方程 (2.2.3) 的**非平凡解**. 并不是对一切 $\lambda$, 非平凡解总存在. 一般, $\lambda$ 只能取某些特定的值 $\lambda_n$, 方程 (2.2.3) 才有相应的非零解 $\psi_n$, $\lambda_n$ 称为算子 $\boldsymbol{H}$ 的**本征值**. 与 $\lambda_n$ 相对应的非零解 $\psi_n$ 称为本征值 $\lambda_n$ 相对应的**本征函数**. 如果给定一个 $\lambda_n$, 只有一个 $\psi_n$ 与之对应, 则称 $\lambda_n$ 是**非简并的**本征值; 反之, 如果给定一个 $\lambda_n$ 有 $l$ 个线性独立的解 $\psi_n^i, (i = 1, 2, \cdots, l)$ 同时满足方程 (2.2.3) 则称 $\lambda_n$ 是 $l$ 度简并的. $\lambda_n$ 的全体 $\{\lambda_n\}$ 称为**本征谱**. 如果 $\lambda_n$ 是可数的, 称 $\{\lambda_n\}$ 为**分立谱**, 否则称为**连续谱**. 当本征谱既包含分立谱又包含连续谱, 称为**混合谱**. 注意: 本征值 $\lambda_n$ 中的指标 $n$ 可能不是 1 个, 而是代表一组, 如在二维问题中, $n$ 代表 2 个指标 (见例 2.2.1), 而三维问题中一般有 3 个.

下面我们来讨论 Hermite 算子 $\boldsymbol{H}$ 的本征值及本征函数的三个重要性质:

**性质 1** Hermite 算子 $\boldsymbol{H}$ 的本征值 $\lambda_n$ 都是实数;

**性质 2** 对应不同本征值之本征函数彼此正交;

**性质 3** 本征函数系 $\{\psi_n\}$ 构成正交的完备系, 即对 $L^2(G)$(其中 $G$ 是算子 $\boldsymbol{H}$ 的定义域) 上的任意函 $f$, 可作广义 Fourier 展开

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_n, f)\psi_n \tag{2.2.4a}$$

上式在均方平均意义下收敛, 即

$$\lim_{N\to\infty} \int_G \left| f - \sum_{n=0}^{N} (\psi_n, f)\psi_n \right|^2 \mathrm{d}\tau = 0 \tag{2.2.4b}$$

**性质 1 的证明**　设与本征值 $\lambda_n$ 与 $\lambda_m$ 相应的本征函数分别为 $\psi_n$ 和 $\psi_m$, 即有

$$\boldsymbol{H}\psi_m = \lambda_m\psi_m; \quad \boldsymbol{H}\psi_n = \lambda_n\psi_n \tag{2.2.5a}$$

首先, 我们总可以使 $\psi_m$ 和 $\psi_n$ 归一化

$$\int_G \psi_m^*\psi_m \mathrm{d}\tau = \int_G \psi_n^*\psi_n \mathrm{d}\tau = 1 \tag{2.2.5b}$$

方程 (2.2.5a) 的第一式两边取内积且利用上式

$$\lambda_m = (\psi_m, \boldsymbol{H}\psi_m) \tag{2.2.5c}$$

取复共轭, 由内积的性质且注意到 $\boldsymbol{H}$ 是 Hermite 算子

$$\lambda_m^* = (\boldsymbol{H}\psi_m, \psi_m) = (\psi_m, \boldsymbol{H}\psi_m) \tag{2.2.5d}$$

比较式 (2.2.5c) 与 (2.2.5d) 得 $\lambda_m = \lambda_m^*$, 因此 $\lambda_m$ 为实数.

**性质 2 的证明**　以 $\psi_n$ 和 $\psi_m$ 分别取方程 (2.2.5a) 的第一和二式两边的内积

$$\begin{aligned}\lambda_m(\psi_n, \psi_m) = (\psi_n, \boldsymbol{H}\psi_m)\\ \lambda_n(\psi_m, \psi_n) = (\psi_m, \boldsymbol{H}\psi_n)\end{aligned} \tag{2.2.6a}$$

第二式两边取复共轭, 并利用 $\lambda_n = \lambda_n^*$, 得到

$$\lambda_n(\psi_n, \psi_m) = (\boldsymbol{H}\psi_n, \psi_m) \tag{2.2.6b}$$

利用 $\boldsymbol{H}$ 的 Hermite 对称性, 上式减去式 (2.2.6a) 的第一式应有

$$(\lambda_n - \lambda_m)(\psi_n, \psi_m) = 0 \tag{2.2.6c}$$

因 $\lambda_n \neq \lambda_m$, 故 $(\psi_n, \psi_m) = 0$, 即 $\psi_n$ 与 $\psi_m$ 正交.

**性质 3 的证明**　将在 4.3.2 小节中给出.

注意：在混合谱情况, 特别是当离散谱只有有限个时, 离散谱对应的函数系 $\{\psi_n\}$ 一般是不完备的, 必须加上连续谱对应的函数系 $\psi(\lambda)$, 展开式 (2.2.4a) 应该修改为

$$f = \sum_{n=0}^{N} C_n\psi_n + \int B(\lambda)\psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{2.2.6d}$$

其中 $N$ 是离散谱个数, $C_n$ 和 $B(\lambda)$ 为待定的展开系数. 此时, 算子 $\boldsymbol{H}$ 一般没有了 Hermite 对称性, 见 2.2.2 小节讨论.

**正算子**　一类十分重要的算子是所谓正算子 (见 4.2.1 小节讨论), 定义如下: 如果对一切 $\boldsymbol{H}$ 作用的函数 (称为允许函数类)$\psi$ 均有

$$\frac{(\psi, \boldsymbol{H}\psi)}{||\psi||^2} > 0 \tag{2.2.7a}$$

则算子 $\boldsymbol{H}$ 称为**正算子**. 由方程 (2.2.3) 两边以 $\psi$ 取内积得到

$$\lambda = \frac{(\psi, \boldsymbol{H}\psi)}{||\psi||^2} \tag{2.2.7b}$$

因此, 正算子意味着算子 $\boldsymbol{H}$ 的本征值都大于零. 如果 $\boldsymbol{H}$ 是 Hermite 算子, 上式可写成

$$\frac{(\boldsymbol{H}\psi, \psi)}{||\psi||^2} > 0 \tag{2.2.7c}$$

注意：如果本征值都小于零, 只要令 $\boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{H}$, $-\boldsymbol{H}$ 就是正算子. 正算子的物理意义：对经典波动 (声波或电磁波), 本征值就是本征振动频率, 必须大于零；对量子力学的物质波, 在非相对论情况, Hamilton 算子的本征值对应量子能量, 必须全部大于零 (或者全部小于零)；在相对论情况, 系统能量本征值可能大于零或小于零, 从负能量向正能量的跃迁必须引进新的物理概念. 在求解热传导方程的定解问题时, 也必须保证算子是正的 (见 2.4 节).

如果本征方程定义为 ($\boldsymbol{H}$ 是区域 $G$ 上的微分算子)

$$\boldsymbol{H}\psi(\boldsymbol{r}) = \lambda\rho(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.8a}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{r}) > 0$, 则 $\psi_i$ 与 $\psi_j$ 正交意味着带权 $\rho(\boldsymbol{r})$ 正交

$$(\psi_i, \psi_j) \equiv \int_G \rho(\boldsymbol{r})\psi_i^*(\boldsymbol{r})\psi_j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = \delta_{ij} \tag{2.2.8b}$$

下面列举几个 Hermite 算子的例子.

(1) 动量算子

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x};\ \psi \in L^2(-\infty, \infty) \tag{2.2.9a}$$

显然, 利用分部积分得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}\right)^* \psi_2 \mathrm{d}x = \mathrm{i}\psi_1^*\psi_2|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x \tag{2.2.9b}$$

对平方可积函数: $\psi_1$ 和 $\psi_2 \to 0$(当 $x \to \pm\infty$), 于是有 $(\boldsymbol{H}\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, \boldsymbol{H}\psi_2)$, 故 $\boldsymbol{H}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 区间上, 对平方可积函数类是 Hermite 算子. 注意：虚数 i 的作用!

本征方程为

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}=\lambda\psi(x),\ x\in(-\infty,\infty) \tag{2.2.9c}$$

故本征函数为

$$\psi_\lambda(x)=A_\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \tag{2.2.9d}$$

$\lambda$ 可取任意值 (包括负值, 故 $\boldsymbol{H}$ 不是正算子), 因此, $\boldsymbol{H}$ 的本征值构成连续谱. 对连续谱, 归一化条件式 (2.2.5b) 已不再适用, 而必须归一化到 $\delta$ 函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\lambda\psi^*_{\lambda'}\mathrm{d}x=\delta(\lambda-\lambda') \tag{2.2.9e}$$

因此 $A_\lambda=1/\sqrt{2\pi}$. 注意: 本例中 $\boldsymbol{H}$ 的本征函数不是平方可积的.

(2) 一维动能算子

$$\boldsymbol{H}=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2},\ \psi\in L^2(0,l) \tag{2.2.10a}$$

且满足 $\psi(0)=\psi(l)=0$. 分部积分二次且注意到边界条件, 显然

$$\begin{aligned}(\psi_1,\boldsymbol{H}\psi_2)=&-\int_0^l\psi_1^*\frac{\mathrm{d}^2\psi_2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x=\left(-\psi_1^*\frac{\mathrm{d}^2\psi_2}{\mathrm{d}x^2}\right)_0^l\\&+\int_0^l\frac{\mathrm{d}\psi_1^*}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\left(\psi_2\frac{\mathrm{d}\psi_1^*}{\mathrm{d}x}-\psi_1^*\frac{\mathrm{d}^2\psi_2}{\mathrm{d}x^2}\right)_0^l\\&-\int_0^l\psi_2\frac{\mathrm{d}^2\psi_1^*}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x=(\boldsymbol{H}\psi_1,\psi_2)\end{aligned} \tag{2.2.10b}$$

因此, $\boldsymbol{H}$ 在函数类: $\psi\in L^2(0,l)$ 且 $\psi(0)=\psi(l)=0$ 中是 Hermite 算子. 本征方程为

$$-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}=\lambda\psi,\ x\in(0,l);\ \psi(0)=\psi(l)=0 \tag{2.2.11a}$$

本征函数和相应的本征值为

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right);\ \lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\ (n=1,2,\cdots) \tag{2.2.11b}$$

(3) Laplace 算子 $\boldsymbol{H}=-\nabla^2$, 函数 $\psi\in L^2(G)$ 且满足边界条件

$$\left.\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0 \tag{2.2.12a}$$

进一步要求在 $G$ 内 $\psi\in C^2$, 而在 $\partial G$ 上 $\psi\in C^1$, 由 Green 公式得到

$$\int_G(\psi_1^*\nabla^2\psi_2-\psi_2\nabla^2\psi_1^*)\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}\left(\psi_1^*\frac{\partial\psi_2}{\partial n}-\psi_2\frac{\partial\psi_1^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{2.2.12b}$$

另一方面, 由式 (2.2.12a)

$$\left(\alpha\psi_1^*+\beta\frac{\partial\psi_1^*}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0;\quad \left(\alpha\psi_2+\beta\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0 \tag{2.2.12c}$$

因 $\alpha$ 与 $\beta$ 不同时为零 (注意: 要求 $\alpha$ 与 $\beta$ 是实的), 故

$$\left(\psi_1^*\frac{\partial\psi_2}{\partial n}-\psi_2\frac{\partial\psi_1^*}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}\equiv 0 \tag{2.2.12d}$$

因此

$$(\psi_1,\boldsymbol{H}\psi_2)=-\int_G\psi_1^*\nabla^2\psi_2\mathrm{d}\tau=-\int_G\psi_2\nabla^2\psi_1^*\mathrm{d}\tau=(\boldsymbol{H}\psi_1,\psi_2) \tag{2.2.13}$$

故在边界条件式 (2.2.12a) 下, Laplace 算子 $\boldsymbol{H}=-\nabla^2$ 是 Hermite 算子.

注意: 在证明算子的 Hermite 对称性时, 仅要求方程 (2.2.12c) 中 $\alpha$ 和 $\beta$ 是实的, 而如果要求 Laplace 算子 $\boldsymbol{H}=-\nabla^2$ 是正算子, $\alpha$ 和 $\beta$ 必须同号 (见 4.2.1 小节讨论).

Laplace 算子的本征函数和本征值还有一个十分重要的性质, 即在第一或二类边界条件下, 存在关系

$$\int_G\nabla\psi_i^*\cdot\nabla\psi_j\mathrm{d}\tau=\lambda_j\delta_{ij} \tag{2.2.14}$$

其中 $(\psi_j,\lambda_j)$ 是 Laplace 算子 $\boldsymbol{H}=-\nabla^2$ 在第一或二类边界条件下的本征函数和相应的本征值. 利用矢量恒等式 $\nabla\psi_i^*\cdot\nabla\psi_j=\nabla\cdot(\psi_i^*\nabla\psi_j)-\psi_i^*\nabla^2\psi_j$ 并二边积分就可以证明式 (2.2.14).

(4) Legendre 算子

$$\boldsymbol{H}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right],\ x\in[-1,\ 1] \tag{2.2.15a}$$

是 Hermite 对称的正算子. 事实上, 利用分部积分

$$\begin{aligned}(\psi_1,\boldsymbol{H}\psi_2)&=\int_{-1}^1\psi_1^*\boldsymbol{H}\psi_2\mathrm{d}x=-\int_{-1}^1\psi_1^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^1(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}\psi_1^*}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.2.15b}$$

而

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\psi_1,\psi_2)&=\int_{-1}^1\psi_2\boldsymbol{H}\psi_1^*\mathrm{d}x=-\int_{-1}^1\psi_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\psi_1^*}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^1(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\psi_1^*}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.2.15c}$$

比较上二式右边就有 $(\boldsymbol{H}\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, \boldsymbol{H}\psi_2)$. 式 (2.2.15b) 中取 $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ 时

$$(\psi, \boldsymbol{H}\psi) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \left| \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \right|^2 \mathrm{d}x > 0 \tag{2.2.16}$$

故 $\boldsymbol{H}$ 是 Hermite 对称的正算子. 我们将在 2.3.3 小节中详细讨论 Legendre 算子.

(5) 考虑较为一般的算子

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r}),\ (\boldsymbol{r} \in G) \tag{2.2.17a}$$

其中 $p(\boldsymbol{r}) > 0, q(\boldsymbol{r}) \geqslant 0,\ \psi(\boldsymbol{r})$ 满足边界条件

$$\left.\left(\alpha\psi + \beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0 \tag{2.2.17b}$$

且 $\alpha/\beta \geqslant 0$ 或 $\beta/\alpha \geqslant 0$. 可以证明 $\boldsymbol{H}$ 满足 Green 公式

$$\int_G (\psi_1^* \boldsymbol{H}\psi_2 - \psi_2 \boldsymbol{H}\psi_1^*)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}) \left(\psi_2 \frac{\partial\psi_1^*}{\partial n} - \psi_1^* \frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right) \mathrm{d}S \tag{2.2.18a}$$

事实上, 由矢量恒等式

$$\psi_1^* \nabla \cdot (p\nabla\psi_2) = \nabla \cdot (p\psi_1^* \nabla\psi_2) - p(\nabla\psi_1^*) \cdot (\nabla\psi_2) \tag{2.2.18b}$$

交换 $\psi_1^*$ 与 $\psi_2$ 的位置可得类似的公式, 两式相减

$$\psi_1^* \nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla\psi_2] - \psi_2 \nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla\psi_1^*] = \nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})(\psi_1^*\nabla\psi_2 - \psi_2\nabla\psi_1^*)]$$

上式二边在 $G$ 上积分, 并利用 Gauss 公式, 最后得到

$$\begin{aligned} \int_G (\psi_1^* \boldsymbol{H}\psi_2 - \psi_2 \boldsymbol{H}\psi_1^*)\mathrm{d}\tau &= -\int_G \nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})(\psi_1^*\nabla\psi_2 - \psi_2\nabla\psi_1^*)]\mathrm{d}\tau \\ &= -\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r})(\psi_1^*\nabla\psi_2 - \psi_2\nabla\psi_1^*) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\ &= \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}) \left(\psi_2 \frac{\partial\psi_1^*}{\partial n} - \psi_1^* \frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right) \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{2.2.18c}$$

故式 (2.2.18a) 得证. 利用边界条件式 (2.2.17b), 假定 $\alpha$ 和 $\beta$ 是实的, 即得 $(\psi_1, \boldsymbol{H}\psi_2) = (\boldsymbol{H}\psi_1, \psi_2)$, 因此, $\boldsymbol{H}$ 是 Hermite 算子.

注意：由以上诸例可见, 微分算子的 Hermite 对称性与边界条件密切相关.

**本征函数和本征值的意义**　设任意函数 $f(\boldsymbol{r}) \in L^2(G)$ 的广义 Fourier 展开为

$$f(\boldsymbol{r}) \cong \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j(\boldsymbol{r});\ a_j = (\psi_j, f) \tag{2.2.19a}$$

其中 $\{\psi_i(\boldsymbol{r})\}$ 是 Hermite 算子 $\boldsymbol{H}$ 的本征函数系, 相应的本征值为 $\{\lambda_i\}$, 用算子 $\boldsymbol{H}$ 作用到函数 $f(\boldsymbol{r})$ 一次后得到新的函数

$$\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{r}) \cong \sum_{j=1}^{\infty} a_j \boldsymbol{H}\psi_j(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j \psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.19b}$$

作用 $N$ 次后新函数为

$$\boldsymbol{H}^N f(\boldsymbol{r}) \cong \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^N \psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.19c}$$

可见, 算子 $\boldsymbol{H}$ 的作用相当于基函数方向的 “扩张” 或 “收缩”! 然后叠加形成新的矢量! “扩张” 或 “收缩” 系数由本征值决定. 另一方面, 算子 $\boldsymbol{H}$ 一般包含复杂的微分运算或积分运算, 用算子 $\boldsymbol{H}$ 自身的本征函数系展开后, 微分运算或积分运算变成简单的代数运算.

**矩阵表示** 由式 (2.2.19a), 用 Hermite 算子 $\boldsymbol{H}$ 的本征函数系 $\{\psi_i(\boldsymbol{r}), \lambda_i\}$ 展开后, 任意函数 $f(\boldsymbol{r}) \in L^2(G)$ 可唯一表示成列矩阵的形式 $\boldsymbol{a} \equiv [a_1, a_2, \cdots]^T$, 物理上称为 $\boldsymbol{H}$ 表象. 我们的问题是: 如果存在另外一个定义在 $L^2(G)$ 上的 Hermite 算子 $\boldsymbol{O}$, 在 $\boldsymbol{H}$ 表象中应该如何表示呢? 即如何作用到 $\boldsymbol{a}$ 上? 设 Hermite 算子 $\boldsymbol{O}$ 作用到 $f(\boldsymbol{r}) \in L^2(G)$ 后形成 $\tilde{f}(\boldsymbol{r}) \in L^2(G)$: $\tilde{f}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{O}f(\boldsymbol{r})$. 另一方面, $\tilde{f}(\boldsymbol{r})$ 也用算子 $\boldsymbol{H}$ 的本征函数系 $\{\psi_i(\boldsymbol{r}), \lambda_i\}$ 展开

$$\tilde{f}(\boldsymbol{r}) \cong \sum_{j=1}^{\infty} b_j \psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.20a}$$

于是由式 (2.2.19a)

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j \psi_j(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \boldsymbol{O}\psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.20b}$$

上式二边取内积得到

$$\begin{gathered} b_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_G \psi_i^*(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{O}\psi_j(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\tau \equiv \sum_{j=1}^{\infty} O_{ij} a_j \\ O_{ij} \equiv \int_G \psi_i^*(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{O}\psi_j(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\tau \equiv (\psi_i, \boldsymbol{O}\psi_j) \end{gathered} \tag{2.2.20c}$$

即在基函数 $\{\psi_i(\boldsymbol{r})\}$ 下, 算子 $\boldsymbol{O}$ 作用到 $f(\boldsymbol{r}) \in L^2(G)$ 相当于矩阵相乘

$$\boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{O}} a \tag{2.2.20d}$$

其中矩阵 $\hat{\boldsymbol{O}}$ 的元为 $O_{ij}$. 设算子 $\boldsymbol{O}$ 的本征方程为

$$\boldsymbol{O}\phi(\boldsymbol{r}) = \lambda \phi(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.21a}$$

本征函数 $\phi(\boldsymbol{r})$ 用 $\{\psi_i(\boldsymbol{r})\}$ 展开

$$\phi(\boldsymbol{r}) \cong \sum_{j=1}^{\infty} d_j \psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.21b}$$

代入方程 (2.2.21a) 得到

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j \boldsymbol{O}\psi_j(\boldsymbol{r}) = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} d_j \psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.21c}$$

二边取 $\psi_i(\boldsymbol{r})$ 的内积得到

$$\sum_{j=1}^{\infty} (O_{ij} - \lambda\delta_{ij})d_j = 0 \tag{2.2.21d}$$

即

$$\det(O_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0 \tag{2.2.21e}$$

也就是说, 在基函数 $\{\psi_i(\boldsymbol{r})\}$ 下, 算子 $\boldsymbol{O}$ 的本征值就是矩阵 $\hat{\boldsymbol{O}}$ 的本征值. 一个特殊情况是算子 $\boldsymbol{O}$ 就是 $\boldsymbol{H}$, 则 $O_{ij} = H_{ij} = (\psi_i, \boldsymbol{H}\psi_j) = \lambda_j\delta_{ij}$, 即在 $\boldsymbol{H}$ 表象 (即自身表象) 中, 矩阵 $\hat{\boldsymbol{O}} = \hat{\boldsymbol{H}}$ 为对角矩阵, 其对角元素为本征值. 这一特性在量子力学中非常有意义, 如果在实验上测量得到某个物理量的本征值, 那么在这个物理量的自身表象中, 就可以写出表示这个物理量的算子的矩阵形式.

**例 2.2.1** 求解矩形域上二维 Laplace 算子的本征值问题

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = \lambda\psi(x,y),\ (x,y) \in G \\
&\left.\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}\right|_{x=l_x} = 0,\ y \in [0, l_y] \\
&\left.\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}\right|_{y=l_x} = 0,\ x \in [0, l_x]
\end{aligned} \tag{2.2.22a}$$

其中 $G$:$(0, l_x) \times (0, l_y)$. 令分离变量形式的解为

$$\psi(x,y) = X(x)Y(y) \tag{2.2.22b}$$

代入方程 (2.2.22a) 得到

$$\begin{aligned}
&\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda;\ (x,y) \in (0,l_x) \times (0,l_y) \\
&X'(x)Y(y)|_{x=0} = X'(x)Y(y)|_{x=l_x} = 0,\ y \in [0, l_y] \\
&X(x)Y'(y)|_{y=0} = X(x)Y'(y)|_{y=l_y} = 0,\ x \in [0, l_x]
\end{aligned} \tag{2.2.22c}$$

上式恒成立的条件是 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 分别满足

$$\begin{aligned} &X''(x)+\lambda_x X(x)=0 \\ &X'(x)|_{x=0}=X'(x)|_{x=l_x}=0 \end{aligned} \tag{2.2.22d}$$

以及

$$\begin{aligned} &Y''(y)+\lambda_y Y(y)=0 \\ &Y'(y)|_{y=0}=Y'(y)|_{y=l_y}=0 \end{aligned} \tag{2.2.22e}$$

其中 $\lambda_x$ 和 $\lambda_y$ 为分离变量常数, 满足 $\lambda=\lambda_x+\lambda_y$. 不难得到, 只有当

$$\lambda_x=\left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2;\ \lambda_y=\left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2,\ (n,m=0,1,2,\cdots) \tag{2.2.23a}$$

时, 方程 (2.2.22d) 和 (2.2.22e) 才有非零解

$$\begin{aligned} &X_n(x)=A_x\cos\frac{n\pi}{l_x}x,\ (n=0,1,2,\cdots) \\ &Y_m(y)=A_y\cos\frac{m\pi}{l_y}y,\ (m=0,1,2,\cdots) \end{aligned} \tag{2.2.23b}$$

合并后且利用归一化条件 $\displaystyle\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}|\psi_{nm}(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$ 得到归一化的本征函数和相应的本征值

$$\psi_{nm}(x,y)=\sqrt{\frac{\varepsilon_m\varepsilon_n}{l_x l_y}}\cos\frac{n\pi}{l_x}x\cos\frac{m\pi}{l_y}y \tag{2.2.23c}$$

$$\lambda_{nm}=\left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2 \tag{2.2.23d}$$

其中 $(n,m=0,1,2,\cdots)$, $\varepsilon_q=2$, $(q\neq 0)$; $\varepsilon_q=1$, $(q=0)$. 进一步分析：①本征值 $\lambda_{nm}>0$ 恒成立；②本征函数 $\psi_{nm}(x,y)$ 的正交性、归一性和完备性是显然的, 对 $f(x,y)\in L^2(G)$ 存在二维 Fourier 级数展开；③简并性质, 设 $l_y=2l_x$, 当 $(n,m)=(0,2)$ 和 $(n,m)=(1,0)$ 时, 本征值都是 $\lambda_{02}=4\pi^2/l^2=\lambda_{10}$, 但相应的本征函数却完全不同, 故本征值是二度简并的. 可以看出, 简并性源于 $l_y=2l_x$, 如果 $l_x/l_y=$ 无理数, 这种简并就没有了；反之, 当 $l_x/l_y=p/q$(有理数), 存在简并.

**例 2.2.2** 求解二维带状区域上 Laplace 算子的本征值问题

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y)=\lambda\psi(x,y),\ (x,y)\in G \\ &\psi(x,y)|_{x=0}=\psi(x,y)|_{x=l}=0,\ y\in(-\infty,\infty) \end{aligned} \tag{2.2.24a}$$

其中 $G: x\in(0,l),\ y\in(-\infty,\infty)$. 仿照例 2.2.1, 我们得到

$$\begin{aligned} &X''(x)+\lambda_x X(x)=0 \\ &X(x)|_{x=0}=X(x)|_{x=l}=0 \end{aligned} \tag{2.2.24b}$$

以及

$$Y''(y)+\lambda_y Y(y)=0 \tag{2.2.24c}$$

可见, 在 $x$ 方向是离散谱, 而在 $y$ 方向由于没有边界条件限制而形成连续谱

$$\begin{aligned} X_n(x)&=A_n\sin\frac{n\pi x}{l};\ \lambda_x=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ (n=1,2,\cdots)\\ Y(y)&=B(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky},\ y\in(-\infty,\infty)\end{aligned} \tag{2.2.24d}$$

其中 $k=\pm\lambda_y^{1/2}$ 可取任意实数. 上式中系数 $A_n$ 和 $B(k)$ 由归一化条件决定, 但 $y$ 方向只能象式 (2.2.9d) 那样归一化到 $\delta$ 函数. 最后, 得到本征函数系为

$$\begin{aligned}\psi_n(x,y,k)&=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\\ \lambda_n(k)&=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+k^2,\ (n=1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{2.2.24e}$$

从本例也可以得到一般的结论：当某一方向存在边界条件而形成闭合空间时, 该方向的本征值是离散谱 (物理上, 相当于能够形成驻波, 本征值就是驻波的共振频率)；反之, 如果某一方向是无限大的开空间, 则该方向的本征值是连续谱. 实际上, 此时的 Laplace 算子已经不是 Hermite 对称算子, 用式 (2.2.24e) 展开任意函数 $f(x,y)\in L^2(G)$ 时, 方程 (2.2.6d) 修改为

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C_n(k)\psi_n(x,y,k)\mathrm{d}k \tag{2.2.24f}$$

式 (2.2.24e) 代入上式

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}C_n(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\ \mathrm{d}k\right]\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.2.24g}$$

即对 $y$ 方向作 Fourier 积分, 而对 $x$ 方向作 Fourier 级数展开!

### 2.2.2 有限个离散谱或混合谱

一般在无限大或半无限的非均匀介质中存在混合谱问题. 我们以量子力学中简单的例子来说明. 考虑色散型 Schrödinger 方程的初值问题

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}&=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+U(x,t)\psi(x,t)\\ &(t>0,-\infty<x<\infty)\end{aligned} \tag{2.2.25a}$$

其中初始条件为 $\psi(x,t)|_{t=0}=\psi(x,0)$, 势函数 $U(x,t)$ 与时间无关 (其中 $U_0>0$)

$$U(x,t)\equiv U(x)=\begin{cases}-U_0, |x|\leqslant a\\ 0, |x|>a\end{cases}\tag{2.2.25b}$$

当 $U(x,t)$ 与时间无关时, Schrödinger 方程 (2.2.25a) 可分离变量, 令

$$\psi(x,t)=\psi(x)f(t)\tag{2.2.25c}$$

代入方程 (2.2.25a) 得到

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=Ef;\quad\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+U(x)\right]\psi(x)=E\psi(x)\tag{2.2.25d}$$

其中 $E$ 为分离变量常数 (待求的能量本征值), 上式第一个方程的解为

$$f(t)=f_0\exp\left(-\frac{\mathrm{i}Et}{\hbar}\right)\tag{2.2.26a}$$

式 (2.2.25d) 的第二个方程就是决定本征值 $E$ 和本征函数 $\psi(x)$ 的本征方程, 由式 (2.2.25b), 本征值 $E$ 和本征函数 $\psi(x)$ 满足

$$\begin{gathered}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}-U_0\psi=E\psi,\ |x|<a\\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}=E\psi,\ |x|>a\end{gathered}\tag{2.2.26b}$$

分二种情况讨论:

(1) $E>0$, 令 $k^2\equiv 2mE/\hbar^2$ 和 $\beta^2\equiv 2mU_0/\hbar^2$, 方程 (2.2.26b) 简化成

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+(\beta^2+k^2)\psi=0,\ |x|<a\\ \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+k^2\psi=0,\ |x|>a\end{gathered}\tag{2.2.26c}$$

显然, 上式的解为

$$\psi(x)=\begin{cases}C\exp(\mathrm{i}kx)+F\exp(-\mathrm{i}kx), & -\infty<x<-a\\ A\sin(\sqrt{\beta^2+k^2}x)+B\cos(\sqrt{\beta^2+k^2}x), & |x|<a\\ D\exp(\mathrm{i}kx)+G\exp(-\mathrm{i}kx) & +a<x<+\infty\end{cases}\tag{2.2.26d}$$

注意: 在势井中, 我们取驻波形式的解, 而在 $|x|>a$ 区域, 取行波形式的解. 本征函数 $\psi(x)$ 满足的边界条件为: 在 $x=\pm a$ 处 $\psi$ 和 $\psi'$ 连续. 注意: $\psi$ 的连续是物理要

求 (波函数连续), 而 $\psi'$ 的连续是数学要求, 因为如果 $\psi'$ 不连续, $\psi''$ 将出现 Dirac Delta 函数. 由于存在 6 个待定系数, 而仅仅只有 4 个方程 (加上一个归一化条件得到的方程, 也只有 5 个), 故此时 $k$(也即 $E$) 是任意的, 只要 $E>0$ 即可. 因此, 本征值 $E$(或者 $k$) 构成连续谱, 本征函数 $\psi(x)$ 可以分成二类：第一类在区间 $x<|a|$ 关于 $x$ 对称, 即

$$\psi_k^c(x)=\begin{cases}C_c\exp[\mathrm{i}k(x+a)]+F_c\exp[-\mathrm{i}k(x+a)], & -\infty<x<-a\\ B_c\cos(\sqrt{\beta^2+k^2}x), & |x|<a\\ D_c\exp[\mathrm{i}k(x-a)]+G_c\exp[-\mathrm{i}k(x-a)], & +a<x<+\infty\end{cases}\tag{2.2.27a}$$

第二类在区间 $x<|a|$ 关于 $x$ 反对称, 即

$$\psi_k^s(x)=\begin{cases}C_s\exp[\mathrm{i}k(x+a)]+F_s\exp[-\mathrm{i}k(x+a)], & -\infty<x<-a\\ B_s\sin(\sqrt{\beta^2+k^2}x), & |x|<a\\ D_s\exp[\mathrm{i}k(x-a)]+G_s\exp[-\mathrm{i}k(x-a)] & +a<x<+\infty\end{cases}\tag{2.2.27b}$$

其中 $k$ 取值范围为 $k\in(0,+\infty)$. 每一类都满足边界条件的 4 个方程和归一化方程 (当然只能归一化到 Dirac Delta 函数), 就能决定以上诸系数.

(2) $E<0$, 令 $\delta=\sqrt{2m(U_0+E)/\hbar^2}$, $\alpha=\sqrt{-2mE/\hbar^2}$, 方程 (2.2.26b) 简化成

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\delta^2\psi=0,\ |x|<a\\ &\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}-\alpha^2\psi=0,|x|>a\end{aligned}\tag{2.2.28a}$$

当 $E<0$ 时, 上式的通解为

$$\psi(x)=\begin{cases}A\exp(\alpha x)+F\exp(-\alpha x), & -\infty<x<-a\\ B\cos\delta x+C\sin\delta x, & |x|<a\\ D\exp(-\alpha x)+G\exp(\alpha x), & +a<x<+\infty\end{cases}\tag{2.2.28b}$$

为保证当 $x\to\pm\infty$ 时, 本征函数 $\psi(x)$ 有限, 故取 $F=G\equiv0$. 同样, 取二类解为

$$\psi^c(x)=\begin{cases}A_c\exp[\alpha(x+a)], & -\infty<x<-a\\ B_c\cos\delta x, & |x|<a\\ D_c\exp[-\alpha(x-a)], & +a<x<+\infty\end{cases}\tag{2.2.28c}$$

和

$$\psi^s(x)=\begin{cases}A_s\exp[\alpha(x+a)], & -\infty<x<-a\\ B_s\sin\delta x, & |x|<a\\ D_s\exp[-\alpha(x-a)], & +a<x<+\infty\end{cases}\tag{2.2.28d}$$

利用本征函数 $\psi(x)$ 满足的边界条件 (在 $x=\pm a$ 处, $\psi$ 和 $\psi'$ 连续) 得到:

(1) 对本征函数 $\psi^c(x)$, 系数 $A_c=D_c=B_c\cos\delta a$ 以及决定本征值 $E$ 的方程

$$\delta\tan\delta a=\alpha\tag{2.2.29a}$$

和本征函数是

$$\psi^c(x)=\begin{cases}B_c\cos\delta a\exp[\alpha(x+a)], & -\infty<x<-a\\ B_c\cos\delta x, & |x|<a\\ B_c\cos\delta a\exp[-\alpha(x-a)], & a<x<+\infty\end{cases}\tag{2.2.29b}$$

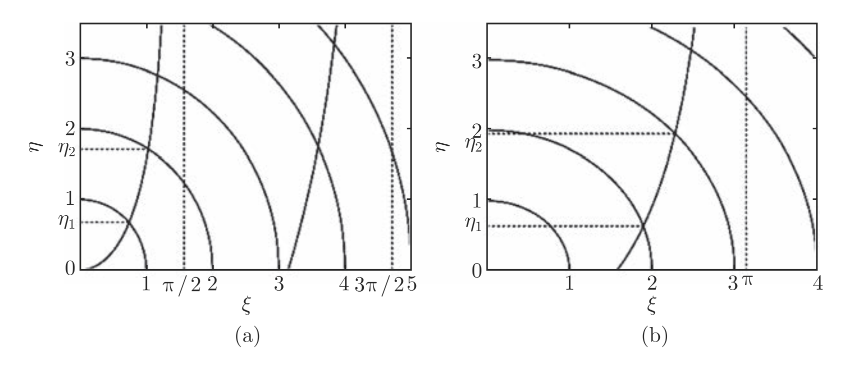



图 2.2.1　图解求本征值

其中 $B_c$ 可由归一化条件决定. 方程 (2.2.29a) 可用图解法求解, 注意到 $\delta=\sqrt{2m(U_0+E)/\hbar^2}$, $\alpha=\sqrt{-2mE/\hbar^2}$, 令 $\xi=\delta a$ 和 $\eta=\alpha a$, 则

$$\xi^2+\eta^2=\frac{2m}{\hbar^2}U_0a^2\tag{2.2.29c}$$

显然, 上式表示 $(\xi,\eta)$ 平面上的 1/4 圆 (在第一象限). 另一方面, 由方程 (2.2.29a) 得到

$$\eta=\xi\tan\xi\tag{2.2.29d}$$

为 $(\xi,\eta)$ 的诸曲线, 如图 2.2.1(a). 圆与诸曲线的交点 $(\xi_\nu,\eta_\nu)$(设存在 $N$ 个交点) 即为方程 (2.2.29a) 的解. 本征值 $E$ 为

$$E_\nu^c=-\frac{\eta_\nu^2\hbar^2}{2ma^2},\ (\nu=1,2,\cdots,N)\tag{2.2.30a}$$

相应的本征函数用 $\psi_\nu^c(x)$ 表示. 由图 2.2.1(a) 可看出：圆半径较小时, 即 $U_0a^2 < \pi^2\hbar^2/(8m)$, 圆与 $\eta=\xi\tan\xi$ 只有一个交点, 也就是说, 只存在一个本征值, 而且这个最小本征值一定存在；当

$$4\frac{\pi^2\hbar^2}{8m} < U_0a^2 < 9\frac{\pi^2\hbar^2}{8m} \tag{2.2.30b}$$

圆与 $\eta=\xi\tan\xi$ 有二个交点, 故有二个本征值, 等等, $U_0$ 越大本征值越多.

(2) 对本征函数 $\psi^s(x)$, 系数 $D_s=-A_s=B_s\sin\delta a$ 以及决定本征值 $E$ 的方程

$$\alpha\tan\delta a+\delta=0 \tag{2.2.31a}$$

和本征函数是

$$\psi^s(x)=\begin{cases}-B_s\sin\delta a\exp[\alpha(x+a)], & -\infty<x<-a\\ B_s\sin\delta x, & |x|<a\\ B_s\sin\delta a\exp[-\alpha(x-a)], & a<x<+\infty\end{cases} \tag{2.2.31b}$$

其中 $B_s$ 可由归一化条件决定. 方程 (2.2.31a) 也可以用图解法求根, 如图 2.2.1(b), 本征值由曲线 $\eta=-\xi\cot\xi$ 与圆的交点决定, 当 $U_0a^2<\pi^2\hbar^2/(8m)$ 时, 不存在交点, 故不存在本征值. 设存在 $M$ 个交点 $(\xi_\nu,\eta_\nu)$, 本征值为

$$E_\nu^s=-\frac{\eta_\nu^2\hbar^2}{2ma^2},\ (\nu=1,2,\cdots,M) \tag{2.2.31c}$$

相应的本征函数用 $\psi_\nu^s(x)$ 表示.

至此, 我们已经完成了求解本征值问题. 根据展开式 (2.2.6d), 初值问题方程 (2.2.25a) 的解应展开为

$$\begin{aligned}\psi(x,t)=&\sum_{\nu=1}^{N}A_\nu^c\psi_\nu^c(x)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}E_\nu^c t}{\hbar}\right)+\int_0^\infty A_c(k)\psi_k^c(x)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hbar k^2}{2m}t\right)\mathrm{d}k\\&+\sum_{\nu=1}^{M}A_\nu^s\psi_\nu^s(x)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}E_\nu^s t}{\hbar}\right)+\int_0^\infty A_s(k)\psi_k^s(x)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hbar k^2}{2m}t\right)\mathrm{d}k\end{aligned} \tag{2.2.32a}$$

其中诸系数由初始条件为 $\psi(x,t)|_{t=0}=\psi(x,0)$ 决定

$$\begin{aligned}\psi(x,0)=&\sum_{\nu=1}^{N}A_\nu^c\psi_\nu^c(x)+\int_0^\infty A_c(k)\psi_k^c(x)\mathrm{d}k\\&+\sum_{\nu=1}^{M}A_\nu^s\psi_\nu^s(x)+\int_0^\infty A_s(k)\psi_k^s(x)\mathrm{d}k\end{aligned} \tag{2.2.32b}$$

注意：本例中完备的基函数是 $\{\psi_\nu^c(x), \psi_\nu^s(x), \psi_k^c(x), \psi_k^s(x)\}$ 表示 4 种不同的本征函数 (或者微观粒子的状态). 为了从式 (2.2.32b) 求出诸系数, 必须证明基函数的正交性. 利用证明式 (2.2.6c) 类似的方法, 不难 (比较繁复) 证明：

$$\begin{gathered}(\psi_\nu^s, \psi_\nu^c) = (\psi_k^s, \psi_k^c) = (\psi_\nu^c, \psi_k^c) = (\psi_\nu^c, \psi_k^s) \\ = (\psi_\nu^s, \psi_k^c) = (\psi_\nu^s, \psi_k^s) = 0 \\ (\psi_\nu^c, \psi_{\nu'}^c) = \delta_{\nu\nu'};\ (\psi_\nu^s, \psi_{\nu'}^s) = \delta_{\nu\nu'} \\ (\psi_k^c, \psi_{k'}^c) = \delta(k-k');\ (\psi_k^s, \psi_{k'}^s) = \delta(k-k')\end{gathered} \tag{2.2.32c}$$

于是

$$\begin{aligned}&A_\nu^c = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0)\psi_\nu^c(x)\mathrm{d}x;\ A_\nu^s = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0)\psi_\nu^s(x)\mathrm{d}x \\ &A_c(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0)[\psi_k^c(x)]^*\mathrm{d}x;\ A_s(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0)[\psi_k^s(x)]^*\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.2.32d}$$

### 2.2.3 非 Hermite 对称算子：常微分算子

由 2.2.1 小节讨论中可以看出, 三维 Green 公式 (2.2.18a)(一维情况为 Lagrange 恒等式, 见式 (2.3.2b)) 在讨论 Hermite 算子本征值问题的特性中起重要的作用, 第三章中也看到, 这二个公式是用 Green 函数方法求定解问题的基础. 如果算子 $\boldsymbol{L}$ 是非 Hermite 对称的算子, 能否得到类似的积分公式呢？

二阶常微分算子 $\boldsymbol{L}$ 的一般形式为

$$\boldsymbol{L} \equiv \alpha(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \beta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \gamma(x) \tag{2.2.33a}$$

其中三个系数都是复函数. 由 Lagrange 恒等式 (2.3.2b) 的启发, 共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的选择必须使下列形式的恒等式成立

$$(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j - \psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j = \frac{\mathrm{d}B(\psi_i^*, \psi_j)}{\mathrm{d}x} \tag{2.2.33b}$$

其中 $B(\psi_i^*, \psi_j)$ 是 $\psi_i^*$ 和 $\psi_j$ 的双线性函数. 通过分部积分就能得到

$$\int_a^b [(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j - \psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j]\mathrm{d}x = B(\psi_i^*, \psi_j)|_a^b \tag{2.2.33c}$$

如果 $B(\psi_i^*, \psi_j)|_a^b = 0$, 则 $\boldsymbol{L}^+$ 满足共轭算子的定义. 注意到下列恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\psi_i^*\frac{\mathrm{d}(\alpha^*\psi_j)}{\mathrm{d}x}\right] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\alpha^*\psi_j\frac{\mathrm{d}\psi_i^*}{\mathrm{d}x}\right] = \psi_i^*\frac{\mathrm{d}^2(\alpha^*\psi_j)}{\mathrm{d}x^2} - \alpha^*\psi_j\frac{\mathrm{d}^2\psi_i^*}{\mathrm{d}x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\beta^*\psi_j\psi_i^*)}{\mathrm{d}x} = \psi_i^*\frac{\mathrm{d}(\beta^*\psi_j)}{\mathrm{d}x} + \beta^*\psi_j\frac{\mathrm{d}\psi_i^*}{\mathrm{d}x}$$

作运算并整理后得到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j &= \alpha^*\psi_j\frac{\mathrm{d}^2\psi_i^*}{\mathrm{d}x^2}+\beta^*\psi_j\frac{\mathrm{d}\psi_i^*}{\mathrm{d}x}+\gamma^*\psi_j\psi_i^* \\ &= \psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j+\frac{\mathrm{d}B(\psi_i^*,\psi_j)}{\mathrm{d}x}\end{aligned} \tag{2.2.34a}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^+\psi_j &\equiv \frac{\mathrm{d}^2(\alpha^*\psi_j)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}(\beta^*\psi_j)}{\mathrm{d}x}+\gamma^*(x)\psi_j \\ B(\psi_i^*,\psi_j) &\equiv \alpha^*\psi_j\frac{\mathrm{d}\psi_i^*}{\mathrm{d}x}-\psi_i^*\frac{\mathrm{d}(\alpha^*\psi_j)}{\mathrm{d}x}+\beta^*\psi_j\psi_i^*\end{aligned} \tag{2.2.34b}$$

即

$$(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j-\psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j=\frac{\mathrm{d}B(\psi_i^*,\psi_j)}{\mathrm{d}x} \tag{2.2.34c}$$

显然, 上式与式 (2.2.33b) 一致, 二边积分

$$\begin{aligned}&\int_a^b[(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j-\psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j]\mathrm{d}x \\ =&\left\{\psi_j\alpha^*\frac{\mathrm{d}\psi_i^*}{\mathrm{d}x}-\psi_i^*\left[\frac{\mathrm{d}(\alpha^*\psi_j)}{\mathrm{d}x}-\beta^*\psi_j\right]\right\}_a^b \\ =&[\psi_j(\boldsymbol{P}\psi_i)^*-\psi_i^*\boldsymbol{P}^+\psi_j]_a^b\end{aligned} \tag{2.2.35a}$$

式中边界算子定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\psi_i &\equiv \alpha\frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}x}+\chi\psi_i \\ \boldsymbol{P}^+\psi_j &\equiv \frac{\mathrm{d}(\alpha^*\psi_j)}{\mathrm{d}x}-\beta^*\psi_j+\chi^*\psi_j\end{aligned} \tag{2.2.35b}$$

称 $\boldsymbol{P}^+$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的共轭边界算子, 引进函数 $\chi(x)$ 是为了使 $\boldsymbol{P}\psi_i=0$ 可包括三类边界条件情况；另外, $\chi(a)=-\chi_0$ 和 $\chi(b)=\chi_0$ ($\chi_0$ 为复常数) 是考虑到一维边界在二个端点的法向导数相反. 因此, 在非 Hermite 对称算子情况, 我们得到与 Lagrange 恒等式 (2.3.2b) 类似的关系

$$\int_a^b[(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j-\psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j]\mathrm{d}x=[\psi_j(\boldsymbol{P}\psi_i)^*-\psi_i^*\boldsymbol{P}^+\psi_j]_a^b \tag{2.2.35c}$$

如果 $\psi_i$ 和 $\psi_j$ 满足边界条件, 即 $\boldsymbol{P}\psi_i|_{x=a,b}=0$ 和 $\boldsymbol{P}^+\psi_j|_{x=a,b}=0$, 则

$$\int_a^b[(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j-\psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j]\mathrm{d}x=0 \tag{2.2.35d}$$

故由式 (2.2.34b) 定义的算子 $\boldsymbol{L}^+$ 确实是 $\boldsymbol{L}$ 的共轭算子.

**例 2.2.3**　求 S-L 型算子的共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 和 $\boldsymbol{P}^+$. S-L 型算子 $\boldsymbol{L}$ 展开后为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}\psi &\equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)\psi(x)\\&=-p(x)\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}-p'(x)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}+q(x)\psi(x)\end{aligned}\tag{2.2.36a}$$

显然, $\alpha(x)=-p(x)$, $\beta(x)=-p'(x)$ 和 $\gamma(x)=q(x)$, 如果诸系数是实函数, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^+\psi &= \frac{\mathrm{d}^2(\alpha^*\psi)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}(\beta^*\psi)}{\mathrm{d}x}+\gamma^*(x)\psi\\&=-\frac{\mathrm{d}^2(p\psi)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}(p'\psi)}{\mathrm{d}x}+q\psi\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)+q\psi=\boldsymbol{L}\psi\end{aligned}\tag{2.2.36b}$$

同时 $\boldsymbol{P}^+\psi\equiv-(p\psi)'+p'(x)\psi+\chi\psi=\boldsymbol{P}\psi$, 故实系数的 S-L 型算子是 Hermite 对称算子. 注意：包括边界条件中的常数也必须是实数; 如果诸系数是复函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^+\psi &= \frac{\mathrm{d}^2(\alpha^*\psi)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}(\beta^*\psi)}{\mathrm{d}x}+\gamma^*\psi\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p^*\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)+q^*\psi=\boldsymbol{L}^*\end{aligned}\tag{2.2.36c}$$

同时, 边界共轭算子 $\boldsymbol{P}^+$ 为

$$\boldsymbol{P}^+=-p^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\chi^*=\boldsymbol{P}^*\tag{2.2.36d}$$

故复系数 S-L 型算子的共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 和 $\boldsymbol{P}^+$ 为其复共轭.

非 Hermite 算子和共轭算子的本征值问题定义为 (注意：权函数 $\rho$ 仍然是实函数)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}\psi_i=\lambda_i\rho\psi_i,\ \boldsymbol{P}\psi_i=0,\ (i=0,1,2,\cdots)\\&\boldsymbol{L}^+\psi_j^+=\lambda_j^+\rho\psi_j^+,\ \boldsymbol{P}^+\psi_j^+=0,\ (j=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\tag{2.2.37a}$$

**基本性质**　上式定义的本征值问题具有基本性质为

(1) 共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的本征值等于算子 $\boldsymbol{L}$ 的本征值的复共轭 $\lambda^+=\lambda^*$(注意：这一性质一般成立)；

证明：取 $\psi=\psi_i$ 和 $\psi^+=\psi_i^+$ 满足方程 (2.2.37a), 代入共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的定义 $(\boldsymbol{L}\psi,\psi^+)=(\psi,\boldsymbol{L}^+\psi^+)$, 立即得到 $\lambda_i^+=\lambda_i^*$, 可见它们是一一对应的.

(2) 算子 $\boldsymbol{L}$ 的第 $i$ 个本征函数与共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的第 $j$ 个本征函数相互正交

$$(\psi_i,\psi_j^+)=\int_a^b\rho(x)\psi_i^*(x)\psi_j^+(x)\mathrm{d}x=0,\ (i\neq j)\tag{2.2.37b}$$

证明：取 $\psi = \psi_i$ 和 $\psi^+ = \psi_j^+$ 满足方程 (2.2.37a), 代入共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的定义 $(\boldsymbol{L}\psi, \psi^+) = (\psi, \boldsymbol{L}^+\psi^+)$, 得到 $(\boldsymbol{L}\psi_i, \psi_j^+) = (\psi_i, \boldsymbol{L}^+\psi_j^+)$, 即

$$(\lambda_i^* - \lambda_j^+)\int_a^b \rho(x)\psi_i^*(x)\psi_j^+(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{2.2.37c}$$

而 $\lambda_i^+ \neq \lambda_j^*$, $(i \neq j)$, 故得到式 (2.2.37b). 注意：算子 $\boldsymbol{L}$ 本身的本征函数无法证明其正交性, 除非 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称算子.

(3) 如果本征函数系 $\{\psi_i(x)\}$ 构成 $L^2[a,b]$ 的完备系, 对任意函数 $f(x) \in L^2[a,b]$, 存在广义 Fourier 级数

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N_i^2}(\psi_i^+, f)\psi_i(x) \tag{2.2.38a}$$

其中

$$\begin{aligned}(\psi_i^+, f) &= \int_a^b \rho(x)[\psi_i^+(x)]^* f(x)\mathrm{d}x \\ N_i^2 &= \int_a^b \rho(x)[\psi_i^+(x)]^*\psi_i(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.2.38b}$$

注意：对一般的非 Hermite 算子 $\boldsymbol{L}$, 本征函数系 $\{\psi_i(x)\}$ 不一定构成 $L^2[a,b]$ 的完备系；系数 $N_i$ 仅仅是一个积分, 没有模的概念 (甚至可能是复数), 只有当 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 算子, $\psi_i^+(x) = \psi_i(x)$, $N_i$ 才是 $\psi_i(x)$ 的模.

### 2.2.4 非 Hermite 对称算子: 偏微分算子

一般形式的二阶线性偏微分算子为

$$\boldsymbol{L} \equiv \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial x_\mu} + c(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.39a}$$

其中所有的系数是复函数, $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 受方程 (2.2.18a) 和 (2.2.33b) 的启发, 共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 必须使下式右边变成散度形式

$$(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j - \psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j = \sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial R_\mu(\psi_i^*, \psi_j)}{\partial x_\mu} \tag{2.2.39b}$$

通过 Gauss 积分就能把体积分化成面

$$\int_G [(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j - \psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j]\mathrm{d}\tau = \sum_{\mu=1}^{n}\iint_{\partial G} R_\mu(\psi_i^*, \psi_j)\cos(n_\mu, x_\mu)\mathrm{d}S \tag{2.2.39c}$$

其中 $n_\mu$ 是面元法向单位矢量在 $x_\mu$ 方向的投影. 注意到下列恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\psi_i^*\frac{\partial(a_{\mu\nu}^*\psi_j)}{\partial x_\nu}\right]-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[a_{\mu\nu}^*\psi_j\frac{\partial\psi_i^*}{\partial x_\nu}\right]=\psi_i^*\frac{\partial^2(a_{\mu\nu}^*\psi_j)}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-a_{\mu\nu}^*\psi_j\frac{\partial^2\psi_i^*}{\partial x_\mu\partial x_\nu}$$

$$\frac{\partial(b_\mu^*\psi_j\psi_i^*)}{\partial x_\mu}=\psi_i^*\frac{\partial(b_\mu^*\psi_j)}{\partial x_\mu}+b_\mu^*\psi_j\frac{\partial\psi_i^*}{\partial x_\mu}$$

作运算并整理后得到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j&=\sum_{\mu,\nu=1}^n a_{\mu\nu}^*\psi_j\frac{\partial^2\psi_i^*}{\partial x_\mu\partial x_\nu}+\sum_{i=1}^n b_\mu^*\psi_j\frac{\partial\psi_i^*}{\partial x_\mu}+c\psi_j\psi_i^*\\&=\psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j+\sum_{\mu=1}^n\frac{\partial R_\mu}{\partial x_\mu}\end{aligned}\tag{2.2.40a}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^+\psi_j&\equiv\sum_{\mu,\nu=1}^n\frac{\partial^2(a_{\mu\nu}^*\psi_j)}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\sum_{\mu=1}^n\frac{\partial(b_\mu^*\psi_j)}{\partial x_\mu}+c^*\psi_j\\R_\mu&\equiv\sum_{\nu=1}^n\left[a_{\mu\nu}^*\psi_j\frac{\partial\psi_i^*}{\partial x_\nu}-\psi_i^*\frac{\partial(a_{\mu\nu}^*\psi_j)}{\partial x_\nu}\right]+b_\mu^*\psi_j\psi_i^*\end{aligned}\tag{2.2.40b}$$

方程 (2.2.40a) 二边积分就得到式 (2.2.39c), 把该式进一步写成

$$\int_G[(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j-\psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j]\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}[(\boldsymbol{P}\psi_i)^*\psi_j-\psi_i^*\boldsymbol{P}^+\psi_j]\mathrm{d}S\tag{2.2.41a}$$

上式称为**广义 Green 公式**, 其中边界算子及其共轭算子定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\psi_i&\equiv\sum_{\mu,\nu=1}^n a_{\mu\nu}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\nu}\cos(n_\nu,x_\nu)+\beta\psi_i\\\boldsymbol{P}^+\psi_j&\equiv\sum_{\mu,\nu=1}^n a_{\mu\nu}^*\frac{\partial\psi_j}{\partial x_\nu}\cos(n_\nu,x_\nu)+(\beta^*-b)\psi_j\\b&\equiv\sum_{\mu=1}^n\left(b_\mu^*-\sum_{\nu=1}^n\frac{\partial a_{\mu\nu}^*}{\partial x_\nu}\right)\cos(n_\nu,x_\nu)\end{aligned}\tag{2.2.41b}$$

与一维情况类似, 如果 $\psi_i$ 和 $\psi_j$ 满足边界 $\boldsymbol{P}\psi_i|_{\partial G}=0$ 和 $\boldsymbol{P}^+\psi_j|_{\partial G}=0$, 则

$$\int_G[(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j-\psi_i^*\boldsymbol{L}^+\psi_j]\mathrm{d}\tau=0\tag{2.2.41c}$$

因此由式 (2.2.40b) 的第一式定义的算子 $\boldsymbol{L}^+$ 为确实为共轭算子.

当算子 $\boldsymbol{L}$ 与共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的微分形式相同时, 称算子 $\boldsymbol{L}$ 是自共轭算子. 注意：只有当 $\boldsymbol{L}^+=\boldsymbol{L}$ 且满足式 (2.2.41c) 才能说 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称算子.

**例 2.2.4** 证明下列算子是自共轭算子

$$\boldsymbol{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + qu \tag{2.2.42a}$$

其中系数 $a_{ij} = a_{ji}$ 实对称, $q$ 是实函数.

证明: 假定共轭算子为

$$\boldsymbol{L}^{+} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + qu \tag{2.2.42b}$$

作运算

$$(\boldsymbol{L}u, v) - (u, \boldsymbol{L}^{+}v) = \int_G \left[\sum_{i,j=1}^{n} u^* \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{i,j=1}^{n} v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\right)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_G \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\left(u^*\frac{\partial v}{\partial x_i} - v\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\right) - \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u^*}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} - a_{ij}\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\right]\mathrm{d}\tau$$

利用 $a_{ij} = a_{ji}$, 上式右边最后一个求和为零, 即

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{L}u, v) - (u, \boldsymbol{L}^{+}v) &= \int_G \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\left(u^*\frac{\partial v}{\partial x_i} - v\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\right)\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \iint_{\partial G}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(u^*\frac{\partial v}{\partial x_i} - v\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\right)n_j\end{aligned} \tag{2.2.42c}$$

故上式可以写成广义 Green 公式的形式

$$(\boldsymbol{L}u, v) - (u, \boldsymbol{L}^{+}v) = \iint_{\partial G}[v(\boldsymbol{P}u)^* - u^*\boldsymbol{P}^{+}v]\mathrm{d}S \tag{2.2.43a}$$

其中边界算子也是自共轭算子

$$\boldsymbol{P} \equiv -\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}n_j\frac{\partial}{\partial x_i} + \beta\right) = \boldsymbol{P}^{+} \tag{2.2.43b}$$

式 (2.2.42c) 表明方程 (2.2.42b) 的选择是正确的, 即 $\boldsymbol{L}^{+} = \boldsymbol{L}$. 注意: 如果系数 $a_{ij} = a_{ji}$ 和 $q$ 是复函数, 则 $\boldsymbol{L}$ 算子就不是自共轭算子, 即

$$\boldsymbol{L}^{+} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}^*\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + q^*u = \boldsymbol{L}^* \neq \boldsymbol{L} \tag{2.2.43c}$$

下面给出一些算子的共轭算子.

(1) 实系数 S.-L 型算子 $\boldsymbol{L} = -\nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r})$ 的共轭算子 $\boldsymbol{L}^+ = \boldsymbol{L}$, 故它是自共轭算子. 在一定边界条件下, 它是 Hermite 对称算子. 如果系数是复函数, $\boldsymbol{L}^+ = -\nabla \cdot (p^*\nabla\psi) + q^*\psi$, 结论不成立;

(2) 实系数的三维波动算子 $\boldsymbol{\Pi} = \rho\partial_{tt}^2 + \boldsymbol{L}$ 的共轭算子为 $\boldsymbol{\Pi}^+ = \rho\partial_{tt}^2 + \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Pi}$, 故它是自共轭算子, 在一定边界条件下, 它是 Hermite 对称算子. 如果考虑介质的耗散, 就破坏了其对称性;

(3) 实系数的三维热扩散算子 $\boldsymbol{\Pi} = \rho\partial_t + \boldsymbol{L}$ 的共轭算子为 $\boldsymbol{\Pi}^+ = -\rho\partial_t + \boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{\Pi}$, 故它不是自共轭算子;

(4) 色散型算子 $\boldsymbol{\Pi} = \mathrm{i}\partial_t + \boldsymbol{L}$, 当 $\boldsymbol{L} = -\nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r})$ 的系数是实函数时, 时间变量前的系数是虚数 i, 代入式 (2.2.40b) 后, $\boldsymbol{\Pi}^+ = \mathrm{i}\partial_t + \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Pi}$, 故它是自共轭算子. 在一定边界条件下, 它是 Hermite 对称算子.

注意：对含时间变量的算子, 一般把时间部分单独写出, 见 3.5 节.

**基本性质**　与一维情况类似, 不再重复.

**例 2.2.5**　三维波动问题中经常遇到的有限区域内的 Helmhotz 算子

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}\psi &\equiv [-\nabla^2 + k^2(\boldsymbol{r})]\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G \\ \boldsymbol{P}\psi &\equiv -\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial n} - \beta(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in \partial G \end{aligned} \tag{2.2.44a}$$

实际情况中考虑到区域内和区域边界上的能量的吸收, $k(\boldsymbol{r})$ 和 $\beta(\boldsymbol{r})$ 是复函数. 共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 和共轭边界算子 $\boldsymbol{P}^+$ 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}^+\psi^+ &\equiv [-\nabla^2 + k^{*2}(\boldsymbol{r})]\psi^+(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G \\ \boldsymbol{P}^+\psi^+ &\equiv -\frac{\partial\psi^+}{\partial n} - \beta^*(\boldsymbol{r})\psi^+, \boldsymbol{r} \in \partial G \end{aligned} \tag{2.2.44b}$$

显然: $\boldsymbol{L}^+ = \boldsymbol{L}^*$ 和 $\boldsymbol{P}^+ = \boldsymbol{P}^*$. 定义 Helmhotz 算子和共轭算子的本征值问题分别为

$$\begin{aligned} &[-\nabla^2 + k^2(\boldsymbol{r})]\psi(\boldsymbol{r}) = \lambda\rho(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G \\ &\left[\frac{\partial\psi}{\partial n} + \beta(\boldsymbol{r})\psi\right]_{\partial G} = 0 \end{aligned} \tag{2.2.44c}$$

和

$$\begin{aligned} &[-\nabla^2 + k^{*2}(\boldsymbol{r})]\psi^+(\boldsymbol{r}) = \lambda^+\rho(\boldsymbol{r})\psi^+(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G \\ &\left[\frac{\partial\psi^+}{\partial n} + \beta^*(\boldsymbol{r})\psi^+\right]_{\partial G} = 0 \end{aligned} \tag{2.2.44d}$$

显然: $\lambda^+ = \lambda^*$ 和 $\psi^+(\boldsymbol{r}) = \psi^*(\boldsymbol{r})$(注意: 只有当 $\boldsymbol{L}^+ = \boldsymbol{L}^*$ 和 $\boldsymbol{P}^+ = \boldsymbol{P}^*$ 时, 才有 $\psi^+(\boldsymbol{r}) = \psi^*(\boldsymbol{r})$, 而 $\lambda^+ = \lambda^*$ 恒成立! ), 而由方程 (2.2.37b) 推广到三维情况得到正

交性方程为

$$(\psi_i, \psi_j^+) = \int_G \rho(\boldsymbol{r})\psi_i^*(\boldsymbol{r})\psi_j^+(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = 0,\ (i \neq j) \tag{2.2.45a}$$

利用 $\psi^+(\boldsymbol{r}) = \psi^*(\boldsymbol{r})$ 得到 (注意：只有当 $\boldsymbol{L}^+ = \boldsymbol{L}^*$ 和 $\boldsymbol{P}^+ = \boldsymbol{P}^*$ 时才成立！)

$$(\psi_i, \psi_j^+) = \int_G \rho(\boldsymbol{r})\psi_i(\boldsymbol{r})\psi_j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = 0,\ (i \neq j) \tag{2.2.45b}$$

注意：尽管 $\psi_i(\boldsymbol{r})$ 与 $\psi_j(\boldsymbol{r})$ 不正交 (即 $(\psi_i, \psi_j) \neq 0$, $(i \neq j)$), 但能利用上式求广义 Fourier 展开系数, 即如果本征函数系 $\{\psi_i(\boldsymbol{r})\}$ 构成 $L^2[G]$ 的完备系, 对任意函数 $u(\boldsymbol{r}) \in L^2[G]$, 存在与广义 Fourier 级数展开类似的表达式

$$\begin{gathered} u(\boldsymbol{r}) \approx \sum_{i=0}^{\infty} a_i\psi_i(\boldsymbol{r});\ a_i = \frac{1}{N_i^2}\int_G \rho(\boldsymbol{r})\psi_i(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau \\ N_i^2 = \int_G \rho(\boldsymbol{r})\psi_i^2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau \end{gathered} \tag{2.2.45c}$$

注意：$N_i^2$ 不是 $\psi_i(\boldsymbol{r})$ 的模 (而是复数)！另一方面, 把 $\boldsymbol{L}^+ = \boldsymbol{L}^*$ 和 $\boldsymbol{P}^+ = \boldsymbol{P}^*$ 代入广义 Green 公式 (2.2.41a) 得到

$$\int_G [(\boldsymbol{L}\psi_i)^*\psi_j - \psi_i^*\boldsymbol{L}^*\psi_j]\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} [(\boldsymbol{P}\psi_i)^*\psi_j - \psi_i^*\boldsymbol{P}^*\psi_j]\mathrm{d}S \tag{2.2.46a}$$

二边取复共轭

$$\int_G [(\boldsymbol{L}\psi_i)\psi_j^* - \psi_i\boldsymbol{L}\psi_j^*]\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} [(\boldsymbol{P}\psi_i)\psi_j^* - \psi_i\boldsymbol{P}\psi_j^*]\mathrm{d}S \tag{2.2.46b}$$

把式 (2.2.44a) 代入得到

$$\int_G [\psi_j^*\nabla^2\psi_i - \psi_i\nabla^2\psi_j^*]\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} \left(\psi_j^*\frac{\partial\psi_i}{\partial n} - \psi_i\frac{\partial\psi_j^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{2.2.46c}$$

上式即普通的 Green 公式, 故对由式 (2.2.44a) 表示的算子, 普通 Green 公式仍然适用.

**例 2.2.6** 考虑二维矩形区域 $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ 上的非 Hermite 对称算子的本征值问题

$$\begin{gathered} -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x, y) = \lambda^2\psi(x, y) \\ (x, y) \in (0,a) \times (0,b) \end{gathered} \tag{2.2.47a}$$

四条边满足的边界条件为

$$\begin{gathered} \left.\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathrm{i}\beta\psi\right)\right|_{x=0} = \left.\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \mathrm{i}\beta\psi\right)\right|_{x=a} = 0 \\ \left.\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathrm{i}\beta\psi\right)\right|_{y=0} = \left.\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - \mathrm{i}\beta\psi\right)\right|_{y=b} = 0 \end{gathered} \tag{2.2.47b}$$

注意：在 $x=0$ 的直边上, 区域的法向为 $(n_x,n_y)=(-1,0)$, 而在 $x=a$ 的直边上, 区域的法向为 $(n_x,n_y)=(1,0)$, 故边界条件中相差一个负号；对 $y$ 方向的讨论类似. 显然, 当 $\beta=0$ 时, 以上本征值问题的解为

$$\psi^0_{pq}(x,y)=\sqrt{\frac{\varepsilon_p\varepsilon_q}{ab}}\cos\left(\frac{p\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{q\pi}{b}y\right)$$
$$(\lambda^0_{pq})^2=\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{q\pi}{b}\right)^2;(p,q=0,1,2,\cdots) \tag{2.2.48a}$$

其中上标 “0” 表示 $\beta=0$ 时的本征函数和本征值, $\varepsilon_p=\varepsilon_q=1$, $(p=0;\ q=0)$, 而 $\varepsilon_p=\varepsilon_q=2$, $(p\neq 0;\ q\neq 0)$. 当 $\beta\to 0$ 时, 取解的形式为

$$\psi^\beta(x,y)=A\cos(\lambda_x x+\delta_x)\cos(\lambda_y y+\delta_y) \tag{2.2.48b}$$

其中 $\lambda^2=\lambda_x^2+\lambda_y^2$. 由 $x$ 方向的边界条件得到

$$\lambda_x\tan(\delta_x)=\mathrm{i}\beta;\ -\lambda_x\tan(\lambda_x a+\delta_x)=\mathrm{i}\beta \tag{2.2.48c}$$

利用三角函数关系, 从上式可推得

$$(\beta^2+\lambda_x^2)\tan(\lambda_x a)=-2\mathrm{i}\beta\lambda_x;\ \lambda_x\tan(\delta_x)=\mathrm{i}\beta \tag{2.2.49a}$$

上式就是决定 $x$ 方向的本征值 $\lambda_x$ 和相位因子 $\delta_x$ 的超越方程.

当 $\beta=0$ 时, $\tan(\lambda_x^0 a)=0$, 故 $\lambda_x^0=p\pi/a$, $(p=0,1,2,\cdots)$; 当 $\beta\to 0$ 时, 取近似解 $\lambda_x\approx\lambda_x^0+\varepsilon$, 注意到

$$\tan(\lambda_x^0 a+\varepsilon a)=\frac{\tan(\lambda_x^0 a)+\tan(\varepsilon a)}{1-\tan(\lambda_x^0 a)\tan(\varepsilon a)}=\tan(\varepsilon a)\approx\varepsilon a \tag{2.2.49b}$$

上式代入方程 (2.2.49a) 的第一式且忽略二级量 $\beta^2$, 得到 $(\lambda_x^0+\varepsilon)\varepsilon a\approx -2\mathrm{i}\beta$. 当 $\lambda_x^0\neq 0$ 时, 忽略 $\varepsilon^2$ 得到 $\varepsilon\approx -2\mathrm{i}\beta/\lambda_x^0 a$, 故 $\lambda_x\approx\lambda_x^0+\varepsilon=\lambda_x^0-2\mathrm{i}\beta/\lambda_x^0 a$, 其平方近似为

$$\lambda_x^2\approx(\lambda_x^0+\varepsilon)^2\approx(\lambda_x^0)^2-4i\frac{\beta}{a} \tag{2.2.50a}$$

当 $\lambda_x^0=0$ 时, 即 $p=0$ 时, 从 $(\lambda_x^0+\varepsilon)\varepsilon a\approx -2\mathrm{i}\beta$ 得到 $\varepsilon^2\approx -2\mathrm{i}\beta\ /\ a$. 因此统一写成

$$\lambda_x^2\approx\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2-2\mathrm{i}\varepsilon_p\frac{\beta}{a} \tag{2.2.50b}$$

其中 $\varepsilon_0=1$; $\varepsilon_p=2$, $(p\geqslant 1)$. 另一方面, 由方程 (2.2.49a) 第二式得到 $\delta_x\approx \mathrm{i}\beta\ /\ \lambda_x^0$. 同理, 由 $y$ 方向的边界条件, 我们可以得到

$$\lambda_y^2\approx\left(\frac{q\pi}{b}\right)^2-2\mathrm{i}\varepsilon_q\frac{\beta}{b};\delta_y\approx\mathrm{i}\frac{\beta}{\lambda_y^0} \tag{2.2.50c}$$

最后, 我们得到复本征函数和复本征值为

$$\psi_{pq}^{\beta}(x,y)\approx\begin{cases}A_{pq}C_p(x)C_q(y),\ (p,q\neq 0)\\ A_{00},\ (p=q=0)\end{cases}$$
$$(\lambda_{pq}^{\beta})^2\approx\left(\frac{p\pi}{l_x}\right)^2+\left(\frac{q\pi}{l_y}\right)^2-2\mathrm{i}\beta\left(\frac{\varepsilon_p}{a}-\frac{\varepsilon_q}{b}\right)\tag{2.2.51a}$$
$$(p,q=0,1,2,\cdots)$$

其中

$$C_p(x)\equiv\cos\left(\frac{p\pi}{a}x+\mathrm{i}\frac{a\beta}{p\pi}\right),\ (p,q\neq 0)$$
$$C_q(y)\equiv\cos\left(\frac{q\pi}{b}y+\mathrm{i}\frac{b\beta}{q\pi}\right),\ (p,q\neq 0)\tag{2.2.51b}$$

共轭算子的本征函数和本征值分别为 $\psi_{pq}^{+}(x,y)\approx[\psi_{pq}^{\beta}(x,y)]^*$ 和 $\lambda_{pq}^{+}=(\lambda_{pq}^{\beta})^*$. 注意：当 $\beta\to 0$ 不成立时, 应该严格求解方程 (2.2.49a).

## 2.3　Sturm-Liouville 系统和多项式系统

本节讨论一类十分重要的本征值问题, 即 Sturm-Liouville(简写为 S-L) 系统, 特别是 S-L 多项式系统, 它们是一类十分重要的常微分系统. 在正交曲线坐标系 (本书仅介绍球坐标或圆柱坐标系, 见 2.5 节) 中对 Laplace 算子的本征值问题或者其他边值问题进行分离变量求解时, 首先遇到的是如何求 S-L 系统的解, 典型的方程由 Legendre 方程和 Bessel 方程, 这是本节讨论的重点.

### 2.3.1　Sturm-Liouville 系统

考虑算子式 (2.2.17a) 和边界条件式 (2.2.17b) 的一维情形

$$\boldsymbol{L}\psi\equiv-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)\psi(x),\ x\in(a,b)\tag{2.3.1a}$$

边界条件为

$$\left.\left(\alpha_1\psi-\beta_1\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a}=0;\quad\left.\left(\alpha_2\psi+\beta_2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b}=0\tag{2.3.1b}$$

Sturm-Liouville 本征值问题 (简称为 **S−L 问题**) 就是在边界条件式 (2.3.1b) 下, 求下列齐次方程的非零解及 $\lambda$ 的可允许值

$$\boldsymbol{L}[\psi(x)]=\lambda\rho(x)\psi(x),\quad x\in(a,b)\tag{2.3.1c}$$

它在用分离变量法求解定解问题中经常出现, 故我们专门讨论. 如果

(1) $p(x)>0$、$\rho(x)>0$ 以及 $q(x)\geqslant 0$;

(2) $p(x)$、$p'(x)$、$\rho(x)$ 和 $q(x)$ 在闭区域 $x\in[a,b]$ 内连续;

(3) $\alpha_\nu\beta_\nu>0$ 和 $\alpha_\nu+\beta_\nu>0$, $(\nu=1,2)$, 即 $\alpha_\nu$ 与 $\beta_\nu$ 同号并且不同时为零 (反例见 2.6.2 小节讨论).

则称方程 (2.3.1c) 和 (2.3.1b) 为**正则 S-L 问题**. 反之, 如果上述有一个或者几个不满足, 如 $p(a)=p(b)=0$, 则称 (2.3.1c) 和 (2.3.1b) 为**奇异 S-L 问题.** 注意: 对无限大区域 $x\in(-\infty,\infty)$ 或者半无限大区域 $x\in[0,\infty)$, 也是奇异 S-L 问题 **.**

显然, 这时内积的定义应取

$$(\psi_1,\psi_2)=\int_a^b\rho(x)\psi_1^*(x)\psi_2(x)\mathrm{d}x \tag{2.3.1d}$$

其中在开区间 $x\in(a,b)$ 上 $\rho(x)>0$. 下面我们来讨论 S−L 问题的普遍特性.

**性质 1** 对应不同本征值的本征函数相互正交. 证明: 设 $(\lambda_i,\lambda_j)$ 是二个不同的本征值, 对应的本征函数分别是 $(\psi_i,\psi_j)$ 则

$$\begin{aligned}\int_a^b(\psi_i^*\boldsymbol{L}\psi_j-\psi_j\boldsymbol{L}\psi_i^*)\mathrm{d}x&=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\left(\psi_j\frac{\mathrm{d}\psi_i^*}{\mathrm{d}x}-\psi_i^*\frac{\mathrm{d}\psi_j}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=p(x)\left(\psi_j\frac{\mathrm{d}\psi_i^*}{\mathrm{d}x}-\psi_i^*\frac{\mathrm{d}\psi_j}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b\end{aligned} \tag{2.3.2a}$$

即

$$\int_a^b(\psi_i^*\boldsymbol{L}\psi_j-\psi_j\boldsymbol{L}\psi_i^*)\mathrm{d}x=p(x)\left(\psi_j\frac{\mathrm{d}\psi_i^*}{\mathrm{d}x}-\psi_i^*\frac{\mathrm{d}\psi_j}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b \tag{2.3.2b}$$

上式称为 **Lagrange 恒等式**, 类似于三维的 Green 公式 (2.2.18a). 利用边界条件式 (2.3.1b)

$$\begin{aligned}\alpha_1\psi_i^*(a)-\beta_1\left.\frac{\mathrm{d}\psi_i^*(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}&=0\\\alpha_1\psi_j(a)-\beta_1\left.\frac{\mathrm{d}\psi_j(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}&=0\end{aligned} \tag{2.3.3a}$$

即

$$\psi_j(a)\left.\frac{\mathrm{d}\psi_i^*(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}-\psi_i^*(a)\left.\frac{\mathrm{d}\psi_j(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=0 \tag{2.3.3b}$$

同理

$$\psi_j(b)\left.\frac{\mathrm{d}\psi_i^*(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b}-\psi_i^*(b)\left.\frac{\mathrm{d}\psi_j(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b}=0 \tag{2.3.3c}$$

把式 (2.3.3b) 和 (2.3.3c) 代入式 (2.3.2b) 得

$$\int_a^b(\psi_i^*\boldsymbol{L}\psi_j-\psi_j\boldsymbol{L}\psi_i^*)\mathrm{d}x=0 \tag{2.3.4a}$$

注意到 $\boldsymbol{L}\psi_j=\lambda_j\rho\psi_j$ 和 $\boldsymbol{L}\psi_i=\lambda_i\rho\psi_i$ 以及 $\lambda_i=\lambda_i^*$, 上式为

$$\begin{aligned}\int_a^b(\psi_i^*\boldsymbol{L}\psi_j-\psi_j\boldsymbol{L}\lambda_i^*)\mathrm{d}x&=(\lambda_i-\lambda_j)\int_a^b\rho\psi_i^*\psi_j\mathrm{d}x\\&=(\lambda_i-\lambda_j)(\psi_i,\psi_j)=0\end{aligned}\tag{2.3.4b}$$

而 $\lambda_i\neq\lambda_j$, 故 $(\psi_i,\psi_j)=0$. 事实上, 由方程 (2.3.4a), 算子 $\boldsymbol{L}$ 在边界条件式 (2.3.1b) 是 Hermite 对称算子, 故 $(\psi_i,\psi_j)$ 正交.

**性质 2** 本征值 $\lambda$ 为实数, 且非负 $(\lambda\geqslant 0)$, 本征函数可选择为实值函数. 事实上, 因算子 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称算子, 故 $\lambda$ 为实数. 因为 $p$, $q$, $\lambda$ 和 $\rho$ 都是实值函数, 故方程 (2.3.1c) 的任意一个解的实部和虚部都是解. 下面证明 $\lambda\geqslant 0$: 设 $\psi$ 是本征函数, 由方程 (2.3.1c), 两边以 $\psi$ 取内积得到

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{1}{||\psi||^2}\left[-\int_a^b\psi^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\int_a^b q|\psi|^2\mathrm{d}x\right]\\&=-\left(p\varphi^*\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b+\int_a^b\left(p\left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|^2+q|\psi|^2\right)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.3.5a}$$

利用边界条件式 (2.3.1b)

$$-p(b)\psi^*(b)\frac{\mathrm{d}\psi(b)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}p(b)|\psi(b)|^2\geqslant 0, & \beta_2\neq 0\\ 0, & \beta_2=0\end{cases}\tag{2.3.5b}$$

$$p(a)\psi^*(a)\frac{\mathrm{d}\psi(a)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}p(a)|\psi(a)|^2\geqslant 0, & \beta_1\neq 0\\ 0, & \beta_1=0\end{cases}\tag{2.3.5c}$$

又因 $p(x)>0$ 和 $q(x)>0$, 故 $\lambda\geqslant 0$. 显然, 从方程 (2.3.5a) 可看出: 如果在闭区域 $x\in[a,b]$ 内 $q(x)>0$, 则 $\lambda\neq 0$, 即零不是本征值; 如果 $q(x)=0$, 则当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 时, $\lambda=0$ 是本征值, 故在第二类边界条件下, 存在零本征值, 对应的本征函数为常数, 归一化后为 $\psi_0(x)=1/\sqrt{l}$.

**性质 3** S-L 问题的本征值是非简并的, 即对应一个 $\lambda$ 只可能有一个本征函数. 对二阶常微分方程, 存在两个线性独立的解, 但对 S–L 系统, 每一个本征值只能有一个独立的本征函数. 用反证法: 设对应的两个线性无关本征函数为 $\psi_1(x,\lambda)$ 和 $\psi_2(x,\lambda)$, 则可取 $\psi_1(x,\lambda)$ 和 $\psi_2(x,\lambda)$ 为方程 (2.3.1c) 的基本解, 于是满足任意初值条件

$$\psi(x)|_{x=b}=A;\quad \left.\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b}=B\tag{2.3.6a}$$

的解 $\psi(x)$ 可以表示成

$$\psi(x)=c_1\psi_1(x,\lambda)+c_2\psi_2(x,\lambda)\tag{2.3.6b}$$

因 $\psi_1(x,\lambda)$ 和 $\psi_2(x,\lambda)$ 是本征函数, 满足齐次边界条件式 (2.3.1b), 故 $\psi(x)$ 也满足式 (2.3.1b), 这说明 $\psi(b)$ 与 $\psi'(b)$ 之间存在一个线性关系, 故 $A$ 和 $B$ 不能任意选取, 矛盾! 因此, $\psi_1(x,\lambda)$ 和 $\psi_2(x,\lambda)$ 不可能线性独立.

**性质 4**　本征值是分立的, 即 $\{\lambda_n\}$ 形成可数集, 并且有

$$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\cdots\leqslant\lambda_n\cdots(n\to\infty,\ \lambda_n\to\infty) \tag{2.3.7a}$$

下面仅证明 $\{\lambda_n\}$ 是可数集, 式 (2.3.7a) 的证明则略去. 事实上, 设方程 (2.3.1c) 的任意两个线性独立解为 $\psi_1(x,\lambda)$ 和 $\psi_2(x,\lambda)$, 则方程 (2.3.1c) 的通解为

$$\psi(x,\lambda)=c_1\psi_1(x,\lambda)+c_2\psi_2(x,\lambda) \tag{2.3.7b}$$

当 $\lambda$ 为本征值时, 应满足式 (2.3.1b), 于是, 得到决定系数 $c_1$ 和 $c_2$ 的方程

$$[\alpha_1\psi_1(a,\lambda)-\beta_1\psi_1'(a,\lambda)]c_1+[\alpha_1\psi_2(a,\lambda)-\beta_1\psi_2'(a,\lambda)]c_2=0 \tag{2.3.7c}$$

$$[\alpha_2\psi_1(b,\lambda)+\beta_2\psi_1'(b,\lambda)]c_1+[\alpha_2\psi_2(b,\lambda)+\beta_2\psi_2'(b,\lambda)]c_2=0 \tag{2.3.7d}$$

存在非零解的条件是系数行列式 $\Delta(\lambda)$ 等于零

$$\Delta(\lambda)\equiv\begin{vmatrix}\alpha_1\psi_1(a,\lambda)-\beta_1\psi_1'(a,\lambda) & \alpha_1\psi_2(a,\lambda)-\beta_1\psi_2'(a,\lambda)\\ \alpha_2\psi_1(b,\lambda)+\beta_2\psi_1'(b,\lambda) & \alpha_2\varphi_2(b,\lambda)+\beta_2\psi_2'(b,\lambda)\end{vmatrix}=0 \tag{2.3.7e}$$

上式是确定本征值 $\lambda$ 的方程, 即本征值是函数 $\Delta(\lambda)$ 在 $\lambda$ 复平面上的零点. 因此, 问题是 $\Delta(\lambda)$ 的零点如何分布? 由微分方程的理论知, 对于固定的 $x$ 值, $\psi_1(x,\lambda)$ 和 $\psi_2(x,\lambda)$ 是 $\lambda$ 的整函数, 即在整个 $\lambda$ 复平面上解析的函数. 因此, $\Delta(\lambda)$ 也是 $\lambda$ 的整函数. 根据**性质 2**, 本征值只能是实数, 故 $\Delta(\lambda)$ 的零点都在实轴上. 因 $\Delta(\lambda)$ 在全平面上不恒为零, 在有限处 $\Delta(\lambda)$ 只能有有限个零点 (否则 $\Delta(\lambda)$ 恒为零), 即本征值是分立的.

**性质 5**　对 $L^2[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 平方可积的函数 $f(x)$

$$\int_a^b\rho(x)|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty \tag{2.3.8a}$$

本征函数系 $\{\psi_k(x)\}$ 形成一个完备系, 因此可作广义 Fourier 展开

$$f(x)\cong\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_k,f)\ \psi_k(x) \tag{2.3.8b}$$

上式右边级数均方收敛于 $f(x)$, 即

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b\left|f(x)-\sum_{k=1}^{N}(\psi_k,f)\ \psi_k(x)\right|^2\mathrm{d}x=0 \tag{2.3.9a}$$

如果 $f(x)$ 在区间 $x \in [a,b]$ 内连续, 且有分段连续的一阶导数, 又满足边界条件式 (2.3.1c), 则上式右边级数一致且绝对收敛于 $f(x)$, 即

$$\lim_{N\to\infty}\left|f(x)-\sum_{k=1}^{N}(\psi_k,f)\ \psi_k(x)\right|=0 \tag{2.3.9b}$$

如果 $f(x)$ 在区间 $x \in [0,l]$ 内存在有限个第一类间断点, 则上式右边收敛到平均值

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_k,f)\ \psi_k(x)=\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)] \tag{2.3.9c}$$

方程 (2.3.8b) 的证明在 4.3.2 小节给出, 方程 (2.3.9b) 和 (2.3.9c) 的证明忽略.

**性质 6** 对应于本征值 $\lambda_n$ 的本征函数 $\psi_n(x)$, 在 $[a,b]$ 区间内恰好有 $n$ 个零点. 该性质证明较复杂, 故略. 在用分离变量方法求解偏微分方程的定解问题时, 零点的存在与否以及分布的性质是非常重要.

**自然边界条件** 奇异 S-L 问题往往在奇异处构成自然边界条件, 如要求本征函数有界, 则本征值只能取若干值. 一般, 如果 $x_0$(经常 $x_0$ 是区域的两个端点 $x_0=a$ 或 $b$, 也可以 $x_0\to\infty$) 是本征方程 (2.3.1c) 的奇点, 自然边界条件可写成

$$\lim_{x\to x_0}p(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{2.3.10a}$$

上式不仅使 $\psi$ 在奇点 $x_0$ 处有界, 而且使不同本征值的本征函数彼此正交. 事实上, 由 Lagrange 恒等式 (2.3.2b)

$$(\lambda_i-\lambda_j)(\psi_i,\psi_j)=p\left(\psi_j\frac{\mathrm{d}\psi_i^*}{\mathrm{d}x}-\psi_i^*\frac{\mathrm{d}\psi_j}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_a^b \tag{2.3.10b}$$

为了使 $\psi_i$ 与 $\psi_j$ 正交, 不仅要求 $\psi_i$ 和 $\psi_j$ 在 $x=a$ 或 $x=b$ 有界, 而且要求

$$p(x)\frac{\mathrm{d}\psi_i(x)}{\mathrm{d}x}=0;\ p(x)\frac{\mathrm{d}\psi_j(x)}{\mathrm{d}x}=0,\ (x\to a,b) \tag{2.3.10c}$$

在物理问题中, 我们经常遇到奇异 S-L 本征值问题, 甚至是非 S-L 本征值问题. 只能针对具体问题, 求具体的解.

正则 S-L 本征值问题的简单例子是取 $p(x)=\rho(x)=1,\ q(x)=0,\ \alpha_1=\alpha_2=1,$ $\beta_1=\beta_2=0$ 以及 $x\in(0,l)$. 这是我们熟知的情况, 本征函数和本征值由式 (2.2.11b) 表示, 显然具有性质 1~6. 如果边界条件为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l}=0 \tag{2.3.11a}$$

则本征函数和相应的本征值为

$$\psi_0(x)=\sqrt{\frac{1}{l}},\ \lambda_0=0$$
$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\ \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ (n=1,2,\cdots) \tag{2.3.11b}$$

这时 $\lambda_0=0$ 是本征值, 对照性质 2 的条件, 这是显然的.

**例 2.3.1**　考虑满足周期性边界条件的非 S-L 本征值问题

$$\boldsymbol{L}\psi\equiv-\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}=\lambda\psi(x),\ x\in(-l,l) \tag{2.3.12a}$$

$$\psi(-l)=\psi(l);\quad \left.\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-l}=\left.\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l} \tag{2.3.12b}$$

方程 (2.3.12a) 的通解为 $\psi(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x$, 代入式 (2.3.12b)

$$A\sin\sqrt{\lambda}l=0;\ B\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l=0 \tag{2.3.12c}$$

分三种情况讨论：(1) $A\neq0$ 和 $B=0$, 则只有 $\sin\sqrt{\lambda}l=0$, 于是 $\sqrt{\lambda}l=n\pi$；(2) $A=0$ 而 $B\neq0$ 以及 $\lambda\neq0$, 则只有 $\sin\sqrt{\lambda}l=0$, 于是 $\sqrt{\lambda}l=n\pi$；(3)$\lambda=0$, 方程的解为 $\psi(x)=Cx+D$, 由式 (2.3.12b) 的第一式, $C=0$, 故 $\psi(x)$ 只能是常数. 因此, 归一化后得到：对零本征值 $\lambda_0=0$, 本征函数为 $\psi_0(x)=1/\sqrt{2l}$. 因此, 最后得到本征函数和相应的本征值为

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{l}}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)\\ \dfrac{1}{\sqrt{l}}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)\end{cases},\ \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ (n=1,2,\cdots) \tag{2.3.12d}$$

和

$$\psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \lambda_0=0 \tag{2.3.12e}$$

显然, 对应于本征值 $\lambda_n\neq0$, 有二个线性独立的本征函数, 故是双重简并的, 性质 3 不成立. 事实上, S−L 本征值问题的边界条件式 (2.3.1b) 是一点之间的关联, 而式 (2.3.12b) 表示的是两点之间的关联. 由 Lagrange 恒等式 (2.3.2b), 容易表明 $(\boldsymbol{L}\psi_i,\psi_j)=(\psi_i,\boldsymbol{L}\psi_j)$, 故 $\boldsymbol{L}$ 仍然是 Hermite 对称的, 但边界条件不满足 S−L 本征值问题的要求.

注意：把方程 (2.3.12a) 拓展到整个实轴时, 边界条件式 (2.3.12b) 不仅要求函数有周期性, 在周期边界上, 一阶导数也必须连续.

**例 2.3.2** 考虑满足周期性条件的非 S-L 本征值问题

$$\boldsymbol{L}\Phi \equiv -\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} = \lambda\Phi(\varphi) \tag{2.3.13a}$$

其中 $\varphi$ 可认为是平面极坐标的极角, 要求 $\Phi(\varphi)$ 是 $2\pi$ 的周期函数, 即 $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi)$. 上式通解为

$$\Phi(\varphi) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\varphi} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\varphi} \tag{2.3.13b}$$

代入边界条件 $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi)$ 得到

$$A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\varphi} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\varphi} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)} \tag{2.3.13c}$$

上式恒成立的条件是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\sqrt{\lambda}} = 1$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\sqrt{\lambda}} = 1$, 故 $\lambda = m^2$, $(m = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$, 代入式 (2.3.13b) 且在 $[0, 2\pi]$ 上归一化得到本征函数

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\ (m = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{2.3.13d}$$

如果把方程 (2.3.13a) 的通解写成

$$\Phi(\varphi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) \tag{2.3.14a}$$

上式分三种情况讨论:

(1) 关于 $\varphi = 0$ 对称的解 $\Phi_c(\varphi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi)$, 由周期性边界条件得到

$$A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) = A\cos[\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)] \tag{2.3.14b}$$

故要求 $2\pi\sqrt{\lambda} = 2\pi m$, 即本征值为 $\lambda = m^2$, 相应的关于 $\varphi = 0$ 对称的本征函数为

$$\Phi_c(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(m\varphi),\ (m = 1, 2, \cdots) \tag{2.3.14c}$$

(2) 关于 $\varphi = 0$ 反对称的解 $\Phi_s(\varphi) = B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$, 同样可以得到

$$\Phi_s(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(m\varphi),\ (m = 1, 2, \cdots) \tag{2.3.14d}$$

(3) 当 $\lambda = 0$ 时, 满足周期性边界条件 $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi)$ 的本征函数为

$$\Phi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ (\lambda = 0) \tag{2.3.14e}$$

注意: 当物理问题关于 $\varphi = 0$ 具有对称性时, 用三角函数表示的本征函数较方便.

### 2.3.2 Bessel 算子和 Bessel 方程

下面考虑二个十分重要的算子, 即 Bessel 算子和 Legendre 算子

**Bessel 算子** 考虑定义在有限区间 $x \in (0, R)$ 上的 $\nu$ 阶 Bessel 算子的本征值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{\nu^2}{x}\psi = \mu^2\psi,\ x \in (0, R) \\ \psi(x)|_{x=0} < \infty;\quad \left.\left(\alpha\psi + \beta\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=R} = 0\end{gathered} \tag{2.3.15a}$$

其中 $\nu$ 以平方出现, 可以假定 $\nu \geqslant 0$; 因为本征值 $\lambda > 0$, 为了方便, 设 $\lambda = \mu^2$. 方程 (2.3.15a) 的第一式称为 **$\nu$阶 Bessel 方程**(注意：此时 $\nu$ 是一个给定的常数, 而 $\lambda = \mu^2$ 才是需求的本征值). 显然, $p(x) = x$ 和 $\rho(x) = x$, $q(x) = \nu^2/x > 0$, 而 $p(0) = \rho(0) = 0$, 此外, $q(x)$ 在 $x = 0$ 有奇性. 因此, 式 (2.3.15a) 是一个奇异 S-L 问题, 在 $x = 0$ 处存在自然边界条件. 根据常微分方程理论, $x = 0$ 是 Bessel 方程的正则奇点, 故存在有界的解 (因为方程的奇点一般也是解的奇点, 但当奇点是正则奇点时, 可得到无奇性的解). $\nu$ 阶 Bessel 方程的通解可以表示为

$$\psi_\nu(x) = A_\nu J_\nu(\mu x) + B_\nu N_\nu(\mu x) \tag{2.3.15b}$$

其中 $J_\nu(\mu x)$ 和 $N_\nu(\mu x)$ 分别称为 $\nu$ 阶 **Bessel 函数**和 $\nu$ 阶 **Neumann 函数**(详细的讨论见 2.5.5 小节), $J_\nu(\mu x)$ 和 $N_\nu(\mu x)$ 的一个重要性质是 $J_\nu(0)$ 有限, 而 $N_\nu(0)$ 无限. 现在, $x$ 的区域包含 $x = 0$, 为了满足 $\psi(x)|_{x=0} < \infty$, 必须令 $B_\nu \equiv 0$(自然边界条件), 把式 (2.3.15b) 代入式 (2.3.15a) 中的边界条件得到

$$A_\nu \left.\left[\alpha J_\nu(\mu x) + \beta\frac{\mathrm{d}J_\nu(\mu x)}{\mathrm{d}x}\right]\right|_{x=R} = 0 \tag{2.3.15c}$$

显然 $A_\nu \neq 0$, 否则 $\psi(x) \equiv 0$, 令 $\alpha_k^\nu, (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 是方程

$$\left.\left[\alpha J_\nu(x) + \mu\beta\frac{\mathrm{d}J_\nu(x)}{\mathrm{d}x}\right]\right|_{x=\mu} = 0 \tag{2.3.16a}$$

的第 $k$ 个正根 (注意：对给定的常数 $\nu$), 本征值 $\mu_k^\nu = \alpha_k^\nu/R$, 相应的本征函数为

$$\psi_k^\nu(x) = A_k^\nu J_\nu(\mu_k^\nu x),\ (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.3.16b}$$

根据 Bessel 函数的性质, 方程 (2.3.16a) 存在无限多个可数的正根, 因此 $\mu_k^\nu$ 总存在.

**第一类边界条件** 方程 (2.3.16a) 中取 $\beta = 0$, 则 $\alpha_k^\nu$ 是 $\nu$ 阶 Bessel 函数的正零点 $J_\nu(\alpha_k^\nu) = 0$. 当 $\nu$=0 时, 方程 $J_0(x) = 0$ 没有零根 (因为 $J_0(0) = 1$), 因而零不是本征值；当 $\nu > 0$ 时, 尽管方程 $J_\nu(x) = 0$, $(\nu > 0)$ 有零根, 但对应于零根的本征函

数 $\psi_0^\nu(x) = A_0^\nu J_\nu(0\cdot x) \equiv 0, (\nu > 0)$, 是一个平凡解. 总之, 当 $\beta = 0$ 时, 没有零本征值. 本征函数归一化条件为 (在参考书 1 中能够找到积分过程, 故略, 下同)

$$
\begin{aligned}
||\psi_k^\nu||^2 &= (A_k^\nu)^2 \int_0^R x J_\mu^2(\mu_k^\nu x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{R^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_k^\nu R)(A_k^\nu)^2 = 1
\end{aligned} \tag{2.3.17a}
$$

归一化本征函数为

$$
\psi_k^\nu(x) = \frac{\sqrt{2}}{R} \cdot \frac{J_\nu(\mu_k^\nu x)}{J_{\nu+1}(\mu_k^\nu R)}, \ (k = 1, 2, \cdots) \tag{2.3.17b}
$$

**第二类边界条件** 方程 (2.3.16a) 中取 $\alpha = 0$, 则 $\alpha_k^\nu$ 是 $\nu$ 阶 Bessel 函数导数的正零点, 即 $J_\nu'(\alpha_k^\nu) = 0$. 由 Bessel 函数的关系：$J_0'(x) = -J_1(x)$, 故当 $\nu$=0 时, 决定本征值的方程 $J_0'(x) = 0$ 就是方程 $J_1(x) = 0$, 而零是方程 $J_1(x) = 0$ 的一个根, 此时存在非零解 $\psi_0^0 = A_0^0 J_0(0\cdot x) = A_0^0$(常数). 因此, 当 $\nu$=0 时, 存在零本征值! 零本征值对应的本征函数的归一化条件为 (注意：带权 $\rho(x) = x$)

$$
||\psi_0^0||^2 = (A_0^0)^2 \int_0^R 1\cdot x\mathrm{d}x = \frac{R^2}{2}(A_0^0)^2 = 1 \tag{2.3.18a}
$$

对其他非零本征值 (不管 $\nu = 0$ 或者 $\nu > 0$), 可以得到

$$
\begin{aligned}
||\psi_k^\nu||^2 &= (A_k^\nu)^2 \int_0^R x J_\nu^2(\mu_k^\nu x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{R^2}{2}\left[1 - \left(\frac{\nu}{\alpha_k^\nu}\right)^2\right] J_\nu^2(\mu_k^\nu R)(A_k^\nu)^2 = 1
\end{aligned} \tag{2.3.18b}
$$

故归一化本征函数可以写为

$$
\psi_k^\nu(x) = \frac{\sqrt{2}}{R\sqrt{1 - (\nu/\alpha_k^\nu)^2}} \cdot \frac{J_\nu(\mu_k^\nu x)}{J_\nu(\mu_k^\nu R)}, \ (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.3.18c}
$$

注意：上式中当 $\nu = 0$ 时, 取 $\nu/\alpha_0^\nu \to 0$, 这样就能包括方程 (2.3.18a) 了, 而无需单独列出.

在物理问题中, 一般 $\nu$ 也变化, 如 $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, 问题是：在所有的本征值 $\mu_k^\nu = \alpha_k^\nu/R$, $(\nu, k = 0, 1, 2, \cdots)$ 中, 第一个非零本征值是哪一个？也就是寻找一系列方程 $J_\nu'(x) = 0$, $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ 中最小的非零根. 数值计算表明, 方程 $J_0'(x) = 0$ 的前 3 个根为 $\mu_0^0 = 0.00$,$\mu_1^0 = 3.83$ 和 $\mu_2^0 = 7.02$, 而方程 $J_1'(x) = 0$ 的前 3 个根为 $\mu_0^1 = 1.84$,$\mu_1^1 = 5.33$ 和 $\mu_2^1 = 8.54$. 显然, 最小的非零根为 $\mu_0^1 = 1.84$, 即 $J_1'(x) = 0$ 的第一个根. 知道这点在实际物理问题中非常有用.

**Bessel 级数展开**　对每一个 $\nu$, 函数系 $\{\psi_k^\nu\}$ 构成一个正交、归一的完备系, 故对任意一个带权 $\rho(x)=x$ 平方可积的函数 $f(x)\in L^2[0,R]$

$$\int_0^R x|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty \tag{2.3.19a}$$

可以展成广义 Fourier-Bessel 级数

$$f(x)\cong\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_k^\nu,f)\psi_k^\nu(x) \tag{2.3.19b}$$

称为 **Bessel-Fourier 级数**. 注意: 上式对每一个 $\nu>0$ 都成立.

必须注意的是: 如果 Bessel 算子定义在不包括 0 的有限区间 $x\in(R_1,R_2)$ 上, 则相应的本征值问题就变成正则的 S-L 问题了, 例如

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}\psi\equiv-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{\nu^2}{x}\psi=\mu^2\psi,\ x\in(R_1,R_2)\\&\psi(R_1)=\psi(R_2)=0\end{aligned} \tag{2.3.20a}$$

把通解式 (2.3.15b) 代入边界条件得到

$$\begin{aligned}J_\nu(\mu R_1)A_\nu+N_\nu(\mu R_1)B_\nu=0\\J_\nu(\mu R_2)A_\nu+N_\nu(\mu R_2)B_\nu=0\end{aligned} \tag{2.3.20b}$$

存在非零解的条件是系数行列式为零, 从而给出决定本征值的方程

$$J_\nu(\mu R_1)N_\nu(\mu R_2)-N_\nu(\mu R_1)J_\nu(\mu R_2)=0 \tag{2.3.20c}$$

设第 $k$ 个根为 $\mu_k^\nu$, 由方程 (2.3.20b) 的第一式或第二式得

$$B_\nu=-\frac{J_\nu(\mu_k^\nu R_1)}{N_\nu(\mu_k^\nu R_1)}A_\nu \tag{2.3.20d}$$

代入方程 (2.3.15b) 得到相应的归一化本征函数

$$\psi_k^\nu(x)=\frac{1}{||\psi_k^\nu||}\left[J_\nu(\mu_k^\nu x)-\frac{J_\nu(\mu_k^\nu R_1)}{N_\nu(\mu_k^\nu R_1)}N_\nu(\mu_k^\nu x)\right] \tag{2.3.21a}$$

其中本征函数的模为

$$||\psi_k^\nu||=\sqrt{\int_{R_1}^{R_2}\left[J_\nu(\mu_k^\nu x)-\frac{J_\nu(\mu_k^\nu R_1)}{N_\nu(\mu_k^\nu R_1)}N_\nu(\mu_k^\nu x)\right]^2x\mathrm{d}x} \tag{2.3.21b}$$

对任意带权 $\rho(x)=x$ 的平方可积函数 $f(x)\in L^2[R_1,R_2]$ 可以作 Bessel–Fourier 级数展开.

### 2.3.3 Legendre 算子和 Legendre 方程

首先考虑通常的情况, 对定义在区间 $x \in [-1, +1]$ 上的 Legendre 算子, 本征值问题为

$$\boldsymbol{L}\psi \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right] = \lambda\psi,\ x \in [-1, +1] \tag{2.3.22a}$$

上式为 **Legendre 方程**. 当 $x \in (-1, +1)$,$p(x) = 1 - x^2 > 0$, 但 $p(-1) = p(1) = 0$, 故是奇异 S-L 本征值问题, $x = \pm 1$ 是方程的正则奇点, 存在自然边界条件

$$\lim_{x\to\pm 1}\psi(x) < \infty \tag{2.3.22b}$$

该条件就是决定本征值的边界条件. 方程 (2.3.22a) 的解可由级数法求得：当以常点 $x = 0$ 作 Taylor 展开时, 得到在区域 $x \in (-1, +1)$ 内收敛的二个线性独立解

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,\nu) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{\Gamma(n-\nu/2)\Gamma[n+(\nu+1)/2)}{\Gamma(-\nu/2)\Gamma[(\nu+1)/2)}x^{2n} \\
\psi_2(x,\nu) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\cdot\frac{\Gamma[n-(\nu-1)/2]\Gamma(n+1+\nu/2)}{\Gamma[-(\nu-1)/2)]\Gamma(1+\nu/2)}x^{2n+1}
\end{aligned} \tag{2.3.22c}$$

其中 $\nu(\nu+1) = \lambda$, 对一般的 $\nu$ 值, 线性独立解 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 在端点 $x = \pm 1$ 发散, 只有当 $\nu = l$, $(l = 0, 1, 2, \cdots)$ 时, 其中一个退化为多项式 (就不存在收敛性问题了), 而另外一个在端点 $x = \pm 1$ 仍发散：当 $l$ 为偶数, $\psi_1(x,\nu)$ 退化为多项式, 而 $\psi_2(x,\nu)$ 是无穷级数, 在 $x = \pm 1$ 发散；当 $l$ 为奇数, $\psi_2(x,\nu)$ 退化为多项式, $\psi_1(x,\nu)$ 是无穷级数, 在 $x = \pm 1$ 发散. 这个多项式就是 2.1.3 小节中讨论的 Legendre 多项式 $P_l(x)$. 当 $\nu = l$, $(l = 0, 1, 2, \cdots)$ 时, 习惯上, 另一个在 $x = \pm 1$ 发散的解用 Wronski 法求得为

$$Q_l(x) = P_l(x)\int_x^{\infty}\frac{1}{(x^2-1)[P_l(x)]^2}\mathrm{d}x \tag{2.3.23a}$$

称为**第二类 Legendre 函数**, 其级数表达式为

$$Q_l(x) = \frac{1}{2}P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x) \tag{2.3.23b}$$

显然, $Q_l(x)$ 在 $x = \pm 1$ 点对数发散.

因此, 在闭区间 $x \in [-1, +1]$, Legendre 算子的本征值为

$$\lambda_l = l(l+1),\ (l = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.3.24a}$$

与 $\lambda_l$ 相应的本征函数为 Legendre 多项式, 即归一化本征函数为

$$\psi_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x),\ (l = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.3.24b}$$

在 2.1.3 小节中, 我们已详细讨论了 $P_n(x)$ 的正交性和完备性.

**包括一个端点情况** 当区域仅包括一个端点 (以 $x$=1 为例, Legendre 方程关于 $x$=0 点对称, 只要令 $x \to -x$, $x$=1 就变成 −1) 时, 另外一个端点必须给出边界条件, 设 $x \in [a, +1]$(其中 $-1 < a < +1$), 本征值问题为

$$
\begin{gathered}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \lambda\psi(x),\ x \in (a, +1] \\
\lim_{x\to+1}\psi(x) < \infty;\quad \left.\left(\alpha\psi - \beta\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a} = 0
\end{gathered}
\tag{2.3.25a}
$$

如果仍然用式 (2.3.22c) 的二个线性独立解 $\psi_1(x,\nu)$ 和 $\psi_2(x,\nu)$, 由于包括端点 $x = +1$, $\nu$ 仍然必须是正整数 $\lambda_l = l(l+1)$, $(l = 0, 1, 2, \cdots)$, 以保证一个解在端点 $x = +1$ 为 $l$ 阶多项式. 似乎应该取 $\psi_l(x) = A_l P_l(x)$, 但它不可能满足 $x = a$ 处的边界条件 (即方程 (2.3.25a) 的第三式): 试代入边界条件得

$$
A_l\left[\alpha P_l(a) - \beta\frac{\mathrm{d}P_l(a)}{\mathrm{d}x}\right] = 0 \tag{2.3.25b}
$$

对任意的 $a$ 上式不可能成立, 除非 $A_l \equiv 0$.

因此, 必须寻求新形式的二个独立解. 注意到: 当以正则奇点 $x = 1$ 展开时, 反而能得到一个收敛区域为 $-1 < x < 2$ 的无穷级数解 (该级数解在端点 $x = +1$ 收敛, 但在另外一个端点 $x = -1$ 仍然发散, 但这个端点不在问题的区域内). 事实上, 设 Legendre 方程的一个正则解为

$$
\psi(x) = (x-1)^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-1)^k \tag{2.3.26a}
$$

代入 Legendre 方程得到指标 $\rho$ 满足的方程 $\rho(\rho+1) - \rho = 0$, 即 $\rho = 0$. 也就是说, 以 $x = 1$ 为展开中心得到的一个解在 $x = 1$ 是解析的, 不难得到这个解为

$$
P_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\cdot\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k \tag{2.3.26b}
$$

称为**第一类 Legendre 函数**(注意: 上式不是多项式! ), 函数 $P_\nu(x)$ 及其导数 $P'_\nu(x)$ 在零点的值为

$$
\begin{gathered}
P_\nu(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma[(1+\nu)/2]}{\Gamma(1+\nu/2)}\cos\frac{\nu\pi}{2} \\
P'_\nu(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma[(1+\nu)/2]}\sin\frac{\nu\pi}{2}
\end{gathered}
\tag{2.3.26c}
$$

利用关系 $\Gamma(\nu-k+1)=(\nu-k)\Gamma(\nu-k)$,$\Gamma(0)\to\infty$, 当 $\nu=n$(正整数) 时, $P_\nu(x)$ 退化为多项式 (利用 $\Gamma(n+1)=n!$)

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}\cdot\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k \tag{2.3.26d}$$

上式 $P_n(x)$ 的最高幂次系数为 $c_n=(2n)!/[(n!)^2 2^k]$, 与式 (2.1.24b) 中的 $P_n(x)$ 完全相同, 故上式的 $P_n(x)$ 就是 Legendre 多项式, 不过是用 $(x-1)$ 的幂次表示而已.

用 Wronski 法, 由 $P_\nu(x)$ 可以求得另一个在 $x=+1$ 发散的解, 用 $Q_\nu(x)$ 表示

$$Q_\nu(x)=P_\nu(x)\int_x^\infty\frac{1}{(x^2-1)[P_\nu(x)]^2}\mathrm{d}x \tag{2.3.27a}$$

当 $\nu=n$ 时, 上式与式 (2.3.23a) 一致, 故 $Q_\nu(x)$ 也称为**第二类 Legendre 函数**, 其级数形式为

$$\begin{aligned}Q_\nu(x)=&\frac{1}{2}P_\nu(x)\left[\ln\frac{1+x}{1-x}-2\gamma-2\frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\right]\\&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\cdot\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\end{aligned} \tag{2.3.27b}$$

其中 $\gamma=0.57721566\cdots$ 为 Euler 常数.

最后, 我们把 Legendre 方程的通解写为

$$\psi_\nu(x)=A_\nu P_\nu(x)+B_\nu Q_\nu(x) \tag{2.3.28a}$$

因为区间包含端点 $x=+1$, 故取 $B_\nu\equiv0$, 代入边界条件

$$\left.\left[\alpha P_\nu(x)-\beta\frac{\mathrm{d}P_\nu(x)}{\mathrm{d}x}\right]\right|_{x=a}=0 \tag{2.3.28b}$$

这就是决定本征值 $\nu$ 的方程, 设第 $k$ 个根为 $\nu_k$, $(k=0,1,2,\cdots)$, 归一化本征系为

$$\begin{aligned}&\psi_{\nu_k}(x)=\frac{1}{||\psi_{\nu_k}(x)||}P_{\nu_k}(x),\ (k=0,1,2,\cdots)\\&||\psi_{\nu_k}(x)||=\sqrt{\int_a^{+1}|P_{\nu_k}(x)|^2\mathrm{d}x}\end{aligned} \tag{2.3.28c}$$

函数系 $[\psi_{\nu_k}(x)]$ 构成 $x\in[a,+1]$ 上的正交、归一的完备系.

注意: ①此时的完备系不是 Legendre 多项式; ②也可以用通解式 (2.3.28a) 讨论区间为 $x\in[-1,+1]$ 的问题, 事实上, 如果区间包含端点 $x=\pm1$, 则 $Q_\nu(x)$ 要去

掉, 在端点 $x=-1$, $P_\nu(-1)$ 是发散级数, 取有限值的唯一可能是 $\nu=n$(正整数), $P_\nu(x)$ 退化为 Legendre 多项式.

**不包括端点情况**　当区域不包括二个端点, Legendre 算子的本征值问题是正则 S-L 问题. 此时, 在二个端点必须给出边界条件, 比如 $x\in[a,b]$(其中 $-1<a<b<+1$) 且满足第一类边界条件

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi\equiv-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right]=\lambda\psi,\ x\in(a,b)\\ \psi(a)=\psi(b)=0\end{gathered}\tag{2.3.29a}$$

在区域 $x\in[a,b]$ 内收敛的通解为

$$\psi_\nu(x)=A_\nu P_\nu(x)+B_\nu Q_\nu(x)\tag{2.3.29b}$$

其中 $\nu(\nu+1)=\lambda>0$. 代入边界条件

$$\begin{gathered}A_\nu P_\nu(a)+B_\nu Q_\nu(a)=0\\ A_\nu P_\nu(b)+B_\nu Q_\nu(b)=0\end{gathered}\tag{2.3.29c}$$

故决定本征值 $\lambda=\nu(\nu+1)$ 的方程为

$$P_\nu(a)Q_\nu(b)-P_\nu(b)Q_\nu(a)=0\tag{2.3.29d}$$

一旦求得本征值, 就可以求定义在区间 $x\in[a,+b]$ 上的正交、归一的完备系 (具体过程与得到式 (2.3.21a) 相仿, 故忽略).

注意：①不能把解写成 $\psi_n(x)=A_nP_n(x)+B_nQ_n(x)$, 因为这意味着本征值 $\lambda_n=n(n+1)$ 已经决定, 而这个解不可能满足边界条件. 事实上, 如果把解写成这样的话, 边界条件给出的方程是 $P_n(a)Q_n(b)-P_n(b)Q_n(a)=0$, 对任意的 $a$ 和 $b$, 这个方程是不成立的; ② 但通解可以写成

$$\psi_\nu(x)=A_\nu\psi_1(x,\nu)+B_\nu\psi_2(x,\nu)\tag{2.3.29e}$$

得到类似的结果.

**区间为 $x\in[0,+1]$ 情况**　这是区间包括一个端点的特殊情况, 但对第一、二类边界条件, 可以用延拓的方法来处理, 因为 Legendre 方程关于 $x$=0 点对称. 考虑本征值问题

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right]=\lambda\psi(x),\ x\in(0,+1]\\ \psi(+1)<\infty,\ \psi(0)=0\end{gathered}\tag{2.3.30a}$$

由于要求在 $x$=0 点满足 $\psi(0)=0$, 故奇延拓到 $x\in[-1,+1]$ 区域, 要求

$$\psi(x)=-\psi(-x),\ \psi(\pm1)<\infty \tag{2.3.30b}$$

由 Legendre 函数的性质 $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$, 只有当 $n$ 是奇数时 $P_n(x)$ 才是奇函数, 故式 (2.3.30a) 的解为

$$\begin{aligned}\psi_k(x)&=\sqrt{\frac{2(2k+1)+1}{2}}P_{2k+1}(x)\\ \lambda_k&=(2k+1)[(2k+1)+1],\ (k=0,1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{2.3.31a}$$

如果式 (2.3.30a) 中换成第二类边界条件 $\psi'(0)=0$, 则偶延拓到 $x\in[-1,+1]$ 区域, 要求 $\psi(x)=\psi(-x)$, $\psi(\pm1)<\infty$, 只有当 $n$ 是偶数时 $P_n(x)$ 才是偶函数, 故此时的解为

$$\begin{aligned}\psi_k(x)&=\sqrt{\frac{2(2k)+1}{2}}P_{2k}(x)\\ \lambda_k&=(2k)[(2k)+1],\ (k=0,1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{2.3.31b}$$

对第三类边界条件 $\alpha\psi(0)-\beta\psi'(0)=0$, 延拓方法不能用, 必须直接用方程 (2.3.28b)(取 $a=0$), 结合方程 (2.3.26c), 得到决定本征值的方程

$$\frac{2\beta}{\alpha}\left\{\frac{\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma[(1+\nu)/2]}\right\}^2\tan\frac{\nu\pi}{2}=1 \tag{2.3.31c}$$

解此超越方程就得到本征值, 归一化的本征函数由方程 (2.3.28c) 决定 (取 $a=0$). 注意：对第一、二类边界条件, 由方程 (2.3.31c) 不难得到 (2.3.31a) 和 (2.3.31b).

最后指出, 由于 Legendre 方程的变量 $x$ 与球坐标的 $\vartheta$ 关系为 $x=\cos\vartheta$, 故变量 $x\in[a,+1]$(其中 $-1<a<+1$) 相当于 $\vartheta\in[0,\arccos a]$, 即在球坐标的圆锥形区域考虑问题；变量 $x\in[0,+1]$ 相当于 $\vartheta\in[0,\pi/2]$, 即在上半空间考虑问题; 而变量 $x\in[a,b]$(其中 $-1<a<b<+1$) 相当于 $\vartheta\in[\arccos b,\arccos a]$, 即在球坐标的二个圆锥形之间的区域考虑问题.

**连带 Legendre 算子** Legendre 算子是连带 Legendre 算子的特殊情况

$$\boldsymbol{L}\equiv-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+\frac{m^2}{1-x^2} \tag{2.3.32a}$$

其中 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 因为 $m$ 以平方出现, 可以假定 $m\geqslant0$. 当 $m$=0 时, 即为 Legendre 算子. 定义在区域 $x\in[-1,+1]$ 上的连带 Legendre 算子的本征值问题为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right]+\frac{m^2}{1-x^2}\psi=\lambda\psi,\ x\in[-1,+1] \tag{2.3.32b}$$

并且要求 $\psi(\pm 1) < \infty$. 方程 (2.3.32b) 称为**连带 Legendre 方程**. 设上式的解为

$$\psi(x) = (1-x^2)^{m/2}\varPsi(x) \tag{2.3.32c}$$

代入连带 Legendre 方程 (2.3.32b) 得到 $\varPsi(x)$ 满足的方程

$$(1-x^2)\varPsi'' - 2(m+1)x\varPsi' + [\lambda - m(m+1)]\varPsi = 0 \tag{2.3.32d}$$

我们用归纳法证明: 方程 (2.3.32d) 可由 Legendre 方程求 $m$ 次导数得到. 把 Legendre 方程写成形式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{2.3.33a}$$

(1) 方程两边求 1 次导数得

$$(1-x^2)[y']'' - 2(1+1)x[y']' + [\lambda - 1\cdot(1+1)][y'] = 0 \tag{2.3.33b}$$

即 $m=1$ 时结论成立!

(2) 设对 Legendre 方程求 $m=k-1$ 次导数后, 下式成立

$$(1-x^2)[y^{(k-1)}]'' - 2(k-1+1)x[y^{(k-1)}]' + [\lambda - (k-1)(k-1+1)][y^{(k-1)}] = 0$$

(3) 对上式求 1 次导数后得到

$$(1-x^2)[y^{(k)}]'' - 2(k+1)x[y^{(k)}]' + [\lambda - k(k+1)][y^{(k)}] = 0 \tag{2.3.33c}$$

即 $m=k$ 时结论也成立!

因此, 方程 (2.3.32d) 的解是 Legendre 方程 (2.3.33a) 解的 $m$ 阶导数, 故连带 Legendre 方程 (2.3.32b) 的通解可表示为

$$\psi_\nu^m(x) = A_\nu^m P_\nu^m(x) + B_\nu^m Q_\nu^m(x) \tag{2.3.34a}$$

其中

$$\begin{aligned} P_\nu^m(x) &= (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_\nu(x)}{\mathrm{d}x^m} \\ Q_\nu^m(x) &= (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m Q_\nu(x)}{\mathrm{d}x^m} \end{aligned} \tag{2.3.34b}$$

式中第一、二类 Legendre 函数 $P_\nu(x)$ 和 $Q_\nu(x)$ 由方程 (2.3.26b) 和 (2.3.27b) 决定, $P_\nu^m(x)$ 和 $Q_\nu^m(x)$ 分别称为**第一、二类连带 Legendre 函数**. 与 $P_\nu(x)$ 和 $Q_\nu(x)$ 一样, $P_\nu^m(x)$ 在 $x=+1$ 有界, 但在 $x=-1$ 发散, $P_\nu^m(x)$ 在 $x=-1$ 有界的唯一可能

是 $\nu = n$(正整数); $Q_\nu^m(x)$ 在 $x = \pm 1$ 都发散. 当 $\nu = n$(正整数), $P_n(x)$ 是 $n$ 阶多项式, 故要求 $m < n$.

总之, 定义在区间 $x \in [-1, +1]$ 上的连带 Legendre 算子本征值问题的解为

$$\begin{aligned}&\psi_n^m(x) = \frac{1}{||\psi_n^m(x)||} P_n^m(x),\ x \in [-1, +1] \\ &\lambda_n = n(n+1),\ (n = 0, 1, 2, \cdots;\ m < n)\end{aligned} \tag{2.3.35a}$$

其中模 $||\psi_n^m(x)||$ 为

$$||\psi_n^m(x)|| = \sqrt{\int_{-1}^{+1} [P_n^m(x)]^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot \frac{2}{2l+1}} \tag{2.3.35b}$$

其完备性在 2.1.4 小节中已讨论, 这里不再重复.

对定义在不同区间上的连带 Legendre 算子本征值问题的讨论也与 Legendre 算子类似, 如 $x \in [a, +1]$ 和 $x \in [a, b]$, 只要把诸式中出现的 $P_\nu(x)$ 改成 $P_\nu^m(x)$ 就可以了. 所不同的是, 当 $x \in [0, +1]$ 时, 第一类连带 Legendre 函数的奇偶性方程为 $P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(-x)$, 奇偶性与 $m$ 有关: 当 $n + m$ 为奇数时, $P_n^m(x)$ 为奇函数; 当 $n + m$ 为偶数时, $P_n^m(x)$ 为偶函数.

必须指出的是, 如果 $m$ 不是整数 (实际问题较少遇到), 就没有式 (2.3.34b) 那样简单的求导数关系, 必须用级数展开法 (一般取正则奇点 $x = 1$ 为展开中心) 严格求解连带 Legendre 方程 (2.3.32b) 或者 (2.3.32d).

### 2.3.4 S-L 多项式系统和 Laguerre 多项式

考虑一般形式二阶方程的本征值问题

$$\alpha(x) \frac{\mathrm{d}^2 \psi}{\mathrm{d}x^2} + \beta(x) \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + [\gamma(x) + \lambda] \psi(x) = 0 \tag{2.3.36a}$$

显然, 作变换

$$\begin{gathered}p(x) = \exp\left[\int \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \mathrm{d}x\right];\ q(x) = -\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} p(x) \\ \rho(x) = \frac{p(x)}{\alpha(x)}\end{gathered} \tag{2.3.36b}$$

可化成 S-L 问题. 为了 $\psi(x)$ 具有多项式解, 要求方程的系数 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 及 $\gamma(x)$ 满足: $\alpha(x)$ 至多是二阶多项式, $\beta(x)$ 至多是一阶多项式, 而 $\gamma(x)$ 是常数

$$\begin{aligned}&\alpha(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \\ &\beta(x) = \beta_1 x + \beta_0 \\ &\gamma(x) = \gamma_0\end{aligned} \tag{2.3.36c}$$

注意到 $\gamma_0$ 为常数相当于本征值 $\lambda$ 作平移, 而不增加新的内容, 可令 $\gamma_0 = 0$. 因此, S-L 多项式系统的形式为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\rho(x)\alpha(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \lambda\rho(x)\psi(x) \tag{2.3.37a}$$

下面分三种情况讨论具有多项式解的 S-L 方程

(1) $\alpha(x)$ 是二阶多项式

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{\beta_1 x + \beta_0}{\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0}\mathrm{d}x\right) \tag{2.3.37b}$$

如果取 $\alpha_2 = -1$, 且 $\alpha(x) = 0$ 的根在 $x = \pm 1$ 处, 令 $\beta_0 = q - p$ 和 $\beta_1 = -(p+q+2)$, 则

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{-(p+q+2)x + q - p}{1 - x^2} = \frac{q+1}{1+x} - \frac{p+1}{1-x} \tag{2.3.38a}$$

$$p(x) = (1+x)^{q+1}(1-x)^{p+1}; q(x) = -\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}p(x) = 0 \tag{2.3.38b}$$

$$\rho(x) = \frac{p(x)}{\alpha(x)} = \frac{(1+x)^{q+1}(1-x)^{p+1}}{1-x^2} = (1+x)^q(1-x)^p \tag{2.3.38c}$$

这时的多项式解称为定义在区域 $[-1,1]$ 且指标为 $(q,p)$ 的 Jacobi 多项式, 记为 $P_n^{q,p}(x)$, 满足的 S-L 多项式系统称为 Jacobi 方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+x)^{q+1}(1-x)^{p+1}\frac{\mathrm{d}P_n^{q,p}(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \lambda(1+x)^q(1-x)^p P_n^{q,p}(x) \tag{2.3.38d}$$

特别是：①当取 $q = p = -1/2$, $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, 记 $P_n^{-1/2,-1/2}(x) = T_n(x)$, 则 $T_n(x)$ 满足的 S–L 多项式系统称为第一类 Chebyshev 方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}T_n(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x) \tag{2.3.39a}$$

多项式 $T_n(x)$ 就是我们在 2.1.3 小节中已讨论的第一类 Chebyshev 多项式集; ② 当取 $q = p = 1/2$,$\rho(x) = (1-x^2)^{1/2}$, 记 $P_n^{1/2,1/2}(x) = U_n(x)$, 则 $U_n(x)$ 满足的 S-L 多项式系统称为第二类 Chebyshev 方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}U_n(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \lambda\sqrt{1-x^2}U_n(x) \tag{2.3.39b}$$

③当取 $q = p = 0$,$\rho(x) = 1$, 这时的多项式即为 Legendre 多项式, 记 $P_n^{0,0}(x) = P_n(x)$, 则 $P_n(x)$ 满足 Legendre 方程.

(2) $\alpha(x)$ 是一个线性函数: 总可通过平移坐标使 $\alpha(x) = x$, 故

$$\begin{aligned} p(x) &= \exp\left(\int \frac{\beta_1 x + \beta_0}{x} \mathrm{d}x\right) = x^{\beta_0} \mathrm{e}^{\beta_1 x} \\ \rho(x) &= \frac{1}{\alpha(x)} p(x) = x^{(\beta_0 - 1)} \mathrm{e}^{\beta_1 x} \end{aligned} \tag{2.3.40a}$$

如果 $\beta_0 > 1$, 则 $\rho(0) = 0$. 因此可定义: 当 $x \leqslant 0$ 时,$\rho(x) = 0$, 令 $\beta_0 - 1 = \nu$ 和 $\beta_1 = -1$, 可得

$$p(x) = x^{\nu+1} \mathrm{e}^{-x};\ \rho(x) = x^{\nu} \mathrm{e}^{-x} \tag{2.3.40b}$$

具有这种权函数且定义在 $x \in (0, \infty)$ 区域上的正交多项式称为**连带 Laguerre 多项式**, 记为 $L_n^{\nu}(x)$, 满足的 S-L 多项式系统称为**连带 Laguerre 方程**

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\nu+1} \mathrm{e}^{-x} \frac{\mathrm{d}L_n^{\nu}(x)}{\mathrm{d}x}\right] = n x^{\nu} \mathrm{e}^{-x} L_n^{\nu}(x) \tag{2.3.40c}$$

或者

$$x \frac{\mathrm{d}^2 L_n^{\nu}(x)}{\mathrm{d}x^2} + [(\nu+1) - x] \frac{\mathrm{d}L_n^{\nu}(x)}{\mathrm{d}x} + n L_n^{\nu}(x) = 0 \tag{2.3.40d}$$

若 $\nu = 0$, 则 $L_n^0(x) \equiv L_n(x)$ 称为 **Laguerre 多项式**(见下面详细讨论).

(3) $\alpha(x) =$ 常数, 可选择 $\alpha = 1$, 于是

$$\begin{aligned} p(x) &= \exp[\int (\beta_1 x + \beta_0) \mathrm{d}x] = \exp\left(\beta_1 \frac{x^2}{2} + \beta_0 x\right) \\ &= \exp\left[-\frac{\beta_1}{2}\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^2\right] \exp\left[\frac{\beta_1}{2}\left(x + \frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{2.3.41a}$$

如果选择 $\beta_1 < 0$, 使 $|x| \to \infty$ 时 $p(x)$ 指数衰减, 取 $\beta_1 = -2$ 和 $\beta_0 = 0$, 则

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2};\ p(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \tag{2.3.41b}$$

具有这种权函数且定义在 $x \in (-\infty, \infty)$ 区域上的正交多项式称为 **Hermite 多项式**, 记为 $H_n(x)$, 满足的 S–L 多项式系统称为 **Hermite 方程**

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x^2} \frac{\mathrm{d}H_n(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \lambda \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x) \tag{2.3.41c}$$

本节将详细讨论 Hermite 多项式.

可以证明, 除了上述所讲的多项式外, 不存在更多的多项式, 它们是二阶微分方程的解.

设方程 (2.3.36a) 的解为 $n$ 次多项式

$$\psi(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k \tag{2.3.42a}$$

代入方程 (2.3.36a) 且利用 (2.3.36c), 令第 $n$ 次幂的系数为零得到

$$[\alpha_2 n(n-1)+\beta_1 n+\lambda]a_n=0 \tag{2.3.42b}$$

故本征值分布为

$$\lambda_n=-n[\alpha_2(n-1)+\beta_1] \tag{2.3.42c}$$

Jacobi 多项式:

$$\alpha_2=-1,\beta_1=-(q+p+2),\lambda_n=n(n+q+p+1) \tag{2.3.43a}$$

Legendre 多项式:

$$\alpha_2=-1,\beta_1=-2,\lambda_n=n(n+1) \tag{2.3.43b}$$

第一类 Chebyshev 多项式:

$$\alpha_2=-1,\beta_1=-1,\lambda_n=n^2 \tag{2.3.43c}$$

第二类 Chebyshev 多项式:

$$\alpha_2=-1,\beta_1=-3,\lambda_n=n(n+2) \tag{2.3.43d}$$

Hermite 多项式:

$$\alpha_2=0,\beta_1=-2,\lambda_n=2n \tag{2.3.43e}$$

Laguerre 多项式:

$$\alpha_2=0,\beta_1=-1,\lambda_n=n \tag{2.3.43f}$$

显然, 均有 $\lambda_n\geqslant 0$, 并且满足 S-L 问题的性质 4.

从 Legendre 和 Chebyshev 多项式 (以及下面将介绍的 Hermite 与 Laguerre 多项式) 可看出, 这些正交多项式都可以由 Rodrigue 公式表示成微分形式, 这绝非偶然. 另外, 以上的讨论仅仅能告诉我们存在多项式形式解的 S-L 多项式系统, 必须求解这些方程, 才能给出多项式的具体形式. 下面介绍的定理给出了各种多项式的 Rodrigue 的公式.

定义函数系列

$$Q_n(x)=\frac{1}{\rho(x)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[\rho(x)\alpha^n(x)],\ \ (n=0,1,2,\cdots) \tag{2.3.44a}$$

如果 $Q_n(x)$ 满足 3 个条件：①$Q_1(x)$ 是 $x$ 的一次多项式；②$\alpha(x)$ 至多是 $x$ 的二次多项式且只有实零点；③在开区间 $(a,b)$,$\rho(x)>0$ 可积, 在端点满足 $\rho(a)\alpha(a)=0=\rho(b)\alpha(b)$, 则有结论：

(1) 函数系 $\{Q_n(x)\}$ 是区间 $(a,b)$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式集

$$\int_a^b Q_n(x)Q_m(x)\rho(x)\mathrm{d}x=||Q_m(x)||^2\delta_{nm} \tag{2.3.44b}$$

(2) $Q_n(x)$ 满足 S-L 多项式系统

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\rho(x)\alpha(x)\frac{\mathrm{d}Q_n(x)}{\mathrm{d}x}\right]=\lambda_n\rho(x)Q_n(x) \tag{2.3.44c}$$

其中 $\lambda_n=-[\alpha_2 n(n-1)+\beta_1 n]$,$\alpha_2$ 是 $\alpha(x)$ 的二次项系数, $\beta_1$ 是 $Q_1(x)$ 的一次项系数.

上述定理的证明较为繁复, 故略. 我们由定理成立的 3 个条件出发, 导出各种多项式集. 由第 1 个条件得到

$$Q_1(x)=\frac{1}{\rho(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\rho(x)\alpha(x)]=\beta_1x+\beta_0 \tag{2.3.44d}$$

由此得到

$$\alpha(x)\rho(x)=\exp\left[\int\frac{\beta_1x+\beta_0}{\alpha(x)}\mathrm{d}x\right] \tag{2.3.44e}$$

注意: 对照方程 (2.3.36b), 这里的一次多项式 $\beta_1x+\beta_0$ 就是方程 (2.3.36c) 中的 $\beta(x)$. 再由第 2 个条件, 设 $\alpha(x)=\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$

$$\alpha(x)\rho(x)=\exp\left(\int\frac{\beta_1x+\beta_0}{\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0}\mathrm{d}x\right) \tag{2.3.44f}$$

分 3 种情况讨论：

(1) $\alpha(x)$ 是常数 $\alpha(x)=\alpha_0$

$$\begin{aligned}\rho(x)&=\frac{1}{\alpha_0}\exp\left[\frac{1}{\alpha_0}\int(\beta_1x+\beta_0)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\alpha_0}\exp\left[\frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{1}{2}\beta_1x^2+\beta_0x\right)\right]\end{aligned} \tag{2.3.45a}$$

注意：上式与方程 (2.3.41a) 类似. 利用第 2 个条件：$\rho(a)\alpha(a)=0=\rho(b)\alpha(b)$, 即

$$\exp\left[\frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{1}{2}\beta_1a^2+\beta_0a\right)\right]=\exp\left[\frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{1}{2}\beta_1b^2+\beta_0b\right)\right]=0 \tag{2.3.45b}$$

上式成立的条件是 $\beta_1/\alpha_0 < 0$, 以及 $(a, b) \to (-\infty, +\infty)$, 故多项式 $Q_n(x)$ 定义在无限大区间 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上. 由方程 (2.3.45a)

$$\rho(x) = C_0 \exp\left[\frac{\beta_1}{2\alpha_0}\left(x - \frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^2\right] \tag{2.3.45c}$$

其中 $C_0$ 是与 $x$ 无关的常数, 由于方程 (2.3.44a) 中, $\rho(x)$ 在分子、分母中各出现一次, $C_0$ 最后不出现. 通过适当的坐标变换, 或者取 $\beta_0 = 0$ 和 $\beta_1/2\alpha_0 = -1$,$\rho(x)$ 可以简化为 (注意 $\beta_1/\alpha_0 < 0$)

$$\rho(x) = C_0 \mathrm{e}^{-x^2} \tag{2.3.45d}$$

于是, 定义在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上的正交多项式为

$$Q_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x^2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2},\ (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.3.45e}$$

上式乘以适当的系数后就是 Hermite 多项式. 显然, $Q_1(x) = -2x$, 故 $\beta_1 = -2$, $\lambda_n = 2n$. $Q_n(x)$ 满足的本征方程即为方程 (2.3.41c). 在 2.3.3 小节还要专门讨论 Hermite 多项式.

(2) $\alpha(x)$ 是线性函数 $\alpha(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$

$$\alpha(x)\rho(x) = \exp\left(\int \frac{\beta_1 x + \beta_0}{\alpha_1 x + \alpha_0} \mathrm{d}x\right) = C_1(\alpha_1 x + \alpha_0)^\alpha \mathrm{e}^{\beta x} \tag{2.3.46a}$$

其中 $C_1$ 是与 $x$ 无关的常数, $\beta \equiv \beta_1/\alpha_1$ 和 $\alpha \equiv \beta_0 - \alpha_0\beta_1/\alpha_1$. 利用第 2 个条件

$$(\alpha_1 a + \alpha_0)^\alpha \mathrm{e}^{\beta a} = (\alpha_1 b + \alpha_0)^\alpha \mathrm{e}^{\beta b} = 0 \tag{2.3.46b}$$

上式成立的条件是：(1)$(\alpha_1 a + \alpha_0)^\alpha = 0$, 即 $a = -\alpha_0/\alpha_1$, $\alpha > 0$；(2) $b \to \infty$, $\beta < 0$. 注意：不能同时取 $a \to \infty$, 这样问题的区域就为零了. 于是

$$\rho(x) = C_1(\alpha_1 x + \alpha_0)^{\alpha - 1} \mathrm{e}^{-|\beta| x} \tag{2.3.46c}$$

通过适当变换, 或者取 $\alpha_1 = 1$, $\alpha_0 = 0$(意味着 $a = 0$), $|\beta| = 1$ 以及 $\nu = \alpha - 1 > -1$, 得到权函数和 $\alpha(x)$ 为

$$\rho(x) = x^\nu \mathrm{e}^{-x};\ \alpha(x) = x \tag{2.3.47a}$$

故定义在半无限大区间 $x \in (0, \infty)$ 上的正交多项式为

$$Q_n^\nu(x) = \frac{1}{x^\nu \mathrm{e}^{-x}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^{\nu + n} \mathrm{e}^{-x}) \tag{2.3.47b}$$

上式乘以适当的系数后就是**连带 Laguerre 多项式**. 显然, $Q_1^\nu(x)=-x+(\nu+1)$, 故 $\beta_1=-1,\lambda_n=n$. $Q_n^\nu(x)$ 满足的本征方程为方程 (2.3.40c). 一般把连带 Laguerre 多项式记为 $L_n^\nu(x)$, 即

$$L_n^\nu(x)=\frac{1}{n!}x^{-\nu}\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^{\nu+n}\mathrm{e}^{-x}),\ (\nu>-1) \tag{2.3.47c}$$

满足正交性关系

$$\int_0^\infty \rho(x)L_n^\nu(x)L_m^\nu(x)\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{n!}\delta_{nm} \tag{2.3.47d}$$

其中权函数 $\rho(x)=x^\nu\mathrm{e}^{-x}$. 当 $\nu=0$ 时, 记 $L_n^0(x)\equiv L_n(x)$, 即

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x}) \tag{2.3.47e}$$

称为 **Laguerre 多项式**, 其正交性关系为

$$\int_0^\infty L_n(x)L_m(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\delta_{nm} \tag{2.3.48a}$$

函数系

$$\{\psi_n(x)\}=\{L_n(x);\ \rho(x)=\mathrm{e}^{-x}\} \tag{2.3.48b}$$

构成 Hilbert 空间 $L^2(0,\infty)$ 上正交、归一的完备的系, 故对任一 $f(x)\in L^2(0,\infty)$ 带权 $\mathrm{e}^{-x}$ 平方可积函数

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty \tag{2.3.49a}$$

可展成广义 Fourier 级数

$$f(x)\cong\sum_{n=0}^\infty(\psi_n,f)\ \psi_n(x) \tag{2.3.49b}$$

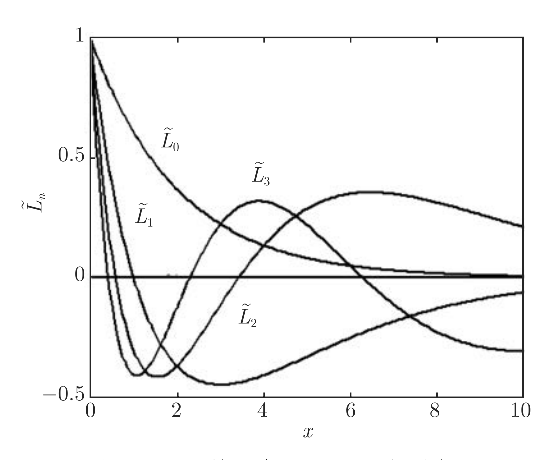



图 2.3.1 前四个 Laguere 多项式

前四个 Laguerre 多项式

$$L_0(x)=1;\ L_1(x)=1-x$$
$$L_2(x)=1-2x+\frac{1}{2}x^2 \tag{2.3.49c}$$
$$L_3(x)=1-3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$$

其图象见图 2.3.2, 图中的曲线为函数 $\tilde{L}_n(x)=\mathrm{e}^{-x/2}L_n(x)$.

(3) $\alpha(x)$ 是二次函数 $\alpha(x)=\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$, 与讨论方程 (2.3.38a) 类似, 我们得到

$$\rho(x)=(1+x)^q(1-x)^p;\ \alpha(x)=1-x^2 \tag{2.3.50a}$$

相应的多项式 $Q_n(x)$ 为

$$Q_n^{q,p}(x)=\frac{1}{(1+x)^q(1-x)^p}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(1+x)^{q+n}(1-x)^{p+n}] \tag{2.3.50b}$$

乘以适当的系数后就是 Jacobi 多项式. 显然, $Q_1^{q,p}(x)=q-p-(p+q+2)x$, 故 $\beta_1=-(p+q+2)$, $\lambda_n=n(n+p+q+1)$. $Q_n^{q,p}(x)$ 满足的本征方程为方程 (2.3.38d). 特殊情况: (1) 当取 $q=p=-1/2$, $\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$, 多项式为

$$Q_n^{-1/2,-1/2}(x)=\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right] \tag{2.3.51a}$$

乘以适当的系数后就是第一类 Chebyshev 多项式 $T_n(x)$; (2) 当取 $q=p=1/2$ 和 $\rho(x)=(1-x^2)^{1/2}$, 多项式为

$$Q_n^{1/2,1/2}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\sqrt{1-x^2}(1-x^2)^n\right] \tag{2.3.51b}$$

乘以适当的系数后就是第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$; (3) 如果取 $q=p=0$, $\rho(x)=1$ 和 $p(x)=1-x^2$, 多项式集为

$$Q_n^{0,0}(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(1-x^2)^n] \tag{2.3.51c}$$

乘以适当的系数后就是 Legendre 多项式多项式 $P_n(x)$

**完备性** S-L 多项式系统的多项式集 $\{Q_n(x)\}$ 是 $L^2(a,b)]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交、完备系 (证明见第四章), 即对任意 $f(x)\in L^2(a,b)]$, 存在广义 Fourier 展开

$$f(x)\cong\sum_{n=0}^{\infty}a_nQ_n(x)$$
$$a_n=\frac{1}{||Q_n(x)||^2}\int_a^b f(x)Q_n^*(x)\rho(x)\mathrm{d}x \tag{2.3.52a}$$

其中 $||Q_n(x)||$ 为 $Q_n(x)$ 的模

$$||Q_n(x)|| = \sqrt{\int_a^b \rho(x)|Q_n(x)|^2 \mathrm{d}x} \tag{2.3.52b}$$

Legendre 多项式、Hermite 多项式和 Laguerre 多项式分别是定义在三个典型区间, 即有限区间 $[-1,+1]$、无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 和半无限区间 $(0,+\infty)$ 上的完备多项式集, 也是最为简单的多项式集.

### 2.3.5 Hermite 多项式

Hermite 多项式还是 Fourier 积分算子的本征函数, 在数学上也有重要的应用 (见 5.4.1 小节讨论), 故我们进一步详细讨论 Hermite 多项式.

**Hermite 多项式**: 记 Hermite 多项式为 $H_n(x)$, 有微分公式

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} \tag{2.3.53a}$$

下面来证明由上式定义的 $H_n(x)$ 确是正交多项式集, 即证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = ||H_n||^2 \delta_{nm} \tag{2.3.53b}$$

用比较简单的方法证明上式, 为此介绍 $H_n(x)$ 的母函数 $\psi(x,t)$

$$\psi(x,t) = \exp(-t^2 + 2tx) \tag{2.3.54a}$$

把 $\psi(x,t)$ 看成 $t$ 的函数作幂级数展开

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x)}{n!} t^n \tag{2.3.54b}$$

显然有

$$\begin{aligned} a_n(x) = & \left.\frac{\partial^n \psi(x,t)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = \mathrm{e}^{x^2} \left.\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathrm{e}^{-(t-x)^2}\right]\right|_{t=0} \\ & = \mathrm{e}^{x^2} \left.\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n} \mathrm{e}^{-y^2}\right)\right|_{y=-x} = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned} \tag{2.3.54c}$$

因此 $a_n(x) = H_n(x)$. 由于 $H_n(x)$ 是 $\psi(x,t)$ 的幂级数展开系数, 故称 $\psi(x,t)$ 为 $H_n(x)$ 的**母函数**. 考虑积分且注意到式 (2.3.54b) 和 (2.3.54c)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) \cdot \psi(x,s) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n s^n}{n!m!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.3.55a}$$

而上式左边直接用 (2.3.54a) 得到

$$
\begin{aligned}
I &= \mathrm{e}^{-(s^2+t^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-(s^2+t^2)}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{(s+t)^2}\\
&=\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{2st}=\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2st)^n}{n!}
\end{aligned}
\tag{2.3.55b}
$$

比较同次幂得

$$
\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)H_m(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}2^n n!\delta_{nm} \tag{2.3.55c}
$$

故 $||H_n||^2=\sqrt{\pi}2^n n!$. 函数系

$$
\{\psi_n(x)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}}H_n(x);\ \rho(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\right\} \tag{2.3.55d}
$$

构成 Hilbert 空间 $L^2(-\infty,+\infty)$ 上正交、归一的完备系, 故对任一 $f(x)\in L^2(-\infty,+\infty)$ 带权 $\exp(-x^2)$ 平方可积函数

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty \tag{2.3.56a}
$$

可展成广义 Fourier 级数

$$
f(x)\cong\sum_{n=0}^{\infty}(\psi_n,f)\ \psi_n(x) \tag{2.3.56b}
$$

显然, 由于式 (2.3.56a) 中积分带权 $\rho(x)=\exp(-x^2)$, 故对 $f(x)$ 的条件相当宽, 例如 $f(x)=x^k$, $(k<\infty)$, 尽管 $x\to\infty$ 时, $f(x)\to\infty$, 但仍满足式 (2.3.56a), 也能展成级数形式.

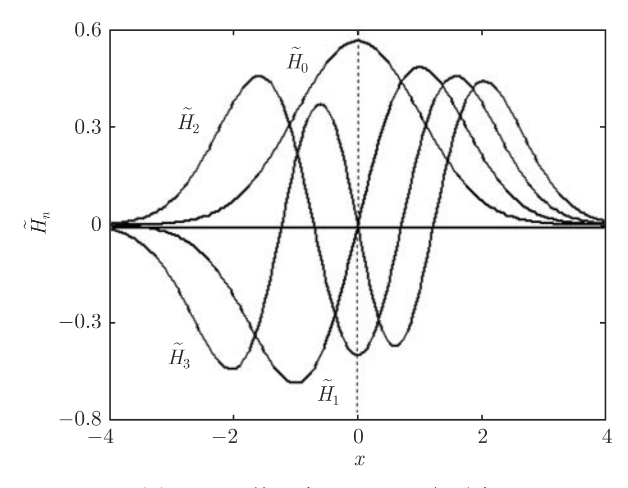



图 2.3.2　前四个 Hermite 多项式

前四个 Hermite 多项式

$$\begin{gathered}H_0(x)=1;\ H_1(x)=2x\\ H_2(x)=4x^2-2;\ H_3(x)=8x^3-12x\end{gathered} \tag{2.3.57a}$$

的图象见图 2.3.2, 注意图中的曲线为函数

$$\tilde{H}_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x) \tag{2.3.57b}$$

**递推关系** 由式 (2.3.54a), 两边对 $x$ 微分有

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=2t\psi(x,t) \tag{2.3.58a}$$

故有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}\ t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_n(x)}{n!}t^{n+1} \tag{2.3.58b}$$

比较 $t$ 的同次幂得到 $H_n(x)$ 的导数递推关系式

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x),\ (n\geqslant 1) \tag{2.3.58c}$$

同样从

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-2(t-x)\psi=0 \tag{2.3.59a}$$

可得 $H_n(x)$ 的函数递推关系式

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0,\ (n\geqslant 1) \tag{2.3.59b}$$

由上式和 (2.3.58c) 可推出 $H_n(x)$ 满足 Hermite 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2H_n(x)}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}H_n(x)}{\mathrm{d}x}+2nH_n(x)=0,\ (n\geqslant 1) \tag{2.3.59c}$$

写成 S-L 形式即

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\frac{\mathrm{d}H_n(x)}{\mathrm{d}x}\right]=\lambda_n\mathrm{e}^{-x^2}H_n(x) \tag{2.3.59d}$$

其中 $\lambda_n=2n$.

**例 2.3.3** 考虑质量为 $m$ 的微观粒子在势场 $U(x)=m\omega^2x^2/2$ 作用下的微振动, 粒子振动能量 $E$ 是下列本征值问题的解

$$\begin{gathered}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x)=E\psi(x),\ x\in(-\infty,+\infty)\\ \lim_{x\to\pm\infty}\psi(x)=0\end{gathered} \tag{2.3.60a}$$

其中 $\hbar$ 是约化 Planck 常数, $\omega$ 是常数. 为了方便, 对上式无量纲化处理, 令 $\xi \equiv \alpha x$、$\lambda = 2E/\hbar\omega$ 以及 $\alpha \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$, 方程 (2.3.60a) 变成

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0, \xi \in (-\infty, +\infty) \\ \lim_{\xi\to\pm\infty} \psi(\xi) = 0\end{gathered} \tag{2.3.60b}$$

其中 $\lambda$ 就是由自然边界条件 $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} \psi(\xi) = 0$ 决定的本征值. 函数 $\psi(\xi)$ 在无限远点渐近特性由下列近似方程决定

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi^2\psi \approx 0, \ (\xi \to \pm\infty) \tag{2.3.60c}$$

上式的近似解为 $\psi(\xi) \to \exp(\pm\xi^2/2)$. 为了保证 $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} \psi(\xi)=0$, 取 $\psi(\xi) \to \exp(-\xi^2/2)$, 令方程 (2.3.60b) 的解为 $\psi(\xi) \equiv \exp(-\xi^2/2)H(\xi)$, 则 $H(\xi)$ 满足的方程就是 Hermite 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\xi} + (\lambda - 1)H = 0 \tag{2.3.60d}$$

显然, $\xi = 0$ 是 Hermite 方程的常点, 设级数形式的解为

$$H(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \xi^\nu \tag{2.3.61a}$$

把上式代入方程 (2.3.60d) 得到系数 $a_\nu$ 的递推关系

$$a_{\nu+2} = \frac{2\nu - (\lambda - 1)}{(\nu + 2)(\nu + 1)} a_\nu \tag{2.3.61b}$$

容易计算

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+2}}{a_\nu} = \frac{2}{\nu} \tag{2.3.61c}$$

另一方面, 下列级数展开

$$\mathrm{e}^{\xi^2} = 1 + \xi^2 + \frac{\xi^4}{2!} + \cdots + \frac{\xi^\nu}{(\nu/2)!} + \frac{\xi^{\nu+2}}{(\nu/2 + 1)!} + \cdots \tag{2.3.61d}$$

的系数比也为方程 (2.3.61c). 因此, $H(\xi)$ 必有特性 $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} H(\xi) = \exp(\xi^2)$, 即 $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} \psi(\xi) = \exp(\xi^2/2)$. 满足 $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} \psi(\xi) = 0$ 的唯一可能是 $H(\xi)$ 退化为多项式. 由递推关系式 (2.3.61b), 当 $\lambda = 2n + 1$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 时, 无穷级数退化为 $n$ 阶多项式. 此时的多项式解就是 Hermite 多项式, 另外一个解在无穷远处发散. 于是, 粒子的能量本征值为

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.3.62a}$$

相应的本征函数为 (没有归一化)

$$\psi_n(\xi) \equiv \exp(-\xi^2/2)H_n(\xi). \tag{2.3.62b}$$

# 2.4 有界区域定解问题的分离变量法

利用前面各节的内容, 现在讨论三个基本方程, 即波动方程、热传导方程和 Laplace 方程在有界区域内定解问题的分离变量法. 考虑较为一般的方程 (1.1.36a), (1.1.36b) 和 (1.1.36c), 三个方程分别代表非均匀介质的波动、热传导和热平衡. 必须提醒的是, 边界条件的齐次化是分离变量法可否使用的关键, 反之, 问题要复杂得多. 最后, 讨论运用分离变量法求解含有非 Hermite 对称算子的定解问题.

### 2.4.1 波动方程的齐次混合问题

考虑有限空间 $G$ 内的齐次混合问题 (注意: 边界条件和方程都是齐次的)

$$\begin{gathered}\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}u=0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\ u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=f(\boldsymbol{r});\ u_t|_{t=0}=g(\boldsymbol{r})\ ;\ \boldsymbol{r}\in\partial G+G\\ \left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered} \tag{2.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$, $(\boldsymbol{r}\in G)$, $\alpha/\beta\geqslant 0$ 或者 $\beta/\alpha\geqslant 0$(但 $\alpha$ 与 $\beta$ 不同时为零), 所有的系数都是实函数, 故 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称算子. 用分离变量法求解上述问题, 首先, 作空间和时间变量之间的分离

$$u(\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r})T(t) \tag{2.4.2a}$$

代入方程 (2.4.1) 的第一式

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=-\frac{\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r})}{\rho(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})}\equiv-\lambda \tag{2.4.2b}$$

其中 $\lambda$ 为分离变量引进的常数, 于是有

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r})=\lambda\rho(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left.\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered} \tag{2.4.2c}$$

以及

$$T''(t)+\lambda T(t)=0 \tag{2.4.2d}$$

显然方程 (2.4.2c) 构成本征值问题. 由 2.1 节的讨论, $\boldsymbol{L}$ 在齐次边界条件下是 Hermite 对称算子. 特别, 在一维情形, 方程 (2.4.2c) 变成

$$
\begin{gathered}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)+q\psi=\lambda\rho(x)\psi(x),\ x\in(a,b)\\
\left.\left(\alpha_1\psi-\beta_1\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a}=0;\quad \left.\left(\alpha_2\psi+\beta_2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b}=0
\end{gathered}
\tag{2.4.3}
$$

上式为 S-L 本征值问题.

设本征值问题式 (2.4.2c) 的解为 $\{\psi_n(\boldsymbol{r}),\lambda_n,\ (n=0,12,\cdots)\}$, 由叠加原理 (注意: 这里仅仅用到叠加原理, 不要求 $\{\psi_n(\boldsymbol{r})\}$ 的完备), 方程 (2.4.1) 的解可写成形式

$$
u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.4a}
$$

其中 $T_n(t)$ 由方程 (2.4.2d) 决定

$$
T_n(t)=a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t \tag{2.4.4b}
$$

其中, 为了方便令 $\omega_n\equiv\sqrt{\lambda_n}$, 系数 $a_n$ 和 $b_n$ 由初始条件决定

$$
\begin{gathered}
u|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})\\
u_t|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n b_n\psi_n(\boldsymbol{r})=g(\boldsymbol{r})
\end{gathered}
\tag{2.4.4c}
$$

假定由方程 (2.4.2c) 求得的本征函数系 $\{\psi_n\}$ 构成正交、归一的完备系, 上二式右边能展成广义 Fourier 级数

$$
f(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,f)\psi_n(\boldsymbol{r});\ g(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,g)\ \psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.4d}
$$

其中内积带权 $\rho(\boldsymbol{r})$, 例如

$$
(\psi_n,f)=\int_G\rho(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{2.4.5a}
$$

于是

$$
a_n=(\psi_n,f);\ b_n=\frac{1}{\omega_n}(\psi_n,g) \tag{2.4.5b}
$$

因此, 我们求得混合问题方程 (2.4.1) 的级数解为

$$
u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\psi_n,f)\cos\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}(\psi_n,g)\sin\omega_n t\right]\ \psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.6a}
$$

由于算子 $\boldsymbol{L}$ 在第一、三类边界条件下是正算子, 故 $\omega_n \neq 0$ 且 $\omega_n > 0$; 但在第二类边界条件下, 当 $\omega_0 = 0$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的本征值, 上式不成立. 从式 (2.4.4c) 可知, 当 $\omega_n \neq 0$ 时, 式 (2.4.5b) 成立, 而 $b_0$ 的方程则为

$$\omega_0 b_0 = (\psi_0, g) = 0 \tag{2.4.6b}$$

故存在相容性条件

$$(\psi_0, g) = 0 \tag{2.4.6c}$$

否则问题无解, 上式意味着 $g(\boldsymbol{r})$ 必须于 $\psi_0(\boldsymbol{r})$ 正交. 当上式满足时, $b_0$ 可取任意常数. 此时, 混合问题的解为

$$u(\boldsymbol{r}, t) = C\psi_0(\boldsymbol{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t)\ \psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.6d}$$

其中 $C$ 为常数, 不难验证上式确是当 $\omega_0 = 0$ 时, 齐次混合问题式 (2.4.1) 的解. 由此可见, 分离变量法的关键是求解本征值问题.

式 (2.4.6a) 可以进一步写成

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \left[\frac{\partial}{\partial t}\int_G \rho(\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t)\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' + \int_G \rho(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t)\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\right] \tag{2.4.6e}$$

其中函数

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}} \tag{2.4.6f}$$

称为波动方程的含时 Green 函数 (见 3.4.2 小节讨论).

**例 2.4.1** 考虑边界固定圆膜的横振动, 设圆膜半径为 $a$, 圆心在坐标原点 (可设想鼓的振动), 振动方程为

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0,\ \rho < a\ ,\ t > 0\\ u|_{t=0} = f(x, y);\ u_t|_{t=0} = g(x, y),\ r \leqslant a\\ u|_{\rho=a} = 0,\ t \geqslant 0\end{gathered} \tag{2.4.7a}$$

采用平面极坐标

$$\boldsymbol{L} = -\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \tag{2.4.7b}$$

由分离变数解 $u(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r})T(t)$ 可得 (因分离变量常数 $\lambda > 0$, 故令 $\lambda = k^2$)

$$\begin{gathered}\nabla^2\psi(\rho, \varphi) + k^2\psi(\rho, \varphi) = 0,\ \rho \in (0, l),\ \varphi \in [0, 2\pi]\\ \psi(\rho, \varphi)|_{\rho=a} = 0;\ \varphi \in [0, 2\pi]\end{gathered} \tag{2.4.8a}$$

和

$$T''(t) + k^2 T(t) = 0,\ t > 0 \tag{2.4.8b}$$

由上式得 $T(t)$

$$T(t) = A\cos kt + B\sin kt \tag{2.4.8c}$$

方程 (2.4.8a) 进一步分离变数, 令 $\psi(r,\varphi) = \varPhi(\varphi)R(r)$, 于是有

$$\frac{\varPhi''(\varphi)}{\varPhi(\varphi)} = -\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + k^2\rho^2 R(\rho)}{R(\rho)} \equiv -\mu^2 \tag{2.4.8d}$$

故得 $\varPhi(\varphi)$ 和 $R(\rho)$ 满足的方程分别为

$$\varPhi''(\varphi) + \mu^2\varPhi(\varphi) = 0 \tag{2.4.9a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} + \left(k^2 - \frac{\mu^2}{\rho^2}\right)R = 0 \tag{2.4.9b}$$

由方程 (2.4.8a) 的第二式得 $R(\rho)$ 满足的边界条件

$$R(\rho)|_{\rho=a} = 0 \tag{2.4.9c}$$

方程 (2.4.9b) 可写成

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \frac{m^2}{\rho}R = k^2\rho R \tag{2.4.9d}$$

显然上式是 $m$ 阶 Bessel 方程, 故方程 (2.4.9b) 和 (2.4.9c) 就是 Bessel 算子的本征值问题, 由 2.3.2 小节讨论, 设方程 $J_{|m|}(x) = 0$ 无限个正根为 $\{\mu_n^m, n = 1, 2, \cdots\}$, 则本征值 $k_n^m = \mu_n^m/a$. 方程 (2.4.9a) 存在自然边界条件: 因为 $\varphi$ 是方位角, 根据物理意义, 角度转过 $2\pi$ 后, 振动状态并不改变, 故有周期性边界条件

$$\varPhi(\varphi) = \varPhi(\varphi + 2\pi) \tag{2.4.10a}$$

方程 (2.4.9a) 和 (2.4.9e) 构成本征值问题, 由 2.3.1 小节中的例 2.3.2, 本征值及相应的本征函数为

$$\varPhi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.4.10b}$$

由叠加原理, 一般解写成

$$u(\rho,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(a_{mn}\cos k_n^m t + b_{mn}\sin k_n^m t)J_{|m|}(k_n^m\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.4.11a}$$

由初始条件, 可求得系数 $a_{mn}$ 及 $b_{mn}$ 满足的方程为

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{mn}J_{|m|}(k_n^m\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\equiv f(\rho,\varphi)\\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}k_n^m b_{mn}J_{|m|}(k_n^m\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=g(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\equiv g(\rho,\varphi)\end{aligned}\tag{2.4.11b}$$

函数系 $\{\psi_{mn}\}=\{J_{|m|}(k_n^m\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\vartheta}\}$ 构成 $\rho\in[0,a]$ , $\varphi\in[0,2\pi]$ 上正交的完备系 (但没有归一化), 系数 $a_{mn}$ 及 $b_{mn}$ 为

$$\begin{aligned}a_{mn}=\frac{1}{\pi a^2J_{|m|+1}^2(k_n^m a)}\int_0^a\int_0^{2\pi}f(\rho,\varphi)J_{|m|}(k_n^m\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\\ b_{mn}=\frac{1}{\pi a^2J_{|m|+1}^2(k_n^m a)k_n^m}\int_0^a\int_0^{2\pi}g(\rho,\varphi)J_{|m|}(k_n^m\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\end{aligned}\tag{2.4.11c}$$

式 (2.4.11a) 进一步写成

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^a\int_0^{2\pi}f(\rho',\varphi')G(\rho,\varphi;\rho',\varphi',t)\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi'\\&+\int_0^a\int_0^{2\pi}g(\rho',\varphi')G(\rho,\varphi;\rho',\varphi',t)\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi'\end{aligned}\tag{2.4.11d}$$

其中含时 Green 函数为

$$G(\rho,\varphi;\rho',\varphi',t)=\frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{J_{|m|}(k_n^m\rho')J_{|m|}(k_n^m\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}}{J_{|m|+1}^2(k_n^m a)}\cdot\frac{\sin(k_n^m t)}{k_n^m}\tag{2.4.11e}$$

**非齐次方程情况** 考虑方程是非齐次情况 (注意：可假定零初始条件, 由叠加原理, 与方程 (2.4.1) 的解加在一起就可以了；但边界条件仍然是齐次的)

$$\begin{aligned}&\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}u=\rho(\boldsymbol{r})F(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\&u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=0;\ u_t|_{t=0}=0\ ;\ \boldsymbol{r}\in\partial G+G\\&\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{2.4.12a}$$

对非齐次方程, 分离变量式 (2.4.2a) 已不成立! 但是, 由于 $\{\psi_n\}$ 构成 $L^2(G)$ 上的完备系, 设 $u\in L^2(G)$, 可以作广义 Fourier 展开

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\psi_n(\boldsymbol{r})\tag{2.4.12b}$$

注意: 上式与方程 (2.4.4a) 的区别, 后者由叠加原理得到, 无需考虑 $\{\psi_n\}$ 的完备性, 而前者由 $\{\psi_n\}$ 的完备性得到. 把式 (2.4.12b) 代入方程 (2.4.12a) 的第一式得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}^2 a_n(t)}{\mathrm{d}t^2}+\lambda_n a_n(t)\right]\rho(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r})F(\boldsymbol{r},t) \tag{2.4.12c}$$

得到上式, 我们假定了微分与无限求和的可交换性, 这样做的理由是, $u(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\psi_n(\boldsymbol{r})$ 满足同样的齐次边界条件 (注意：当 $u(\boldsymbol{r},t)$ 满足非齐次边界条件就不能这样了, 见 2.4.4 小节). 用 $\psi_j(\boldsymbol{r})$ 求方程 (2.4.12c) 的内积得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 a_n(t)}{\mathrm{d}t^2}+\lambda_n a_n(t)=\int_G \rho(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r})F(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\equiv f_n(t) \tag{2.4.13a}$$

把式 (2.4.12b) 代入方程 (2.4.12a) 中的第二式, 得到初始条件 $a_n'(t)=a_n(t)=0$, 因此上式的解为

$$a_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(t)\sin[\omega_n(t-\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{2.4.13b}$$

其中 $\omega_n\equiv\sqrt{\lambda_n}$. 由方程 (2.4.12b) 和 (2.4.13b), 我们就能得到非齐次方程 (2.4.12a) 的解. 上式代入式 (2.4.12b) 得到

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t\int_G \rho(\boldsymbol{r}')F(\boldsymbol{r}',\tau)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-\tau)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\tau \tag{2.4.13c}$$

其中 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-\tau)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\frac{\sin[\omega_n(t-\tau)]}{\omega_n} \tag{2.4.13d}$$

注意: 如果 $\omega_0=0$ 是方程 (2.4.2c) 的零本征值, 则式 (2.4.13b) 变成

$$a_0(t)=\int_0^t f_0(t)(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.4.13e}$$

出现随时间增长的项, 故相容性条件为 $f_0(t)=0$, 即 $\displaystyle\int_G \rho(\boldsymbol{r})F(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=0$, 也就是说源函数 $F(\boldsymbol{r},t)$ 的空间平均为零.

### 2.4.2　热传导和色散型方程的齐次混合问题

考虑有限空间的温度分布随时间的演化, 即齐次混合问题

$$\begin{gathered}\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial u}{\partial t}+\boldsymbol{L}u=0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\ u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G+G\\ \left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered} \tag{2.4.14a}$$

其中 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$, $(\boldsymbol{r}\in G)$. 令 $u(\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r})T(t)$, 对 $\psi(\boldsymbol{r})$ 同样可得本征值问题 (2.4.2c), 而时间部分 $T(t)$ 满足一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}+\lambda T(t)=0 \tag{2.4.14b}$$

因此 $T(t)=a\exp(-\lambda t)$. 设本征值问题式 (2.4.2c) 的解为 $\{\psi_n(\boldsymbol{r}),\lambda_n,\ (n=0,12,\cdots)\}$, 由叠加原理, 混合问题的一般解为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_n t) \tag{2.4.15a}$$

利用方程 (2.4.14a) 中的初始条件有

$$u(\boldsymbol{r},0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.15b}$$

因此 $a_n=(\psi_n,f)$(带权 $\rho(\boldsymbol{r})$ 内积), 故混合问题的形式解为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}(\psi_n,f)\psi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_n t) \tag{2.4.15c}$$

由 2.2.1 小节, $\boldsymbol{L}$ 是正算子, 故 $\lambda_n>0$, 上式总随 $t$ 指数衰减, 又 $\lambda_n\to\infty$(当 $n\to\infty$ 时), 可期望级数有较好的收敛性. 式 (2.4.15c) 进一步可以写成

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_G f(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{2.4.15d}$$

其中函数

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_n t) \tag{2.4.15e}$$

称为热传导方程的含时 Green 函数.

**例 2.4.2** 考虑热传导问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ x\in(0,l),\ t>0\\ u(x,t)|_{t=0}=g(x),\ x\in[0,l]\\ u|_{x=0}=0;\ \left.\left(hu+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=0\end{gathered} \tag{2.4.16a}$$

使用分离变数法可知本征值问题为

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}=\lambda\psi,\ x\in(0,l)\\ \psi\,|_{x=0}=0;\ \left.\left(h\psi+\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=l}=0\end{gathered} \tag{2.4.16b}$$

上式的通解为

$$\psi(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x \tag{2.4.16c}$$

由方程 (2.4.16a) 中的边界条件, $c_1 = 0$ 及

$$c_2(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l) = 0 \tag{2.4.16d}$$

故本征值 $\lambda$ 满足的方程为

$$-\sqrt{\lambda} = h\tan(l\sqrt{\lambda}) \tag{2.4.17a}$$

由图解法求根, 令 $v = l\sqrt{\lambda}$, 上式成为

$$-v = hl\tan(v) \tag{2.4.17b}$$

于是上式的解为 $f-v$ 平面上曲线 $f = \tan v$ 和直线 $f = -v/lh$ 的交点. 由图 2.4.1 可知, 方程 (2.4.17b) 存在无限多个解 $(v_1, v_2, \cdots)$ 并且有

$$\lim_{n\to\infty}|v_n| = \infty \tag{2.4.17c}$$

容易验证式 (2.4.17b) 的零根 $\lambda = 0$ 对应的本征函数 $\psi_0 \equiv 0$. 事实上, 当 $\lambda = 0$ 时, 由方程 (2.4.16b) 的第一式得到 $\psi_0 = c_0 + c_1 x$, 而由边界条件: $c_0 = c_1 \equiv 0$, 故 $\psi_0 \equiv 0$. 因此, 零不是方程 (2.4.16b) 的本征值. 于是, 混合问题的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\sqrt{\lambda_n}x \exp(-a^2\lambda_n t) \tag{2.4.18a}$$

由初始条件

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\sqrt{\lambda_n}x = g(x) \tag{2.4.18b}$$

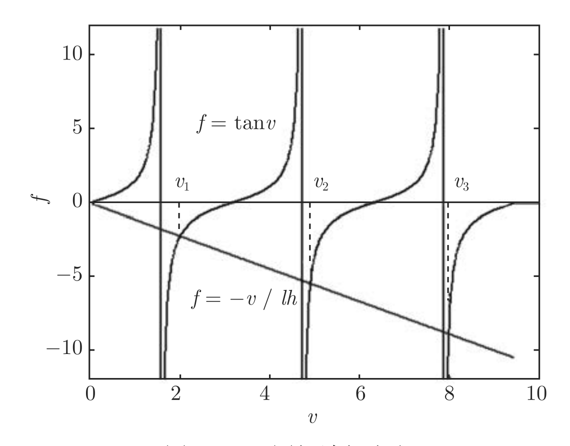



图 2.4.1　图解法解方程

由于方程 (2.4.16b) 是 S-L 型的本征值问题, 函数系 $\{\psi_n(x)\}$ 形成正交的完备系, 故得到

$$a_n = \frac{1}{||\psi_n||^2}\int_0^l g(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x \tag{2.4.18c}$$

其中 $||\psi_n||^2$ 为

$$||\psi_n||^2 = \int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\left[1+\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}l)}{\sqrt{\lambda_n}l}\right] \tag{2.4.18d}$$

注意: 因 $v = l\sqrt{\lambda} > 0$, 故方程 (2.4.17b) 的负根应弃去. 把式 (2.4.18c) 代入式

$$u(x,t) = \int_0^l g(x')G(x,x',t)\mathrm{d}x' \tag{2.4.18e}$$

其中

$$G(x,x',t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{||\psi_n||^2}\sin\sqrt{\lambda_n}x'\sin\sqrt{\lambda_n}x\exp(-a^2\lambda_n t) \tag{2.4.18f}$$

**例 2.4.3** 考虑核反应过程中子的增殖和扩散过程满足的定解问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = a^2\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t) + \chi u(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\ u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0} = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G + G\\ \left.\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0\end{gathered} \tag{2.4.19a}$$

其中 $u(\boldsymbol{r},t)$ 是中子浓度分布. 上式中增加了表示增殖过程的一项 $\chi u(\boldsymbol{r},t)$, 增殖项与表征扩散的项 $\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)$ 相互竞争. 把分离变量解 $u(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r})T(t)$ 代入方程 (2.4.19a) 的第一式得到

$$\begin{gathered}-\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) = \lambda\psi(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r}\in G\\ \left.\left(\alpha\psi + \beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0\end{gathered} \tag{2.4.19b}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} + (a^2\lambda - \chi)T(t) = 0 \tag{2.4.19c}$$

设 Laplace 算子的本征值问题式 (2.1.19b) 的解为 $\{\psi_n(\boldsymbol{r}),\lambda_n,(n=0,12,\cdots)\}$, 则方程 (2.4.19c) 的解为

$$T_n(t) = T_{0n}\exp[-(a^2\lambda_n - \chi)t] \tag{2.4.20a}$$

利用方程 (2.4.19a) 的初始条件, 最后得到

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}(\psi_n,f)\exp[-(a^2\lambda_n-\chi)t]\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.20b}$$

显然, 如果本征值问题式 (2.4.19b) 有零根 $\lambda_0=0$, 则级数第一项就随时间指数增长, 这是实际情况不允许的 (第二类边界条件相当于中子不能扩散到区域外, 当然无限制增长), 故第一个根 $\lambda_1$ 是关键, 一旦 $\chi>a^2\lambda_1$(称为临界条件), 增殖速度就大于扩散速度, 中子浓度就指数发散.

对非齐次方程情况, 与 2.4.1 小节类似, 也可以讨论非齐次方程 (边界条件仍然是齐次的) 的混合问题, 结果在 2.4.4 小节中统一给出.

**色散型方程的混合问题** 考虑色散型方程的混合问题

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial u}{\partial t}+\boldsymbol{L}u=0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ \ t>0\\ u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=f(\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{r}\in\partial G+G\\ \left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered} \tag{2.4.21a}$$

代替方程 (2.4.14b), $T(t)$ 满足的一阶方程为

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}\lambda T(t)=0 \tag{2.4.21b}$$

因此

$$T_n(t)=T_0\exp(-\mathrm{i}\lambda_n t) \tag{2.4.21c}$$

相应的混合问题解为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}(\psi_n,f)\psi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\lambda_n t) \tag{2.4.21d}$$

从以上表达式就不难看出, 在闭空间 $|u(\boldsymbol{r},t)|^2$ 也与时间无关. 上式可以写成

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_G\rho(\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{2.4.21e}$$

其中 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\lambda_n t) \tag{2.4.21f}$$

### 2.4.3 椭圆型方程的边值问题

考虑下列形式的方程

$$\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r},y)}{\partial y^2}-\boldsymbol{L}u=0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ y\in(a,b) \tag{2.4.22a}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 而 $y$ 为单一标量, $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$ 仅作用于变量 $\boldsymbol{r}$. 由于 $p(\boldsymbol{r})>0$, 故对变量 $(\boldsymbol{r},y)$, 方程 (2.4.43) 是椭圆型的. 对区域 $G$, 边界条件

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0 \tag{2.4.22b}$$

而对 $y$ 有边界条件

$$u(\boldsymbol{r},y)|_{y=a}=f(\boldsymbol{r});\ u(\boldsymbol{r},y)|_{y=b}=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G \tag{2.4.22c}$$

令分离变数解为 $u(\boldsymbol{r},y)=\psi(\boldsymbol{r})T(y)$, 可得 $\psi(\boldsymbol{r})$ 满足的本征方程

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r})=\lambda\rho(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left.\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered} \tag{2.4.23a}$$

而 $T(y)$ 满足

$$T''(y)-\lambda T(y)=0,\ y\in(0,l_y) \tag{2.4.23b}$$

设本征值问题式 (2.4.23a) 的解为 $\{\psi_n(\boldsymbol{r}),\lambda_n,(n=0,1,2,\cdots)\}$, 可得 $T_n(y)$

$$T_k(y)=a_n\mathrm{e}^{k_n y}+b_n\mathrm{e}^{-k_n y} \tag{2.4.24a}$$

其中令 $k_n=\sqrt{\lambda_n}$. 由叠加原理, 一般解为

$$u(\boldsymbol{r},y)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\mathrm{e}^{k_n y}+b_n\mathrm{e}^{-k_n y})\cdot\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.24b}$$

由边界条件 (2.4.22c) 得到决定 $a_n$ 与 $b_n$ 的方程

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty}(a_n\mathrm{e}^{k_n a}+b_n\mathrm{e}^{-k_n a})\cdot\psi_n(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})\\ \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\mathrm{e}^{k_n b}+b_n\mathrm{e}^{-k_n b})\cdot\psi_n(\boldsymbol{r})=g(\boldsymbol{r})\end{gathered} \tag{2.4.24c}$$

因 $\{\psi_n\}$ 是完备的正交系 (假定已归一化), 故

$$\begin{gathered}a_n\mathrm{e}^{k_n a}+b_n\mathrm{e}^{-k_n a}=(\psi_n,f)\\ a_n\mathrm{e}^{k_n b}+b_n\mathrm{e}^{-k_n b}=(\psi_n,g)\end{gathered} \tag{2.4.24d}$$

从上二式可求得 $a_n$ 和 $b_n$

$$a_n = \frac{\mathrm{e}^{-k_n a}(\psi_n, g) - \mathrm{e}^{-k_n b}(\psi_n, f)}{2\sinh[k_n(b-a)]}$$
$$b_n = \frac{\mathrm{e}^{k_n b}(\psi_n, f) - \mathrm{e}^{k_n a}(\psi_n, g)}{2\sinh[k_n(b-a)]} \tag{2.4.24e}$$

代入式 (2.4.24b) 得到

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}, y) =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh[k_n(y-a)]}{\sinh[k_n(b-a)]}(\psi_n, g)\psi_n(\boldsymbol{r}) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh[k_n(b-y)]}{\sinh[k_n(b-a)]}(\psi_n, f)\psi_n(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{2.4.24f}$$

或者整理成积分形式

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}, y) =& \int_G \rho(\boldsymbol{r}')G_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', y)g(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \\ &+ \int_G \rho(\boldsymbol{r}')G_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', y)f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \end{aligned} \tag{2.4.24g}$$

其中

$$\begin{aligned} G_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', y) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh[k_n(y-a)]}{\sinh[k_n(b-a)]}\psi_n(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r}') \\ G_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', y) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh[k_n(b-y)]}{\sinh[k_n(b-a)]}\psi_n(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r}') \end{aligned} \tag{2.4.24h}$$

注意: $G_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', y)$ 和 $G_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', y)$ 不能称为边值问题式 (2.4.22a), (2.4.22b) 和 (2.4.22c) 的 Green 函数 (见 3.3 节讨论).

**例 2.4.4**　考虑矩形区域上 Laplace 方程的边值问题

$$\begin{gathered} u_{xx} + u_{yy} = 0,\ x \in (0, l_x),\ y \in (0, l_y) \\ u(x, y)|_{x=0} = u(x, y)|_{x=l_x} = 0 \\ u(x, y)|_{y=0} = f(x);\ u(x, y)|_{y=l_y} = g(x) \end{gathered} \tag{2.4.25a}$$

这时方程 (2.4.23a) 简化为

$$\begin{gathered} -\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = \lambda\psi(x);\ x \in (0, l_x) \\ \psi(x)|_{x=0} = \psi(x)|_{x=l_x} = 0 \end{gathered} \tag{2.4.25b}$$

相应的本征函数和本征值为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right);\ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2 \tag{2.4.25c}$$

而式 (2.4.24a) 为

$$T_n(y) = a_n \exp\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right) + b_k \exp\left(-\frac{n\pi y}{l_x}\right) \tag{2.4.26a}$$

或者写成

$$T_n(y) = a_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right) + b_n \sinh\left[\frac{n\pi(l_y - y)}{l_x}\right] \tag{2.4.26b}$$

系数 $a_k$ 与 $b_k$ 由式 (2.4.25a) 中边界条件决定

$$\begin{aligned} u(x,y)|_{y=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)\psi_n(x) = f(x) \\ u(x,y)|_{y=l_y} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)\psi_k(x) = g(x) \end{aligned} \tag{2.4.26c}$$

于是由 $\psi_n(x)$ 得完备性得到

$$a_n = \frac{(\psi_n, g)}{\sinh(n\pi l_y/l_x)}; \quad b_n = \frac{(\psi_n, f)}{\sinh(n\pi l_y/l_x)} \tag{2.4.26d}$$

把上式和式 (2.4.26b) 代入通解 $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(y)\psi_n(x)$ 得到

$$u(x,y) = \int_0^{l_x} g_1(y,x,x')g(x')\mathrm{d}x' + \int_0^{l_x} g_2(y,x,x')f(x')\mathrm{d}x' \tag{2.4.26e}$$

其中

$$\begin{aligned} g_1(y,x,x') &\equiv \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(n\pi y/l_x)}{\sinh(n\pi l_y/l_x)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sin\left(\frac{n\pi x'}{l_x}\right) \\ g_2(y,x,x') &\equiv \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh[n\pi(l_y - y)/l_x]}{\sinh(n\pi l_y/l_x)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sin\left(\frac{n\pi x'}{l_x}\right) \end{aligned} \tag{2.4.26f}$$

注意: $g_1(y,x,x')$ 和 $g_2(y,x,x')$ 不是边值问题 (2.4.25a) 的 Green 函数.

假定 $f(x)$ 和 $g(x)$ 绝对可积

$$\int_0^{l_x} |f|\mathrm{d}x < m; \quad \int_0^{l_x} |g|\mathrm{d}x < m \tag{2.4.27a}$$

则对足够大的 $n$

$$\begin{aligned} \left|b_n \sinh\left[\frac{n\pi(l_y - y)}{l_x}\right]\right| &\leqslant \frac{\sqrt{2/l_x}\cdot m\cdot \exp[n\pi(l_y - y)/l_x]}{\exp(n\pi l_y/l_x)[1 - \exp(-2n\pi l_y/l_x)]} \\ &= \frac{\sqrt{2/l_x}\cdot m\cdot \exp(-n\pi y/l_x)}{1 - \exp(-2n\pi l_y/l_x)} \end{aligned} \tag{2.4.27b}$$

对 $|a_n \sinh[(n\pi/l_x)y]|$ 有类似的不等式. 因此对 $y \in (0, l_y)$, 级数中的每项对足够大的 $n$ 指数衰减 (在端点 $y = 0$ 及 $l_y$ 则不然), 于是

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(y)\psi_n(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) \tag{2.4.27c}$$

中各项在区域 $y \in (0, l_y)$ 可逐项微分. 因 $u_n(x, y)$ 满足 Laplace 方程, 故 $u(x, y)$ 也满足 Laplace 方程. 为了在端点 $y = 0$ 和 $l$ 级数也一致收敛到 $f(x)$ 和 $g(x)$, 要求满足相容性条件:

(1) $f(0) = f(l_x) = g(0) = g(l_x) = 0$;

(2) $f(x)$ 与 $g(x) \in C$;

(3) $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 分段连续.

由以上讨论可见, 为了 $u(x, y)$ 在矩形内满足 Laplace 方程, 只要求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足可积条件式 (2.4.27a), 这时在矩形内 $u(x, y)$ 无限可微. 边界上 $u(x, y)$ 的不连续性并不影响区域内解的无限可微性. 比较波动方程, 边界上的不连续性将沿特征线传播到区域内部, 这是由于波动方程存在实的特征线, 而 Laplace 方程无实特征线, 边界的不连续性只能限制在边界, 内部仍是光滑的.

注意：本例中假定 $x$ 方向满足齐次边界条件, 如果二个方向都不是齐次边界, 如何处理? 简单的方法是用叠加原理, 把它化成二个定解问题, 使某个方向上形成齐次边界.

### 2.4.4 非齐次问题的本征函数展开

为了方便, 把波动方程、扩散方程和椭圆方程写成统一的形式

$$\rho \boldsymbol{K} u(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{L} u(\boldsymbol{r}, t) = \rho F(\boldsymbol{r}, t),\ \boldsymbol{r} \in G,\ t > 0 \tag{2.4.28a}$$

其中算子 $\boldsymbol{L} = -\nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{K}$ 是相应的时间作用算子, 例如 $\boldsymbol{K} = \partial/\partial t$, $\boldsymbol{K} = \partial^2/\partial t^2$ 和 $\boldsymbol{K} = -\partial^2/\partial y^2$(相应地, 把变量 $t$ 修改成 $y$). 考虑 $u(\boldsymbol{r}, t)$ 满足的非齐次边界条件

$$\left.\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = B(\boldsymbol{r}, t),\ \boldsymbol{r} \in G + \partial G,\ t > 0 \tag{2.4.28b}$$

因对不同的 $\boldsymbol{K}$, 初始条件不同, 以后单独写出. 设 $\{\psi_n\}$ 是本征值问题

$$\begin{gathered} \boldsymbol{L}\psi_n = \lambda_n \rho(\boldsymbol{r})\psi_n,\ \boldsymbol{r} \in G \\ \left.\left(\alpha\psi_n + \beta\frac{\partial\psi_n}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0 \end{gathered} \tag{2.4.28c}$$

的正交完备系 (注意:$\psi_n$ 满足齐次边界条件!), 则在均方收敛的意义下 $u(\boldsymbol{r},t)$ 可展成 $\{\psi_n\}$ 的广义 Fourier 级数

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.29a}$$

只要 $u(\boldsymbol{r},t)$ 带权 $\rho(\boldsymbol{r})$ 平方可积, 式中 $a_n(t)$ 为 $a_n(t)=(\psi_n,u)$. 必须注意的是, 级数展开式 (2.4.12b) 与式 (2.4.29a) 的区别：在式 (2.4.12b) 中, $\{\psi_n\}$ 满足齐次边界条件, 与定解问题方程 (2.4.12a) 中的边界条件一致, 我们可以把式 (2.4.12b) 直接代入方程 (2.4.12a) 中, 求展开系数; 而在式 (2.4.29a) 中, $u(\boldsymbol{r},t)$ 满足非齐次边界条件, 而 $\{\psi_n\}$ 满足齐次边界条件, 二者不一致. 至少在边界上, 式 (2.4.29a) 的右边并不收敛到 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的 "真" 值, 而是均方收敛. 因此, 我们不能断定级数式 (2.4.29a) 可逐项微分, 故不能直接把式 (2.4.29a) 代入方程 (2.4.28a) 而得到 $a_n(t)$ 的方程. 但用下法求 $a_n(t)$ 的方程是可行的, 该法避免了严格的微分与求和交换条件.

方程 (2.4.28a) 两边乘以 $\psi_n^*(\boldsymbol{r})$, 并在 $G$ 上作体积分

$$\text{左边}=\int_G\rho\psi_n^*\boldsymbol{K}u\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{K}\int_G\rho\psi_n^*u\mathrm{d}\tau\equiv\boldsymbol{K}(\psi_n,u) \tag{2.4.29b}$$

得到上式, 是因为 $\boldsymbol{K}$ 只对 $t$ 作用, 而方程右边为 (把项 $\boldsymbol{L}u(\boldsymbol{r},t)$ 移到右边)

$$\text{右边}=-\int_G\psi_n^*\boldsymbol{L}u\mathrm{d}\tau+\int_G\rho\psi_n^*F\mathrm{d}\tau \tag{2.4.29c}$$

利用 Green 公式

$$\begin{aligned}-\int_G\psi_n^*\boldsymbol{L}u\mathrm{d}\tau&=-\int_G u\boldsymbol{L}\psi_n^*\mathrm{d}\tau+\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left(\psi_n^*\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\psi_n^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\\&=-\lambda_n(\psi_n,u)+\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left(\psi_n^*\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\psi_n^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{2.4.30a}$$

上式已利用 $\boldsymbol{L}$ 的 Hermite 性: $\lambda_n=\lambda_n^*$. 对面积分进行讨论: 由于 $\psi_n$ 满足齐次边界条件, 而 $u(\boldsymbol{r},t)$ 满足非齐次边界条件, 故可求得关系

$$\left.\left(\psi_n^*\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\psi_n^*}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=\begin{cases}-\left.\left(\dfrac{B}{\alpha}\dfrac{\partial\psi_n^*}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}, & \alpha\neq0\\[2ex]+\left.\left(\dfrac{B}{\alpha}\psi_n^*\right)\right|_{\partial G}, & \beta\neq0\end{cases} \tag{2.4.30b}$$

代入式 (2.4.30a) 应有

$$-\int_G\psi_n^*\boldsymbol{L}u\mathrm{d}\tau=-\lambda_n(\psi_n,u)+b_k(t) \tag{2.4.30c}$$

其中 $b_k(t)$ 为

$$b_k(t) \equiv \begin{cases} -\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}) \dfrac{B}{\alpha} \dfrac{\partial \psi_n^*}{\partial n} \mathrm{d}S, & \alpha \neq 0 \\ \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}) \dfrac{B}{\beta} \psi_n^* \mathrm{d}S, & \beta \neq 0 \end{cases} \tag{2.4.30d}$$

注意: 在边界上, $\alpha$ 和 $\beta$ 也可以是 $\boldsymbol{r}$ 的函数, 最简单的情况如边界 $\partial G$ 分成三个部分 $\partial G = \partial G_1 + \partial G_2 + \partial G_3$, 在 $\partial G_1$, $\partial G_2$ 和 $\partial G_3$ 上分别满足第一、二和三类边界条件, 则上式应该修改成

$$b_k(t) \equiv -\iint_{\partial G_1} p(\boldsymbol{r}) \frac{B}{\alpha} \frac{\partial \psi_n^*}{\partial n} \mathrm{d}S + \iint_{\partial G_2 + \partial G_3} p(\boldsymbol{r}) \frac{B}{\beta} \psi_n^* \mathrm{d}S \tag{2.4.30e}$$

以后在公式中出现类似的情况, 不再一一重复, 一维情况也类似.

于是, 由式 (2.4.29b)、(2.4.29c) 和 (2.4.30c) 且注意到 $a_n(t) = (\psi_n, u)$, 得到展开系数满足的方程

$$\boldsymbol{K} a_n(t) + \lambda_n a_n(t) = f_n(t) + b_k(t) \tag{2.4.31a}$$

其中

$$f_n = \int_G \rho \psi_n^* F \mathrm{d}\tau = (\psi_n, F) \tag{2.4.31b}$$

注意: 当 $b_k(t) = 0$ 时, 就回到方程 (2.4.13a)(对波动方程情况)

下面对不同的 $\boldsymbol{K}$ 求解方程 (2.4.31a).

(1) 当 $\boldsymbol{K} = 0$ 时, 即与时间无关, 这时的方程 (2.4.28a) 为非齐次的平衡方程, 方程 (2.4.31a) 变成代数方程, 容易求得

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n}(f_n + b_n); \ \ \lambda_n \neq 0 \tag{2.4.32a}$$

因 $\boldsymbol{L}$ 是正算子, 故总有 $\lambda_n \geqslant 0$, 当 $\lambda_0 = 0$ 是本征值时, 相容性条件为

$$f_0 + b_0 = 0 \tag{2.4.32b}$$

否则问题无解, 即满足

$$\iint_{\partial G} \frac{1}{\beta} B(\boldsymbol{r}) p(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S + \int_G \rho F(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\tau = 0 \tag{2.4.32c}$$

其物理意义是明显的, 在第二类边界条件下, 系统要达到平衡, 体源 $F(\boldsymbol{r})$ 产生的 “热” 必须等于从边界上流出的 “热”. 下面假定零不是本征值. 把式 (2.4.32a), 代入式 (2.4.29a) 得到 (注意: 此时与时间无关)

$$u(\boldsymbol{r}) = \int_G \rho(\boldsymbol{r}') F(\boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau' + \begin{cases} +\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}') \dfrac{B(\boldsymbol{r}')}{\beta} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}S', \ \beta \neq 0 \\ -\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}) \dfrac{B}{\alpha} \dfrac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n} \mathrm{d}S', \alpha \neq 0 \end{cases} \tag{2.4.32d}$$

其中 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为边值问题的 Green 函数

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\psi_n(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r}') \tag{2.4.32e}$$

(2) 当 $\boldsymbol{K}=-\partial^2/\partial y^2$ 时, 方程 (2.4.31a) 附以 $y$ 方向的边界条件, 即方程 (2.4.22c). 由 $a_n(t)=(\psi_n,u)$, 边界条件是

$$\begin{aligned}a_n|_{y=a}&=(\psi_n,u|_{y=a})=(\psi_n,f)\\a_n|_{y=b}&=(\psi_n,u|_{y=b})=(\psi_n,g)\end{aligned} \tag{2.4.33a}$$

方程 (2.4.31a) 修改为 (把时间变量 $t$ 改写为 $y$)

$$-\frac{\mathrm{d}^2a_n(y)}{\mathrm{d}y^2}+\lambda_na_n(y)=f_n(y)+b_k(y) \tag{2.4.33b}$$

式 (2.4.33a) 与 (2.4.33b) 构成非齐次 S-L 边值问题, 具体解法见 3.2.2 小节.

(3) 当 $\boldsymbol{K}=\partial/\partial t$ 时, $a_n(t)$ 满足的方程及初始条件 (由方程 (2.4.14a) 的第二式) 为

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t}+\lambda_na_n(t)=f_n(t)+b_n(t),\ t>0\\a_n(t)|_{t=0}=(\psi_n,u|_{t=0})=(\psi_n,f)\end{gathered} \tag{2.4.34a}$$

解为

$$\begin{aligned}a_n(t)=&(\psi_n,f)\exp(-\lambda_nt)\\&+\int_0^t[f_n(t')+b_n(t')]\exp[-\lambda_n(t-t')]\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{2.4.34b}$$

把上式代入式 (2.4.29a) 得到

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)=&\int_G\rho f(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau'+\int_0^t\int_G\rho F(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t'\\&+\left\{\begin{aligned}&-\int_0^t\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r}')}{\alpha}B(\boldsymbol{r}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')}{\partial n'}\mathrm{d}S'\mathrm{d}t',\ \alpha\neq0\\&+\int_0^t\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r}')}{\beta}B(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t',\ \beta\neq0\end{aligned}\right.\end{aligned} \tag{2.4.34c}$$

其中函数

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\equiv H(t-t')\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\exp[-\lambda_n(t-t')] \tag{2.4.34d}$$

称为热传导方程的含时 Green 函数, 见 3.4.1 和 3.5.3 小节讨论.

(4) 当 $\boldsymbol{K}=\partial^2/\partial t^2$ 时, $a_k(t)$ 满足的方程及初始条件 (由方程 (2.4.1) 的第二式) 为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2a_n(t)}{\mathrm{d}t^2}+\lambda_n a_n(t)=f_n(t)+b_n(t),\ t>0\\&a_n(t)|_{t=0}=(\psi_n,f);\quad \left.\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=(\psi_n,g)\end{aligned}\tag{2.4.35a}$$

解为 (其中 $\omega_n^2\equiv\lambda_n$)

$$\begin{aligned}a_n(t)=&(\psi_n,f)\cos(\omega_n t)+\frac{1}{\omega_n}(\psi_n,g)\sin(\omega_n t)\\&+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t[f_n(t')+b_n(t')]\sin[\omega_n(t-t')]\mathrm{d}t'\end{aligned}\tag{2.4.35b}$$

上式代入式 (2.4.29a), 整理后得到

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)=&\frac{\partial}{\partial t}\int_G\rho(\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'+\int_G\rho(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\\&+\int_0^t\int_G\rho(\boldsymbol{r}')F(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')d^3\boldsymbol{r}'\\&+\begin{cases}-\displaystyle\int_0^t\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\frac{B(\boldsymbol{r}',t')}{\alpha}\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')}{\partial n'}\mathrm{d}S'\mathrm{d}t',\ \alpha\neq 0\\\displaystyle\int_0^t\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\frac{B(\boldsymbol{r}',t')}{\beta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t',\ \beta\neq 0\end{cases}\end{aligned}\tag{2.4.35c}$$

其中函数

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')=H(t-t')\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\frac{\sin[\sqrt{\lambda_n}(t-t')]}{\sqrt{\lambda_n}}\tag{2.4.35d}$$

称为波动方程的含时 Green 函数, 见 3.4.2 和 3.5.4 小节讨论.

(3) 当 $\boldsymbol{K}=\mathrm{i}\partial/\partial t$ 时, $a_n(t)$ 满足的方程及初始条件 (由方程 (2.4.21a) 的第二式) 为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}\lambda_n a_n(t)=f_n(t)+b_n(t),\ t>0\\&a_n(t)|_{t=0}=(\psi_n,u|_{t=0})=(\psi_n,f)\end{aligned}\tag{2.4.36a}$$

解为

$$\begin{aligned}a_n(t)=&(\psi_n,f)\exp(-\mathrm{i}\lambda_n t)\\&+\int_0^t[f_n(\tau)+b_n(\tau)]\exp[-\mathrm{i}\lambda_n(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{2.4.36b}$$

上式代入 (2.4.29a) 得到

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{r},t)=&\int_G \rho(\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\\
&+\int_0^t\int_G \rho(\boldsymbol{r}')F(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t'\\
&+\begin{cases}-\displaystyle\int_0^t\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}')\frac{B(\boldsymbol{r}',t')}{\alpha}\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')}{\partial n'}\mathrm{d}S'\mathrm{d}t',\ \alpha\neq 0\\ \displaystyle\int_0^t\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}')\frac{B(\boldsymbol{r}',t')}{\beta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t',\ \beta\neq 0\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.4.36c}
$$

其中函数

$$
G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\equiv H(t-t')\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\exp[-\mathrm{i}\lambda_n(t-t')]
\tag{2.4.36d}
$$

称为色散型方程的含时 Green 函数.

从广义 Fourier 展开式 (2.4.29a) 可知, 由于 $\psi_n(\boldsymbol{r})$ 满足齐次边界条件, 而 $u(\boldsymbol{r},t)$ 要求满足非齐次边界条件, 故式 (2.4.29a) 不可能是方程 (2.4.28a) 的古典解. 在边界 $\partial G$ 上, 式 (2.4.29a) 右边的无限求和收敛到边界上的值只能是均方收敛, 而非一致收敛. 另外, 非齐次边界条件的影响反映在 $b_n(t)$ 上.

**例 2.4.5**　考虑波动方程的共振现象

$$
\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}u=\rho(\boldsymbol{r})\psi_m(\boldsymbol{r})\sin\omega t
\tag{2.4.37a}
$$

假定 $f(\boldsymbol{r})=g(\boldsymbol{r})=B(\boldsymbol{r},t)=0$, 上式中 $\psi_m(\boldsymbol{r})$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的第 $m$ 个本征函数. 于是

$$
f_n(t)=(\psi_n,F)=(\psi_n,\psi_m)\sin\omega t=\delta_{nm}\sin\omega t;\ b_n=0
\tag{2.4.37b}
$$

由式 (2.4.35b), 当 $n=m$ 时

$$
\begin{aligned}
a_m(t)&=\frac{1}{\omega_m}\int_0^t \sin\omega\tau\sin[\omega_m(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\\
&=\frac{1}{\omega^2-\omega_m^2}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\sin\omega_m t-\sin\omega t\right)
\end{aligned}
\tag{2.4.37c}
$$

而当 $n\neq m$ 时: $a_n=0$, 故级数 (2.4.29a) 只有一项

$$
u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\omega^2-\omega_m^2}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\sin\omega_m t-\sin\omega t\right)\psi_m(\boldsymbol{r})
\tag{2.4.37d}
$$

当 $\omega=\omega_m$ 时, 取上式的极限

$$
u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\omega_m}\left(\frac{\sin\omega_m t}{\omega_m}-t\cos\omega_m t\right)\psi_m(\boldsymbol{r})
\tag{2.4.37e}
$$

可见, 当外加强迫振动频率 $\omega$ 等于本征值时发生共振现象, $u(\boldsymbol{r},t)$ 随 $t$ 线性增加, 当时间足够长, 共振项很大, 这时必须引进阻尼或非线性项, 来克服这种非物理的增加.

注意: 当 $B(\boldsymbol{r},t)=0$ 时, 只要级数满足一定收敛性条件, 式 (2.4.29a) 严格满足边界条件. 因此, 一般总是把边界条件进行齐次化处理. 首先找到一个函数 $v(\boldsymbol{r},t)$, 在 $\partial G$ 上满足边界条件式 (2.4.28b), 于是令 $w=u-v$, 在 $\partial G$ 上 $w$ 满足齐次边界条件, 而方程则为

$$\rho\boldsymbol{K}w+\boldsymbol{L}w=\rho F-(\rho\boldsymbol{K}+\boldsymbol{L})v \tag{2.4.37f}$$

尽管 $w$ 满足的方程复杂了, 但边界齐次化了! 但是对比较复杂的边界形状, 寻找这样的函数是困难的. 我们将在 3.5 节中介绍解非齐次问题的另一种方法, 即 Green 函数方法.

### 2.4.5 非 Hermite 对称算子

对含有非 Hermite 算子的波动方程和热扩散方程, 混合问题可能是不适定的, 从式 (2.4.4b) 和 (2.4.14b) 就可以看出问题所在: 当算子 $\boldsymbol{L}$ 没有 Hermite 对称性时, 本征值问题式 (2.4.2c) 的解 $\lambda_n$ 一般为复数, 虚部使式 (2.4.4b) 的 $T_n(t)$ 或式 (2.4.15a) 的 $T(t)$ 随时间无限增长, 这是非物理的. 但对椭圆型方程就不存在这个问题. 例如, 在频率域求波动方程的时谐解时, 把双曲型的波动方程转化为椭圆型的 Helmholtz 方程 (见 1.3.4 小节讨论), 就经常遇到非 Hermite 对称算子的边值问题.

为了理解非 Hermite 算子引起的问题, 考虑非齐次椭圆型方程的边值问题

$$\boldsymbol{L}u=F(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G;\ \boldsymbol{P}u=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{2.4.38a}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为边界算子, 算子 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的共轭算子分别为 $\boldsymbol{L}^+$ 和 $\boldsymbol{P}^+$, 表达式见方程 (2.2.40b) 和 (2.2.41b).

定义算子 $\boldsymbol{L}$ 和共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的本征值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi_n(\boldsymbol{r})=\lambda_n\psi_n(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \boldsymbol{P}\psi_n(\boldsymbol{r})=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered} \tag{2.4.38b}$$

和

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}^+\psi_n^+(\boldsymbol{r})=\lambda_n^+(\boldsymbol{r})\psi_n^+(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \boldsymbol{P}^+\psi_n^+(\boldsymbol{r})=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered} \tag{2.4.38c}$$

设算子 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数系 $\{\psi_n,\}$ 形成平方可积 $L^2(G)$ 空间上的完备系, 可以令

$$u(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.39a}$$

把上式代入方程 (2.4.38a) 的第一式得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \psi_n(\boldsymbol{r}) = F(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.39b}$$

注意到：当算子 $\boldsymbol{L}$ 非 Hermite 对称时, $\psi_n(\boldsymbol{r})$ 与 $\psi_m^+(\boldsymbol{r})$ 正交, 故用 $\psi_m^+(\boldsymbol{r})$ 求方程 (2.4.39b) 两边的内积

$$\lambda_n a_n = \frac{1}{N_n^2} F_n^+ \tag{2.4.40a}$$

其中

$$F_n^+ \equiv \int_G [\psi_n^+(\boldsymbol{r})]^* F(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}^3\boldsymbol{r};\ N_n^2 \equiv \int_G [\psi_n^+(\boldsymbol{r})]^* \psi_n(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{2.4.40b}$$

当 $\lambda_n \neq 0$ 时, 容易得到 $a_n = F_n^+/N_n^2\lambda_n$, 代入式 (2.4.39a) 就得到方程 (2.4.38a) 的解

$$u(\boldsymbol{r}) = \int_G F(\boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{2.4.40c}$$

其中函数 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 为非 Hermite 对称的椭圆型算子 $\boldsymbol{L}$ 的 Green 函数

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n^2 \lambda_n} [\psi_n^+(\boldsymbol{r}')]^* \psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.40d}$$

详细讨论见 3.5.2 小节. 当 $\lambda_0 = 0$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的非零本征值时, 得到相容条件

$$\int_G [\psi_0^+(\boldsymbol{r})]^* F(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = 0 \tag{2.4.40e}$$

方程 (2.2.38a) 的解不唯一

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}) &= A_0\psi_0(\boldsymbol{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n^2 \lambda_n} F_n^+ \psi_n(\boldsymbol{r}) \\ &= A_0\psi_0(\boldsymbol{r}) + \int_G F(\boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \end{aligned} \tag{2.4.40f}$$

其中 $A_0$ 是任意常数, $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 由式 (2.4.40d) 决定.

考虑具体的例子, 即三维 S-L 算子及其共轭算子

$$\boldsymbol{L} = -\nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r});\ \boldsymbol{L}^+ = -\nabla \cdot [p^*(\boldsymbol{r})\nabla] + q^*(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.41a}$$

边界算子及其共轭边界算子为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\psi &\equiv p(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{r})}{\partial n} + \beta(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in \partial G \\ \boldsymbol{P}^+\psi &\equiv p^*(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{r})}{\partial n} + \beta^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in \partial G \end{aligned} \tag{2.4.41b}$$

显然, 由方程 (2.4.38b) 和 (2.4.38c), 对三维 S-L 型算子, 共轭算子的本征函数 $\psi_n^+ = \psi_n^*$. 故

$$F_n^+ \equiv \int_G \psi_n(\boldsymbol{r})F(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r};\ N_n^2 \equiv \int_G \psi_n^2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{2.4.42a}$$

注意: 现在 $\psi_n$ 是复函数, $N_n^2$ 不一定大于零, 甚至可能是复数, 故 $N_n$ 不是本征函数的模! 但如果三维 S-L 型算子及边界算子的系数都是实函数, 那么它是 Hermite 对称算子, 即方程 (2.4.38c) 与 (2.4.38b) 相同, 故 $\psi_n^+ = \psi_n$, 相应地

$$F_n^+ \equiv \int_G \psi_n^*(\boldsymbol{r})F(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r};\ N_n^2 \equiv \int_G |\psi_n(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{2.4.42b}$$

此时, $N_n$ 就是本征函数的模!

进一步, 考虑 $u(\boldsymbol{r})$ 不仅满足齐次方程, 还满足非齐次边界条件

$$\boldsymbol{L}u = F(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G;\ \boldsymbol{P}u = B(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in \partial G \tag{2.4.43a}$$

设算子 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数系 $\{\psi_n,\}$ 形成平方可积 $L^2(G)$ 空间上的完备系, 则

$$u(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N_n^2} a_n \psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.43b}$$

由方程 (2.2.45c), 式中 $a_n$ 应该为 $a_n = (\psi_n^+, u)$. 方程 (2.4.43a) 的第一式两边乘以 $(\psi_n^+)^*$, 并在 $G$ 上作体积分得到

$$\int_G [\psi_n^+(\boldsymbol{r})]^* \boldsymbol{L}u\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \int_G [\psi_n^+(\boldsymbol{r})]^* F(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = F_n^+ \tag{2.4.43c}$$

利用方程 (2.2.41a)

$$\int_G [(\boldsymbol{L}u)^*\psi_n^+ - u^*\boldsymbol{L}^+\psi_n^+]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \iint_{\partial G} [(\boldsymbol{P}u)^*\psi_n^+ - u^*\boldsymbol{P}^+\psi_n^+]\mathrm{d}S \tag{2.4.44a}$$

上式二边求复共轭且利用方程 (2.4.38c) 得到

$$\int_G [\psi_n^+(\boldsymbol{r})]^* \boldsymbol{L}u\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = (\lambda_n^+)^*(\psi_n^+, u) - B_n^+ \tag{2.4.44b}$$

其中

$$B_n^+ \equiv -\iint_{\partial G} [\psi_n^+(\boldsymbol{r})]^* B(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{2.4.44c}$$

把方程 (2.2.44b) 代入式 (2.4.43d) 得到 $(\lambda_n^+)^*(\psi_n^+, u) = F_n^+ + B_n^+$, 利用关系 $\lambda_n^+ = \lambda_n^*$, 得到方程 (2.4.43a) 的解为

$$u(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N_n^2\lambda_n}(F_n^+ + B_n^+)\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.45a}$$

由式 (2.4.43d) 和 (2.4.44c) 得到

$$u(\boldsymbol{r}) = \int_G F(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' - \iint_{\partial G} B(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{2.4.45b}$$

其中 Green 函数由 (2.4.40d) 决定. 当 $\lambda_0 = 0$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的非零本征值时, 得到相容性条件

$$\int_G [\psi_0^+(\boldsymbol{r})]^* F(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \iint_{\partial G} B[\psi_0^+(\boldsymbol{r})]^*\mathrm{d}S \tag{2.4.45c}$$

在 3.5 节中我们将介绍另外一种求解非齐次边值问题的方法, 即 Green 函数方法.

## 2.5 正交曲线坐标系中的分离变量

当区域 $G$ 的边界 $\partial G$ 具有一定的对称性时, 利用正交曲线坐标系来讨论问题是很方便的, 例如, 当 $\partial G$ 是球或圆柱的表面时, 必须用球坐标系或圆柱坐标, 否则无法进行分离变量. 由 2.4 节讨论, 求解有限区域内的定解问题之关键在于求解本征值问题, 故本节重点讨论正交曲线坐标系中本征方程的分离变量, 特别是球坐标系和柱坐标系, 而算子 $\boldsymbol{L}$ 则基本上考虑最简单的形式 $\boldsymbol{L} = -\nabla^2$.

### 2.5.1 球坐标系中的 Laplace 算子

如图 2.5.1 所示, 在球坐标中, 空间任意一点 $P$ 用三个参量 $(r, \vartheta, \varphi)$ 表示, 与直角坐标的变换关系为

$$\begin{gathered} x = r\sin\vartheta\cos\varphi;\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi;\ z = r\cos\vartheta \\ r \in (0, \infty),\ \vartheta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{gathered} \tag{2.5.1a}$$

任意矢量场 $\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{e}_r + A_\vartheta\boldsymbol{e}_\vartheta + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$(其中 $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\vartheta, \boldsymbol{e}_\varphi)$ 分别是径向、极角方向和方位角方向的单位矢量) 的散度和标量场 $\psi(r, \vartheta, \varphi)$ 的梯度为

$$\nabla\psi = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.5.1b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{2.5.1c}$$

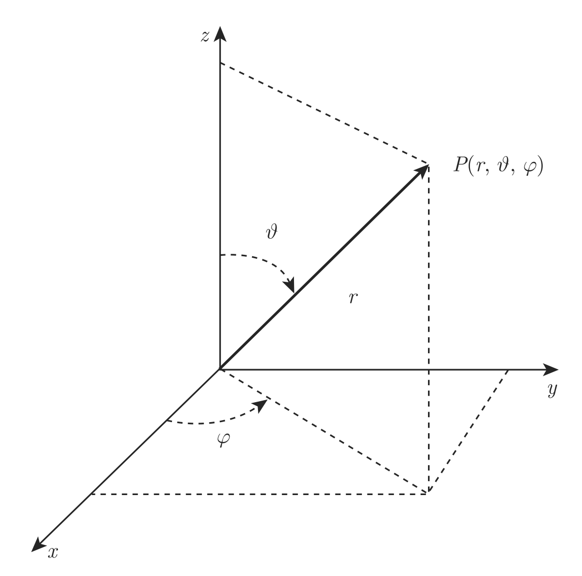



图 2.5.1　球坐标系统

利用运算关系 $\nabla^2\psi = \nabla \cdot (\nabla\psi)$, 取

$$A_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}; A_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}; A_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \tag{2.5.1d}$$

代入式 (2.5.1c) 即可得到 $\nabla^2\psi$ 的表达式. 因此, 球坐标中的 Laplace 算子为

$$\boldsymbol{L} = -\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{2.5.2a}$$

**Laplace 方程**　首先考虑 Laplace 方程 $\boldsymbol{L}\psi(r,\vartheta,\varphi) = 0$ 的分离变量解. 令

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)Y(\vartheta,\varphi) \tag{2.5.2b}$$

代入 Laplace 方程得到

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) - \frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} \tag{2.5.2c}$$

上式成立条件是左边和右边恒等于某一常数, 记为 $\nu(\nu+1)$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \nu(\nu+1)R = 0 \tag{2.5.3a}$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \nu(\nu+1)Y = 0 \tag{2.5.3b}$$

方程 (2.5.3a) 为 Euler 型方程, 具有幂次解

$$R(r) = Cr^{\nu} + Dr^{-(\nu+1)} \tag{2.5.4a}$$

而方程 (2.5.3b) 称为**球函数方程**, 仍可进一步分离变量

$$Y(\vartheta,\varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) \tag{2.5.4b}$$

代入方程 (2.5.3b) 得

$$\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0 \tag{2.5.4c}$$

$$\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\vartheta}\right) + [\nu(\nu+1)\sin^2\vartheta - \mu]\Theta = 0 \tag{2.5.4d}$$

其中 $\mu$ 为分离变量中出现的常数. 对方程 (2.5.4c) 应用周期性边界条件有

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \tag{2.5.5a}$$

方程 (2.5.4c) 和 (2.5.5a) 构成本征值问题, 可求得 $\mu$ 为 (见 2.3.1 小节中例 2.3.2)

$$\mu_m = m^2, (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.5.5b}$$

相应的归一化本征函数为

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.5.5c}$$

方程 (2.5.4d) 中令 $x = \cos\vartheta,\ x \in [-1, 1]$, 则有

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right] + \frac{m^2}{1-x^2}\Theta = \nu(\nu+1)\Theta \tag{2.5.6a}$$

上式为**连带 Legendre 方程**, 我们在 2.3.3 小节中已专门讨论. $x = \pm 1$ 是其奇点, 存在自然边界条件 $\Theta|_{x=\pm 1} < \infty$, 故 $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, 即 $\nu$ 为正整数 (记为 $l$). 根据 2.1.4 小节讨论, $Y(\vartheta,\varphi)$ 就是球谐函数 (由式 2.1.39a)

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\ |m| \leqslant l \tag{2.5.6b}$$

$\{Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\}$ 构成单位球面上的正交完备系. 于是, 在球坐标下 Laplace 方程有一般形式的解

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(C_{lm}r^l + D_{lm}\frac{1}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{2.5.6c}$$

$C_{lm}$ 和 $D_{lm}$ 可有边界条件决定.

**例 2.5.1** 求球内 ($r < R$) 或球外 ($r > R$) 的势分布且给定球面上的第一类边界条件

$$\psi(r,\vartheta,\varphi)|_{r=R} = f(\vartheta,\varphi) \tag{2.5.7a}$$

对球内 ($r < R$) 问题, 原点 $r = 0$ 在区域内, 故必须取 $D_{lm} = 0$, 即

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{2.5.7b}$$

而 $C_{lm}$ 满足

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{lm} R^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = f(\vartheta,\varphi)$$

于是求得

$$C_{lm} = \frac{1}{R^l}\iint_{r=R} f(\vartheta,\varphi) Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)\mathrm{d}\Omega \tag{2.5.7c}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$. 上式代入式 (2.5.7b) 得到

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = \iint_R f(\vartheta',\varphi')\tilde{G}(r,\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi')\mathrm{d}\Omega' \tag{2.5.7d}$$

其中函数

$$\tilde{G}(r,\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi') \equiv \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{r^l}{R^l} Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi') Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{2.5.7e}$$

注意：函数 $\tilde{G}(r,\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi')$ 不能称为 Laplace 方程球内第一类边值问题的 Green 函数. 见例 3.3.1 讨论. 对球外 ($r > R$) 问题, 要求当 $r \to \infty$, $\psi$ 有限, 故必须取 $C_{lm} = 0$, 即

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} D_{lm}\frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{2.5.8a}$$

而 $D_{lm}$ 满足

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} D_{lm} R^{-(l+1)} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = f(\vartheta,\varphi)$$

于是求得

$$D_{lm} = R^{l+1}\iint_R f(\vartheta,\varphi) Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)\mathrm{d}\Omega \tag{2.5.8b}$$

上式代入式 (2.5.8a) 得到

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = \iint_R f(\vartheta',\varphi')\tilde{G}(r,\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi')\mathrm{d}\Omega' \tag{2.5.8c}$$

其中

$$\tilde{G}(r,\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi')\equiv\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{R^{l+1}}{r^{l+1}}Y_{lm}^{*}(\vartheta',\varphi')Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{2.5.8d}$$

**Laplace 算子的本征值问题** 下面考虑半径为 $R$ 的球内区域 $G$ 的 Laplace 算子的本征值问题

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}\psi(r,\vartheta,\varphi)=\lambda\psi(r,\vartheta,\varphi),\ (r,\vartheta,\varphi)\in G\\&\left.\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right|_{r=R}=0,\ \vartheta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]\end{aligned} \tag{2.5.9a}$$

其中取权函数 $\rho(\boldsymbol{r})=1$. 令 $\psi(r,\vartheta,\varphi)=R(r)Y(\vartheta,\varphi)$, 采取同上的步骤, 可得 $Y(\vartheta,\varphi)$ 满足的球函数方程 (2.5.3b), 而径向部分满足

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+[\lambda r^2-\nu(\nu+1)]R=0 \tag{2.5.9b}$$

上式称为**球 Bessel 方程**, 作变换

$$x=\sqrt{\lambda}r;\ R(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x) \tag{2.5.9c}$$

则 $y(x)$ 满足的方程为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{1}{x}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2y(x)=xy(x) \tag{2.5.10a}$$

比较方程 (2.3.15a) 的第一式, 上式是 $(\nu+1/2)$ 阶 Bessel 方程 (当 $\nu=l$(正整数) 时, 称为半奇数阶 Bessel 方程), 二个线性独立解为 $(\nu+1/2)$ 阶 Bessel 函数和 Neumann 函数, 由方程 (2.3.15b) 得到通解

$$y(x)=AJ_{\nu+1/2}(x)+BN_{\nu+1/2}(x) \tag{2.5.10b}$$

定义**球 Bessel 函数**$j_\nu(x)$ 和**球 Neumann 函数**$n_\nu(x)$(见 2.5.5 小节讨论)

$$j_\nu(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{\nu+1/2}(x);\ n_\nu(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{\nu+1/2}(x) \tag{2.5.10c}$$

注意: $\nu$ 已由自然边界条件 $\Theta|_{\vartheta=0,\pi}<\infty$ 给出为 $\nu=l$, 因此, 方程 (2.5.9b) 的通解可写成

$$R(r)=Aj_l(\sqrt{\lambda}r)+Bn_l(\sqrt{\lambda}r) \tag{2.5.11}$$

球 Bessel 方程 (2.5.9b) 可表示为 S-L 型本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+l(l+1)R=\lambda r^2R \tag{2.5.12a}$$

权函数 $\rho(r)=r^2$, 而 $p(r)=r^2$. 注意到 $p(0)=0$, 所以 $r=0$ 是奇点, 存在自然边界条件, 对球内问题, 因 $n_l(x)\to\infty$, $(x\to 0)$, 故必须令 $B\equiv 0$. 本征值 $\lambda$ 由 (2.5.9a) 中边界条件决定, 由分离变量解 $\psi(r,\vartheta,\varphi)=R(r)Y(\vartheta,\varphi)$, 径向边界条件变为

$$\left.\left[\alpha R(r)+\beta\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]\right|_{r=R}=0 \tag{2.5.12b}$$

于是本征值 $\lambda$ 满足的方程为

$$\left.\left[\alpha j_l(x)+\beta\sqrt{\lambda}\frac{\mathrm{d}j_l(x)}{\mathrm{d}x}\right]\right|_{x=\sqrt{\lambda}R}=0 \tag{2.5.12c}$$

设上式第 $n$ 个根为 $\lambda_n^l$, $(n=0,1,2,\cdots)$, 根据 2.2 节的讨论, 函数系

$$\left\{j_l\left(\sqrt{\lambda_n^l}r\right);\ \rho=r^2,\ n=0,1,2,\cdots\right\} \tag{2.5.13}$$

构成 $r\in(0,R)$ 上完备的正交系. 于是, 如果 $f(r)$ 满足

$$\int_0^R|f(r)|^2r^2\mathrm{d}r<\infty \tag{2.5.14a}$$

可展成广义 Fourier 级数

$$f(r)\cong\sum_{n=1}^{\infty}a_n^l j_l\left(\sqrt{\lambda_n^l}r\right) \tag{2.5.14b}$$

广义 Fourier 系数为

$$a_n^l=\frac{1}{N_{nl}^2}\int_0^R f(r)j_l\left(\sqrt{\lambda_n^l}r\right)r^2\mathrm{d}r \tag{2.5.14c}$$

其中模的平方

$$N_{nl}^2\equiv\int_0^R\left[j_l\left(\sqrt{\lambda_n^l}r\right)\right]^2r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_n^l}}\int_0^R\left[J_{l+1/2}\left(\sqrt{\lambda_n^l}r\right)\right]^2r\mathrm{d}r \tag{2.5.15a}$$

由式 (2.3.17a) 和 (2.3.18b) 不难得到上式的积分:

(1) 对第一类边界条件

$$N_{nl}^2=\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_n^l}}\cdot\frac{R^2}{2}\left[J'_{l+1/2}\left(\sqrt{\lambda_n^l}R\right)\right]^2 \tag{2.5.15b}$$

(2) 对第二类边界条件

$$N_{nl}^2=\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_n^l}}\cdot\frac{R^2}{2}\left[1-\left(\frac{l+1/2}{\sqrt{\lambda_n^l}R}\right)^2\right]J_{l+1/2}^2\left(\sqrt{\lambda_n^l}R\right) \tag{2.5.15c}$$

因此, 球坐标中 Laplace 算子的本征值 $\lambda_n^l$ 是方程 (2.5.12c) 的根 (注意：$\lambda_n^l$ 与 $m$ 无关, 而与 $l$ 有关), 相应的本征函数为

$$\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)=\frac{1}{N_{nl}}j_l\left(\sqrt{\lambda_n^l}r\right)Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{2.5.16a}$$

于是, 如果 $f(r,\vartheta,\varphi)$ 满足

$$\int_{r<R}|f(r,\vartheta,\varphi)|^2r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega<\infty \tag{2.5.16b}$$

可展成广义 Fourier 级数

$$f(r,\vartheta,\varphi)\cong\sum_{n,l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}a_{lmn}\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi) \tag{2.5.17a}$$

广义 Fourier 系数为

$$a_{nlm}=\int_{r\leqslant R}f(r,\vartheta,\varphi)\psi_{nlm}^*(r,\vartheta,\varphi)r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega \tag{2.5.17b}$$

**例 2.5.2**　在 2.4.2 小节的例 2.4.3 中, 增殖速度大于扩散速度时, 中子浓度就指数发散. 条件是 $\chi>a^2\lambda_1$, 其中 $\lambda_1$ 是本征值问题式 (2.5.9a) 的最小非零本征值, 设中子浓度分布满足第一类边界条件 ($\beta=0$), 则 $\lambda_1$ 由方程 $j_l(x)=0$ 的最小根决定, 即最小根是 $j_0(x)=\sin x/x=0$ 的第一个非零根 $\lambda_1=(\pi/R)^2$. 故临界半径为 $R>a\pi/\sqrt{\chi}$.

以上讨论都限于一个完整的球, 下面讨论球壳层内问题.

**球壳层内问题**　设区域 $G$ 为壳层：$r\in(R_1,R_2)$, $\vartheta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, 在壳层内求解 Laplace 算子的本征值问题 (为了简单, 仅考虑第一类边界条件)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}\psi(r,\vartheta,\varphi)=\lambda\psi(r,\vartheta,\varphi),\ (r,\vartheta,\varphi)\in G\\&\psi|_{r=R_1}=\psi|_{r=R_2}=0,\ \vartheta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]\end{aligned} \tag{2.5.18a}$$

显然, 球函数部分依然不变, 仍然为球谐函数 $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$, 即式 (2.5.6b). 但径向的球 Bessel 方程的定义域变为 $R_1<r<R_2$, 不包括原点 $r=0$, 故不存在自然边界条件, 方程 (2.5.9b) 的通解

$$R(r)=Aj_l(\sqrt{\lambda}r)+Bn_l(\sqrt{\lambda}r) \tag{2.5.18b}$$

中的二个特解都要求保留. 由方程 (2.5.18a) 中的边界条件得到

$$\begin{aligned}&Aj_l(\sqrt{\lambda}R_1)+Bn_l(\sqrt{\lambda}R_1)=0\\&Aj_l(\sqrt{\lambda}R_2)+Bn_l(\sqrt{\lambda}R_2)=0\end{aligned} \tag{2.5.18c}$$

系数 $A$ 和 $B$ 存在非零解的条件为

$$j_l(\sqrt{\lambda}R_1)n_l(\sqrt{\lambda}R_2)-n_l(\sqrt{\lambda}R_1)j_l(\sqrt{\lambda}R_2)=0 \tag{2.5.18d}$$

上式就是决定本征值 $\lambda$ 的方程, 设上式第 $n$ 个根为 $\lambda_n^l$, $(n=0,1,2,\cdots)$, 由方程 (2.5.18c) 的第一式 (或第二式) 得到 $A$ 与 $B$ 的关系, 然后代入方程 (2.5.18b) 得归一化的本征函数

$$R_{nl}(r)=A_{nl}\left[j_l\left(\sqrt{\lambda_n^l}r\right)-\frac{j_l\left(\sqrt{\lambda_n^l}R_1\right)}{n_l\left(\sqrt{\lambda_n^l}R_1\right)}n_l\left(\sqrt{\lambda_n^l}r\right)\right] \tag{2.5.19a}$$

其中 $A_{nl}$ 由归一条件 $||R_{nl}(r)||^2=\int_{R_1}^{R_2}R_{nl}^2(r)r^2\mathrm{d}r=1$ 决定.

因此, 本征值问题式 (2.5.18a) 的解为

$$\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)=R_{nl}(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{2.5.19b}$$

相应的本征值 $\lambda$ 由方程 (2.5.18d) 决定. 此时, 定义在壳层: $r\in(R_1,R_2)$, $\vartheta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$ 上的正交、归一的完备系由方程 (2.5.19b) 给出.

### 2.5.2 圆锥形区域

设区域 $G$ 为圆锥形闭区域: $r\in(0,R)$, $\vartheta\in[0,\vartheta_0]$ 和 $\varphi\in[0,2\pi]$. 首先, 我们在此闭区域内求解 Laplace 算子的本征值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi(r,\vartheta,\varphi)=\lambda\psi(r,\vartheta,\varphi),\ (r,\vartheta,\varphi)\in G\\ \left.\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right|_{r=R}=0,\ \vartheta\in[0,\vartheta_0],\ \varphi\in[0,2\pi]\\ \psi|_{\vartheta=\vartheta_0}=0,\ r\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi]\end{gathered} \tag{2.5.20a}$$

分三个部分讨论:

(1) 首先, 考虑方位角 $\varphi$ 部分, 变量 $\varphi\in[0,2\pi]$, 仍然存在周期性边界条件, 故本征函数仍然由式 (2.5.5c) 决定;

(2) 其次, 考虑极角 $\vartheta$ 部分, 方程 (2.5.6a) 的定义域变成 $\vartheta\in(0,\vartheta_0)$, 或者连带 Legendre 方程 (2.5.6a) 的定义域变成 $x\in[\cos\vartheta_0,1]$. 由 2.3.3 小节中关于 Legendre 算子和连带 Legendre 算子的讨论知道, 此时我们应该取连带 Legendre 方程 (2.5.6a) 的通解为式 (2.3.34a), 即

$$\varTheta_\nu^{|m|}(\cos\vartheta)=A_\nu^{|m||}P_\nu^{|m|}(\cos\vartheta)+B_\nu^{|m|}Q_\nu^{|m|}(\cos\vartheta) \tag{2.5.20b}$$

其中第一、二类连带 Legendre 函数由式 (2.3.34b) 决定. 由于 $\vartheta=0$ 时, $Q_\nu^{|m|}(\cos\vartheta)\to\infty$, 故取 $B_\nu^{|m|}\equiv 0$. 由方程 (2.5.20a) 的第三式, 得到决定本征值 $\nu$ 的方程

$$P_\nu^{|m|}(\cos\vartheta_0)=0 \tag{2.5.20c}$$

设上式的第 $n$ 个根为 $\nu_n^m$, 则极角 $\vartheta$ 部分的本征函数为

$$\Theta_{\nu_n^m}^{|m|}(\cos\vartheta)=\frac{1}{||P_{\nu_n^m}^{|m|}||}P_{\nu_n^m}^{|m|}(\cos\vartheta) \tag{2.5.21a}$$

其中归一化常数为

$$||P_{\nu_n^m}^{|m|}||=\sqrt{\int_0^{\vartheta_0}|P_{\nu_n^m}^{|m|}(\cos\vartheta)|^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta} \tag{2.5.21b}$$

(3) 最后, 考虑径向部分, 球 Bessel 方程的定义域为 $r\in(0,R)$, 但方程 (2.5.9b) 中 $\nu$ 已不为正整数 $l$; 必须由方程 (2.5.20c) 决定. 求出 $\nu_n^m$ 后, 径向球 Bessel 方程 (2.5.9b) 变成

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+[\lambda r^2-\nu_n^m(\nu_n^m+1)]R=0 \tag{2.5.22a}$$

通解为

$$R(r)=Aj_{\nu_n^m}(\sqrt{\lambda}r)+Bn_{\nu_n^m}(\sqrt{\lambda}r) \tag{2.5.22b}$$

注意: 此时, 球 Bessel 函数的阶数不是正整数, 故不能用初等函数来表示. 由于当 $r=0$ 时, $n_{\nu_n^m}(0)\to\infty$, 故取 $B\equiv 0$, 上式代入方程 (2.5.20a) 的第二式得到与式 (2.5.12c) 类似的方程

$$\left.\left[\alpha j_{\nu_n^m}(x)+\beta\sqrt{\lambda}\frac{\mathrm{d}j_{\nu_n^m}(x)}{dx}\right]\right|_{x=\sqrt{\lambda}\cdot R}=0 \tag{2.5.23a}$$

上式就是决定本征值 $\lambda$ 的方程 (注意: 与式 (2.5.12c) 比较, 此时的本征值 $\lambda$ 与 $m$ 有关). 设上式的第 $k$ 个根为 $\lambda_k^{nm}$, $(k=0,1,2,\cdots)$, 则本征函数为

$$R_k^{nm}(r)=\frac{1}{||j_{\nu_n^m}||}j_{\nu_n^m}\left(\sqrt{\lambda_k^{nm}}r\right) \tag{2.5.23b}$$

其中归一化常数为

$$||j_{\nu_n^m}||=\sqrt{\int_0^R\left|j_{\nu_n^m}\left(\sqrt{\lambda_k^{nm}}r\right)\right|^2r^2\mathrm{d}r} \tag{2.5.23c}$$

因此, 本征值问题式 (2.5.20a) 的解为

$$\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)=\frac{1}{||\psi_{nlm}||}j_{\nu_n^m}\left(\sqrt{\lambda_k^{nm}}r\right)P_{\nu_n^m}^{|m|}(\cos\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.5.23d}$$

其中归一化常数为 $||\psi_{nlm}|| = \sqrt{2\pi}||j_{\nu_n^m}||\cdot||P_{\nu_n^m}^{|m|}||$, 相应的本征值 $\lambda_k^{nm}$ 由方程 (2.5.23a) 和 (2.5.20c) 决定.

注意: (1) 当 $\vartheta_0 = \pi/2$ 时, 区域就变成上半空间的半球, 特别是, 如果物理问题关于 $z$ 轴对称, $m = 0$, 则方程 (2.5.20c) 简化为 $P_\nu(0) = 0$, 由方程 (2.3.26c) 的第一式得到 $\cos(\nu\pi/2) = 0$, 即 $\nu_n^0 = 2n + 1$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$; (2) 对第二类边界条件, 方程 (2.5.20c) 修改为

$$\left.\frac{\mathrm{d}P_\nu^{|m|}(\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \tag{2.5.24}$$

特别是, 当 $\vartheta_0 = \pi/2$ 时, 并且问题关于 $z$ 轴对称, $m = 0$, 则方程 (2.5.24) 简化为 $P_\nu'(0) = 0$, 由方程 (2.3.26c) 的第二式得到 $\sin(\nu\pi/2) = 0$, 即 $\nu_n^0 = 2n$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

**圆锥形开区域问题**　设区域 $G$ 为圆锥形开区域: $r \in (a, \infty)$, $\vartheta \in [0, \vartheta_0]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, 在此区域内求解 Helmholtz 方程

$$\begin{gathered}
\nabla^2\psi(r,\vartheta,\varphi) + k^2\psi(r,\vartheta,\varphi) = 0,\ (r,\vartheta,\varphi) \in G \\
\left.\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0,\ r \in [0, \infty),\ \varphi \in [0, 2\pi] \\
\left.\frac{\partial\psi(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\vartheta,\varphi),\ \vartheta \in [0, \vartheta_0],\ \varphi \in [0, 2\pi]
\end{gathered} \tag{2.5.25}$$

注意: 本题中 $k$ 是给定的常数, 而不是待求的本征值. 由分离变量法, 令 $\psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\varTheta(\vartheta)\varPhi(\varphi)$: 对方位角 $\varphi$ 部分, 仍然得到式 (2.5.5c); 对极角 $\vartheta$ 部分, 同样得到式 (2.5.21a) 和 (2.5.24); 径向部分的球 Bessel 方程为式 (2.5.22a), 然而对开区域问题, 通解式 (2.5.22b) 已不恰当了. 事实上, 式 (2.5.22b) 是闭空间中驻波形式的解, 在开空间, 我们应该考虑辐射形式的行波解. 以球 Bessel 方程 (2.5.9b) 的解 $j_\nu(kr)$ 和 $n_\nu(kr)$(本题中 $\sqrt{\lambda} = k$) 为基础, 我们可以形成行波形式的新基本解.

**球 Hankel 函数**　因为 $j_\nu(kr)$ 和 $n_\nu(kr)$ 是方程 (2.5.9b) 的解, 它们的线性组合也是方程 (2.5.9b) 的解, 令

$$\begin{aligned}
h_\nu^{(1)}(kr) &= j_\nu(kr) + \mathrm{i}n_\nu(kr) \\
h_\nu^{(2)}(kr) &= j_\nu(kr) - \mathrm{i}n_\nu(kr)
\end{aligned} \tag{2.5.26a}$$

显然, $h_\nu^{(1)}(kr)$ 和 $h_\nu^{(2)}(kr)$ 也是球 Bessel 方程 (2.5.9b) 的解, 分别称为**第一、二类球 Hankel 函数**. 不难得到球 Hankel 函数的渐近展开 $(kr \to \infty)$(见 2.5.5 小节)

$$h_\nu^{(1)}(kr) \approx -\frac{\mathrm{i}}{kr}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr - l\pi/2)};\ h_\nu^{(2)}(kr) \approx \frac{\mathrm{i}}{kr}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kr - l\pi/2)} \tag{2.5.26b}$$

故 $h_\nu^{(1)}(kr)$ 和 $h_\nu^{(2)}(kr)$ 就是球坐标中行波解的一般形式.

于是, 令方程 (2.5.22a) 的通解为

$$R(r)=Ah_{\nu_n^m}^{(1)}(kr)+Bh_{\nu_n^m}^{(2)}(kr) \tag{2.5.27a}$$

因为 $h_\nu^{(2)}(kr)$ 不满足 Sommerfeld 辐射条件式, 故取 $B\equiv 0$. 进一步, 由叠加原理, 定解问题式 (2.5.25) 的通解可以表示为

$$\psi(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{nm}h_{\nu_n^m}^{(1)}(kr)P_{\nu_n^m}^{|m|}(\cos\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.5.27b}$$

注意: 现在 Legendre 函数 $P_{\nu_n^m}(x)$ 不是多项式, 故对 $|m|$ 没有限制. 其中 $\nu_n^m$ 是方程 (2.5.24) 的第 $n$ 个根, 由 $x=a$ 处的径向边界条件决定系数 $a_{nm}$

$$k\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{nm}\left[\frac{\mathrm{d}h_{\nu_n^m}^{(1)}(kr)}{\mathrm{d}(kr)}\right]_{r=a}P_{\nu_n^m}^{|m|}(\cos\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=f(\vartheta,\varphi) \tag{2.5.28a}$$

利用函数系 $\{P_{\nu_n^m}^{|m|}(\cos\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\}$ 的正交性, 不难得到

$$a_{nm}=A_{nm}\int_0^{\vartheta_0}\int_0^{2\pi}f(\vartheta,\varphi)[P_{\nu_n^m}^{|m|}(\cos\vartheta)]^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \tag{2.5.28b}$$

系数 $A_{nm}$ 为

$$A_{nm}\equiv\frac{1}{2\pi k||P_{\nu_n^m}^{|m|}||^2}\left[\frac{\mathrm{d}h_{\nu_n^m}^{(1)}(kr)}{\mathrm{d}(kr)}\right]_{r=a}^{-1} \tag{2.5.28c}$$

其中 $||P_{\nu_n^m}^{|m|}||$ 由式 (2.5.21b) 决定.

### 2.5.3 量子力学中的氢原子

作为物理应用的一个例子, 我们考虑量子力学对氢原子的处理. 定态 Schrödinger 方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2\psi+U(r)\psi=E\psi \tag{2.5.29a}$$

式中 $m_e$ 为电子质量, $U(r)$ 为氢原子核外电子与原子核 (质子) 的作用势

$$U(r)=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.5.29b}$$

其中 $e$ 为电子电荷, $\varepsilon_0$ 为真空介电常数, $Z$ 为核的质子数 (对氢原子 $Z=1$, 为了保证所得结论对类氢原子也成立, 保留 $Z$). 我们的目标是求核外电子被原子核束缚

的能量本征值和相应的本征函数. 由于方程 (2.5.29a) 含有 Laplace 算子, 极角和方位角部分由球谐函数描述, 故令分离变量解为

$$\psi(r,\vartheta,\varphi)=R(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{2.5.30a}$$

注意: 当作用势与极角和方位角有关, 即 $U=U(r,\vartheta,\varphi)$ 时, 上式不成立. 代入方程 (2.5.29a) 得到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left\{\frac{2m_e}{\hbar^2}[E-U(r)]-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R=0 \tag{2.5.30b}$$

引入无量纲常数

$$\begin{aligned}\rho&=\frac{Zr}{a_0};\ a_0=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_ee^2}\\ \varepsilon&=\frac{E}{2Z^2E_0};\ E_0=\frac{m_ee^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\end{aligned} \tag{2.5.30c}$$

于是方程 (2.5.30b) 变成

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}\rho^2}+\left[2\varepsilon+\frac{2}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\chi=0 \tag{2.5.31a}$$

其中函数变换为 $\chi(\rho)=rR(r)$. 当 $\rho\to\infty$ 时, 上式的渐近形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}\rho^2}+2\varepsilon\chi=0 \tag{2.5.31b}$$

如果 $\varepsilon>0$, $\chi$ 的解为

$$\chi=C_1\sin(\sqrt{2\varepsilon}\rho)+C_2\cos(\sqrt{2\varepsilon}\rho) \tag{2.5.31c}$$

对 $\varepsilon$ 没有任何限制, 而波函数可扩展到无限, 故不是原子核束缚核外电子的状态; 如果 $\varepsilon<0$, $\chi$ 的解为

$$\chi=C\exp(-\sqrt{2|\varepsilon|}\rho)+D\exp(\sqrt{2|\varepsilon|}\rho) \tag{2.5.31d}$$

上式第二项发散, 故取 $D=0$, 第一项指数衰减, 代表束缚态. 因此束缚态时, 氢原子的能量小于零. 当 $\rho\to0$ 时, 方程 (2.5.31a) 的渐近形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}\rho^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\chi\approx0 \tag{2.5.32a}$$

上式为 Euler 方程, 存在幂次形式的解

$$\chi_1=\rho^{-l},\quad \chi_2=\rho^{l+1} \tag{2.5.32b}$$

$\chi_1$ 在原点发散, 故舍去. 考虑到 $\rho \to 0$ 和 $\rho \to \infty$ 解的特征, 因此令

$$\chi(\rho) = \rho^{l+1} \exp(-\beta\rho) u(\rho) \tag{2.5.33a}$$

其中 $\beta = \sqrt{-2\varepsilon}$. 方程 (2.5.31a) 简化成

$$\xi \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + [2(l+1) - \xi] \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \alpha u = 0 \tag{2.5.33b}$$

其中 $\xi = 2\beta\rho$ 和 $\alpha = 1/\beta - (l+1)$. 对照方程 (2.3.40d), 显然上式为连带 Laguerre 方程, 其中 $\nu = 2l+1$. 设方程 (2.5.33b) 的级数解为

$$u(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n \tag{2.5.33c}$$

代入方程 (2.5.33b) 得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} [k + 2(l+1)](k+1) C_{k+1} - (k-\alpha) C_k] \xi^k = 0 \tag{2.5.33d}$$

于是得到递推关系

$$C_{k+1} = \frac{(k-\alpha)}{[k+2(l+1)](k+1)} C_k \tag{2.5.33e}$$

显然

$$\lim_{k\to\infty} \frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{1}{k} \tag{2.5.34a}$$

注意到级数 $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^n/n!$ 的系数比也由上式表示, 故一般情况下 $\lim\limits_{\xi\to\infty} u(\xi) = \exp(\xi)$, 即 $\lim\limits_{\rho\to\infty} u(2\beta\rho) = \exp(2\beta\rho)$, 故

$$\lim_{\rho\to} \chi(\rho) = \rho^{l+1} \exp(-\beta\rho) \exp(2\beta\rho) \sim \exp(\beta\rho) \tag{2.5.34b}$$

但当 $u(\xi)$ 为多项式时, $\chi(\rho)$ 指数衰减. 显然, 由递推关系式 (2.5.33e), $u(\xi)$ 截断为多项式的条件为

$$\alpha = n_r, \ (n_r = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.5.34c}$$

即

$$\frac{1}{\beta} = n_r + (l+1) \equiv n, \ \ (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.5.34d}$$

注意：上式表明, 对给定的 $n$, $l$ 的取值为 $l = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. 因此, 由 $\beta = \sqrt{-2\varepsilon}$ 和式 (2.5.30c) 得到能量本征值为

$$E_n \equiv -\frac{Z^2}{n^2} E_0 \tag{2.5.35a}$$

此时方程 (2.5.33b) 中 $\alpha = 1/\beta - (l+1) = n - (l+1)$ 为正整数, 故解为连带 Laguerre 多项式 $u(\xi) = L_{n-(l+1)}^{2l+1}(\xi)$. 回到原来的变量和函数

$$R(r) = \frac{1}{r}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^{l+1} \exp\left(-\frac{Zr}{na_0}\right) L_{n-(l+1)}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right) \tag{2.5.35b}$$

因此, 氢原子的本征函数为

$$\begin{gathered} \psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \\ n = 1, 2, \cdots;\ l = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l \end{gathered} \tag{2.5.35c}$$

归一化后的径向波函数为

$$R_{nl}(r) = A_{nl} \exp\left(-\frac{Zr}{na_0}\right)\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l L_{n-(l+1)}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right) \tag{2.5.35d}$$

其中系数

$$A_{nl} \equiv \sqrt{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \tag{2.5.35e}$$

连带 Laguerre 多项式为

$$L_{n-(l+1)}^{2l+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-(l+1)} \frac{(-1)^{k+1}[(n+l)!]^2 x^k}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} \tag{2.5.36a}$$

$R_{nl}(r)$ 的前 3 个表达式为

$$R_{10}(r) = 2\sqrt{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3} \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right) \tag{2.5.36b}$$

$$R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3}\left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right) \exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right) \tag{2.5.36c}$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\sqrt{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3}\frac{Zr}{a_0} \exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right) \tag{2.5.36d}$$

相应的能量本征值由式 (2.5.35a) 决定.

**氢原子的简并** 注意到氢原子的能量本征值仅与主量子数有关, 给定 $n$ 后, $l$ 取值可以为 $l = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$ 有 $n$ 种选择; 而 $m$ 可以为 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$, 有 $(2l+1)$ 种选择. 故给定 $n$ 后共有

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2 \tag{2.5.37}$$

个不同的本征函数 (因为本征函数与 $n$、$l$ 和 $m$ 都有关) 具有同一个能量本征值. 显然氢原子的简并度为 $n^2$(考虑到电子的自旋后, 简并度为 $2n^2$).

### 2.5.4 圆柱坐标系中的 Laplace 算子

如图 2.5.2 所示, 在圆柱坐标中, 空间任意一点 $P$ 用三个参量 $(\rho,\varphi,z)$ 表示, 与直角坐标的变换关系为

$$\begin{gathered} x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ z=z \\ \rho\in(0,\infty),\ \varphi\in[0,2\pi],\ z\in(-\infty,+\infty) \end{gathered} \tag{2.5.38a}$$

任意矢量场 $\boldsymbol{A}=A_\rho\boldsymbol{e}_\rho+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+A_z\boldsymbol{e}_z$(其中 $(\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z)$ 分别是径向、方位角方向和轴向的单位矢量) 的散度和标量场 $\psi(\rho,\varphi,z)$ 的梯度为

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{2.5.38b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{2.5.38c}$$

利用运算关系 $\nabla^2\psi=\nabla\cdot(\nabla\psi)$, 取

$$A_\rho=\frac{\partial\psi}{\partial\rho};\ A_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi};\ A_z=\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{2.5.38d}$$

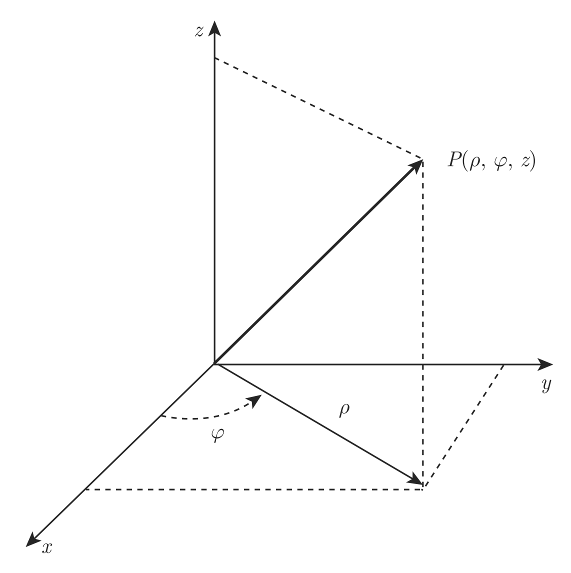



图 2.5.2 圆坐标系统

代入式 (2.5.38c) 即可得到 $\nabla^2\psi$ 的表达式. 因此, 圆柱坐标中的 Laplace 算子为

$$\boldsymbol{L}=-\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \tag{2.5.39a}$$

**Laplace 方程**　首先考虑 Laplace 方程的分离变数解

$$\psi(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \tag{2.5.39b}$$

代入 Laplace 方程 $\boldsymbol{L}\psi=0$ 可得

$$\Phi''+\mu\Phi=0;\quad Z''-\nu Z=0 \tag{2.5.39c}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(\nu-\frac{\mu}{\rho^2}\right)R=0 \tag{2.5.39d}$$

其中 $\mu$ 和 $\nu$ 为分离变量常数. 对方程 (2.5.39c) 的第一式仍有周期性边界条件, 于是方程 (2.5.5b) 和 (2.5.5c)) 仍然成立; 方程 (2.5.39c) 的第二式分三种情况讨论之.

(1) $\nu=0$: $Z(z)=A+Bz$, 相应地, 由方程 (2.5.39d) 得

$$R(\rho)=\begin{cases} C\rho^{|m|}+D\rho^{-|m|}, & m\neq 0\\ E+F\ \ln\ \rho, & m=0\end{cases} \tag{2.5.40a}$$

(2) $\nu>0$: $Z(z)=O\exp(\sqrt{\nu}z)+P\exp(-\sqrt{\nu}z)$, 而 $R(\rho)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0 \tag{2.5.40b}$$

其中 $x=\sqrt{\nu}\rho$. 上式为 $m$ 阶 Bessel 方程, 故

$$R(\sqrt{\nu}\rho)=EJ_m(\sqrt{\nu}\rho)+DN_m(\sqrt{\nu}\rho) \tag{2.5.40c}$$

(3) $\nu<0$, 令 $-\nu=k_z^2$ 于是 $Z(z)=C\cos k_zz+D\sin k_zz$, 而 $R(\rho)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-\left(1+\frac{m^2}{x^2}\right)R=0 \tag{2.5.41a}$$

其中 $x=k_z\rho$, 上式可由 Bessel 方程 (2.5.40b) 令 $x\to \mathrm{i}x$ 而得, 故称为**虚宗量 Bessel 方程**, 它的两个线性独立解分别为第一和第二类变形 Bessel 函数 $I_m(k_z\rho)$ 和 $K_m(k_z\rho)$

$$R(k_z\rho)=EI_m(k_z\rho)+FK_m(k_z\rho) \tag{2.5.41b}$$

参数 $\nu>0$ 或 $\nu=0$, 还是 $\nu<0$, 须根据具体情况而定, 如果要求 $\psi$ 在两端 $z=0$ 和 $h$ 满足齐次边界条件, 而在柱面 $\rho=a$ 上给定非齐次边界条件, 则要求 $\nu<0$; 反之, 如果给定柱面 $\rho=a$ 上齐次边界条件, 而两端 $z=0$ 和 $h$ 为非齐次边界条件, 由于 $I_m(k_z\rho)$ 和 $K_m(k_z\rho)$ 无实零点, 故不可能 $\nu<0$, 只有 $\nu\geqslant 0$. 对第二类边界条件, 一般需要考虑 $\nu$ 是否为零.

根据 Bessel 方程, 定义了 Bessel 函数、Neumann 函数、第一和第二类变形 Bessel 函数等特殊函数, 这些函数通称为**柱函数**, 我们将在 2.5.5 小节专门介绍它们的性质.

**例 2.5.3**　求解有限圆柱体内 Laplace 方程的定解问题

$$\begin{gathered}\nabla^2\psi=0,\ (\rho,\varphi,z)\in G\\ \psi|_{\rho=a}=f_1(z,\varphi);\ \psi|_{z=0}=f_2(\rho,\varphi);\ \psi|_{z=h}=f_3(\rho,\varphi)\end{gathered}\tag{2.5.42a}$$

式中区域 $G$ 为高 $h$, 半径 $a$ 的柱体, 边界 $\partial G$: 圆柱面和圆柱体的上、下底面. 由于边界条件都是非齐次的, 因此, 令 $\psi=\psi_1+\psi_2$, 其中 $\psi_1$ 满足上下底面齐次边界条件, 但柱面为非齐次边界

$$\begin{gathered}\nabla^2\psi_1=0,\ (\rho,\varphi,z)\in G\\ \psi_1|_{\rho=a}=f_1(z,\varphi);\ \psi_1|_{z=0}=\ \psi_1|_{z=h}=0\end{gathered}\tag{2.5.42b}$$

函数 $f_1$ 必须满足相容性条件 $f_1(0,\varphi)=f_1(h,\varphi)=0$; $\psi_2$ 满足柱面齐次边界条件, 而两底面为非齐次边界

$$\begin{gathered}\nabla^2\psi_2=0,\ (\rho,\varphi,z)\in G\\ \psi_2|_{\rho=a}=0;\ \psi_2|_{z=0}=f_2(\rho,\varphi);\ \psi_2|_{z=h}=f_3(\rho,\varphi)\end{gathered}\tag{2.5.42c}$$

相容性条件为 $f_2(a,\varphi)=f_3(a,\varphi)=0$.

(1) 对 $\psi_1$ 有 $\nu<0$, 而 $Z(z)$ 满足边界条件

$$Z(z)|_{z=0}=0;\ Z(z)|_{z=h}=0\tag{2.5.43a}$$

因而求得

$$Z(z)=D\sin\frac{n\pi}{h}z;\ k_z^n=\frac{n\pi}{h},\ (n=1,2,\cdots)\tag{2.5.43b}$$

当 $\rho\to 0$ 时, $K_m(k_z\rho)\to\infty$ 发散, 故令式 (2.5.41b) 式中 $F\equiv 0$, 于是 $\psi_1$ 为

$$\psi_1(\rho,\varphi,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}E_n^m\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)I_m\left(\frac{n\pi}{h}\rho\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\tag{2.5.43c}$$

系数 $E_n^m$ 由 $\rho=a$ 处的边界条件决定

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}E_n^m\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)I_m\left(\frac{n\pi}{h}a\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=f_1(z,\varphi)\tag{2.5.44a}$$

故 $E_n^m$ 为

$$E_n^m=\frac{1}{\pi hI_m(n\pi a/h)}\int_0^h\int_0^{2\pi}f_1(z,\varphi)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\tag{2.5.44b}$$

上式代入方程 (2.5.43c) 得到

$$\psi_1(\rho,\varphi,z)=\int_0^h\int_0^{2\pi}g(\rho,z,\varphi,z',\varphi')f_1(z',\varphi')\mathrm{d}z'\mathrm{d}\varphi' \tag{2.5.44c}$$

其中

$$\begin{aligned}g(\rho,z,\varphi,z',\varphi')\equiv&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{I_m(n\pi\rho/h)}{\pi hI_m(n\pi a/h)}\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\\&\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{h}z'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\end{aligned} \tag{2.5.44d}$$

当 $\rho=a$ 时, 存在封闭性关系 (见 3.1.2 小节的式 (3.1.24e))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi h}\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}=\delta(z,z')\delta(\varphi,\varphi') \tag{2.5.44e}$$

(2) 对 $\psi_2$ 有 $\nu\geqslant 0$, 本征值 $\nu$ 由 $\rho=a$ 处的边界条件决定. 当 $\rho\to 0$ 时, $N_m(\sqrt{\nu}\rho)\to\infty$ 发散, 故令式 (2.5.40c) 中 $D\equiv 0$, 从而由柱面满足的齐次边界条件 $\psi_2|_{\rho=a}=0$ 得满足 $J_m(\sqrt{\nu}a)=0$. 设 $J_m(x)=0$ 的第 $n$ 个根为 $x_n^m$, 则本征值为

$$\nu_n^m=\left(\frac{x_n^m}{a}\right)^2,\ (n=0,1,2,\cdots) \tag{2.5.45a}$$

对 $\nu=0$, 因 $\rho=0$ 在区域内, 从而式 (2.5.40a) 中 $D=F\equiv 0$, 又由柱面上齐次边界条件要求式 (2.5.40a) 中 $C=E=0$, 于是

$$\psi_2(\rho,\varphi,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(E_{mn}\mathrm{e}^{\sqrt{\nu_n^m}z}+F_{mn}\mathrm{e}^{-\sqrt{\nu_n^m}z}\right)J_m(\sqrt{\nu_n^m}\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.5.45b}$$

系数 $E_m$ 和 $F_m$ 由上、下面 $z=0$ 和 $h$ 的边界条件决定

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(E_{mn}+F_{mn})J_m(\sqrt{\nu_n^m}\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=f_2(\rho,\varphi)\\\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(E_{mn}\mathrm{e}^{\sqrt{\nu_n^m}h}+F_{mn}\mathrm{e}^{-\sqrt{\nu_n^m}h})J_m(\sqrt{\nu_n^m}\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=f_3(\rho,\varphi)\end{gathered} \tag{2.5.45c}$$

由于函数系 $\{J_m(\sqrt{\nu_n^m}\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\}$ 构成完备的正交系, 不难从上二式求得 $E_{mn}$ 和 $F_{mn}$. 为了运算简单, 首先设 $f_2(\rho,\varphi)=0$, 于是

$$\begin{gathered}E_{mn}+F_{mn}=0\\E_{mn}\mathrm{e}^{\sqrt{\nu_n^m}h}+F_{mn}\mathrm{e}^{-\sqrt{\nu_n^m}h}=\tilde{f}_{nm}\end{gathered} \tag{2.5.46a}$$

其中

$$\tilde{f}_{nm}=\frac{1}{\pi a^2J_{m+1}^2(\mu_n^ma)}\int_0^a\int_0^{2\pi}f_3(\rho,\varphi)J_m(\sqrt{\nu_n^m}\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \tag{2.5.46b}$$

由方程 (2.5.46a) 得到

$$E_{mn} = \frac{\tilde{f}_{nm}}{2\sinh\sqrt{\nu_n^m}h} = -F_{mn} \tag{2.5.46c}$$

代入式 (2.5.45b) 得到

$$\psi_2(\rho,\varphi,z) = \int_0^a\int_0^{2\pi} g_1(\rho,\rho',\varphi,\varphi',z)f_3(\rho',\varphi')\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi' \tag{2.5.47a}$$

其中

$$\begin{gathered} g_1(\rho,\rho',\varphi,\varphi',z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\mu_n^m a)}\cdot\frac{\sinh\sqrt{\nu_n^m}z}{\sinh\sqrt{\nu_n^m}h} \\ \cdot J_m(\sqrt{\nu_n^m}\rho)J_m(\sqrt{\nu_n^m}\rho')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')} \end{gathered} \tag{2.5.47b}$$

如果 $f_3(\rho,\varphi)=0$, 同样得到

$$\psi_2(\rho,\varphi,z) = \int_0^a\int_0^{2\pi} g_2(\rho,\rho',\varphi,\varphi',z)f_2(\rho',\varphi')\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi' \tag{2.5.47c}$$

其中

$$\begin{gathered} g_2(\rho,\rho',\varphi,\varphi',z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\mu_n^m a)}\cdot\frac{\sinh\sqrt{\nu_n^m}(h-z)}{\sinh\sqrt{\nu_n^m}h} \\ \cdot J_m(\sqrt{\nu_n^m}\rho)J_m(\sqrt{\nu_n^m}\rho')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')} \end{gathered} \tag{2.5.47d}$$

由叠加原理, 式 (2.5.47a) 和 (2.5.47c) 相加就得到方程 (2.5.42c) 的解.

**Laplace 算子的本征值问题**　设区域 $G$ 为高 $h$、半径 $R$ 的圆柱体之内部, 边界 $\partial G$ 为侧面及上、下底. 于是, 本征值问题为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\lambda\psi=0,\ (\rho,\varphi,z)\in G \tag{2.5.48a}$$

且满足齐次边界条件

$$\begin{gathered} \left.\left(\alpha_1\psi-\beta_1\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right|_{z=0}=0;\quad \left.\left(\alpha_2\psi+\beta_2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right|_{z=h}=0 \\ \left.\left(\alpha_3\psi+\beta_3\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)\right|_{\rho=R}=0 \end{gathered} \tag{2.5.48b}$$

令分离变量解 $\psi=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ 代入方程 (2.5.48a) 得到:

(1) 方位角部分 $\Phi(\varphi)$ 仍然满足方程 (2.5.39c) 的第一式, 其解由方程 (2.5.5b) 和 (2.5.5c) 给出;

(2) 轴向部分 $Z(z)$ 仍然满足方程 (2.5.39c) 的第二式, 且满足上、下面齐次边界条件 (方程 (2.5.48b) 的第一、二式), 故 $\nu<0$, 令 $-\nu=k_z^2$ 得到

$$Z(z)=C\cos k_z z+D\sin k_z z \tag{2.5.49a}$$

本征值 $k_z$ 由上、下底面齐次边界条件决定: 把上式代入方程 (2.5.48b) 中齐次边界条件得到关于 $C$ 和 $D$ 的齐次线性方程组, 由存在非零解的条件得到决定本征值 $k_z$ 的方程. 考虑几种简单情况:

(a) $\beta_1=\beta_2=0$ 和 $\alpha_1=\alpha_2=1$, 那么

$$Z_n(z)=D_n\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right);\ k_z^n=\frac{n\pi}{h},\ (n=1,2,\cdots) \tag{2.5.49b}$$

(b) $\beta_1=\beta_2=1$ 和 $\alpha_1=\alpha_2=0$, 那么

$$Z_n(z)=D_n\cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right);\ k_z^n=\frac{n\pi}{h},\ (n=0,1,2,\cdots) \tag{2.5.49c}$$

注意: 对第二类边界条件, 存在零本征值.

(c) $\beta_1=\alpha_2=0$ 和 $\alpha_1=\beta_2=1$, 那么

$$Z_n(z)=D_n\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}z\right];\ k_z^n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{2.5.49d}$$

(d) $\alpha_1=\beta_2=0$ 和 $\alpha_2=\beta_1=1$, 那么

$$Z_n(z)=D_n\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}z\right];\ k_z^n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{2.5.49e}$$

(3) 径向部分 $R(\rho)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left[\lambda-(k_z^n)^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right]R=0 \tag{2.5.50a}$$

令 $k^2=\lambda-(k_z^n)^2$ 和 $x=k\rho$ 得到标准形式的 $m$ 阶 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0 \tag{2.5.50b}$$

由于问题包含 $\rho=0$(即 $z$ 轴), 故取解为 $R(\rho)=J_m(k\rho)$, 其中本征值 $\lambda$ 或者 $k$ 由径向边界条件决定, 则有

$$\left.\left[\alpha_3J_m(k\rho)+\beta_3\frac{\mathrm{d}J_m(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]\right|_{\rho=R}=0 \tag{2.5.51a}$$

设上式的第 $l$ 个根为 $k_l^m$, $(l=0,1,2,\cdots)$, 则本征值 $\lambda_{lmn}=(k_l^m)^2+(k_z^n)^2$. 本征函数系为

$$\psi_{lmn}(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{N_{lmn}}J_m(k_l^m\rho)Z_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.5.51b}$$

其中归一化系数 $N_{lmn}$ 为

$$N_{lmn}=\sqrt{2\pi\int_0^h\int_0^R Z_n^2(z)[J_m(k_l^m\rho)]^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z} \tag{2.5.51c}$$

考虑简单情况：$\beta_3=0$ 和 $\alpha_3=1$, 那么 $k_l^m=x_l^m\ /\ R$, $(l=0,1,2,\cdots)$, 其中 $x_l^m$ 是 $m$ 阶 Bessel 函数的第 $l$ 个零点, 即 $J_m(x_l^m)=0$.

**例 2.5.4**　在 2.4.2 小节的例 2.4.3 中, 对圆柱体材料且满足第一类边界条件, 则第一个非零根 $\lambda_1=\lambda_{101}=(k_1^0)^2+(k_z^1)^2=(x_1^0\ /\ R)^2+(\pi/h)^2$, 其中 $x_1^0$ 是 0 阶 Bessel 函数 (即 $m$=0) 的第一个零点 (即 $l$=1), $x_1^0\approx 2.408$. 故临界值满足

$$\frac{\chi}{a^2}>\left(\frac{x_1^0}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \tag{2.5.52a}$$

当圆柱体高度一定时, 临界半径为

$$R>x_1^0\left[\frac{\chi}{a^2}-\left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{2.5.52b}$$

当圆柱体半径一定时, 临界高度为

$$h>\pi\left[\frac{\chi}{a^2}-\left(\frac{\pi}{R}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{2.5.52c}$$

**圆柱壳层内的本征值问题**　设区域 $G$ 为高 $h$ 的圆柱壳层：$\rho\in(R_1,R_2)$, 在壳层上、下面仍然满足齐次边界条件, 而壳层的内、外侧面满足

$$\left(\alpha_3\psi+\beta_3\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)\bigg|_{\rho=R_2}=0;\quad \left(\alpha_4\psi-\beta_4\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)\bigg|_{\rho=R_1}=0 \tag{2.5.53a}$$

显然, 方位角部分 $\Phi(\varphi)$ 和轴向部分 $Z(z)$ 都不变, 不同的是, 由于问题不包含 $\rho=0$(即 $z$ 轴), 故 Bessel 方程的通解应该包括 Neumann 函数

$$R(\rho)=A_mJ_m(k\rho)+B_mN_m(k\rho) \tag{2.5.53b}$$

其中 $k=\sqrt{\lambda-(k_z^n)^2}$. 把上式代入径向边界条件方程 (2.5.53a) 就能得到决定本征值 $\lambda$ 或者 $k$ 的方程. 考虑简单情况：$\beta_3=\beta_4=0$ 和 $\alpha_3=\alpha_4=1$, 则

$$\begin{aligned}A_mJ_m(kR_1)+B_mN_m(kR_1)=0\\ A_mJ_m(kR_2)+B_mN_m(kR_2)=0\end{aligned} \tag{2.5.53c}$$

径向本征值 $k$ 由下列方程决定

$$A_m J_m(kR_1)N_m(kR_2) - N_m(kR_1)J_m(kR_2) = 0 \tag{2.5.53d}$$

设上式第 $l$ 个根为 $k_l^m$, 最后得到本征值 $\lambda_{lmn} = (k_l^m)^2 + (k_z^n)^2$, 以及相应的本征函数系

$$\psi_{lmn}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{N_{lmn}} R_{lmn}(\rho) Z_n(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.5.54a}$$

其中函数 $R_{lmn}(\rho)$ 和归一化系数 $N_{lmn}$ 为

$$\begin{aligned} R_{lmn}(\rho) &= J_m(k_l^m \rho) - \frac{J_m(k_l^m R_1)}{N_m(k_l^m R_1)} N_\nu(k_l^m \rho) \\ N_{lmn} &= \sqrt{2\pi \int_0^h \int_{R_1}^{R_2} Z_n^2(z)[R_{lmn}(\rho)]^2 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z} \end{aligned} \tag{2.5.54b}$$

**不完整方位角问题** 设区域 $G$: $\rho \in (0, R)$; $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$; $z \in (0, h)$. 此时, 必须在 5 个面上都给出边界条件, 除边界条件式 (2.5.48b) 外, 在 $\varphi = \varphi_1$ 和 $\varphi = \varphi_2$ 面上增加边界条件 $\psi|_{\varphi=\varphi_1} = \psi|_{\varphi=\varphi_2} = 0$(仅仅考虑第一类边界, 对第二类边界也可作类似处理). 显然, 轴向部分 $Z(z)$ 不变, 仍然由方程 (2.5.49a) 决定；但对方位角部分 $\varPhi(\varphi)$, 已没有周期性自然边界条件, 即 $\varPhi(\varphi)$ 满足本征值问题

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 \varPhi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} + \mu \varPhi(\varphi) = 0, \ \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2) \\ &\varPhi(\varphi)|_{\varphi=\varphi_1} = \varPhi(\varphi)|_{\varphi=\varphi_2} = 0 \end{aligned} \tag{2.5.55a}$$

显然, 上式的解为

$$\varPhi_m(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \sin\left[\frac{m\pi(\varphi - \varphi_1)}{\Delta}\right], \ (m = 1, 2, \cdots) \tag{2.5.55b}$$

其中 $\Delta = \varphi_2 - \varphi_1$, 本征值为 $\mu_m \equiv \tilde{m}^2$, 其中 $\tilde{m} = m\pi/\Delta$. 注意：当取 $\varphi_1 = 0$ 和 $\varphi_2 = 2\pi$, 本征值为 $\mu_m = m^2/4$, 相应的本征函数为

$$\varPhi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{m}{2}\varphi\right) \tag{2.5.55c}$$

与通过周期边界条件得到的本征函数有很大区别！因为此时相当于在平面 $(y = 0, \ x > 0)$ 加了不可逾越的壁障, 变量 $\varphi$ 没有了周期性.

径向部分 $R(\rho)$ 满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} + \left[\lambda - (k_z^n)^2 - \frac{\tilde{m}^2}{\rho^2}\right] R = 0 \tag{2.5.56a}$$

考虑到问题包含 $\rho=0$(即 $z$ 轴), 故取解为 $R(\rho)=J_{\tilde{m}}(k\rho)$(注意: 式中 Bessel 函数的阶数 $\tilde{m}$ 是任意的), 代入径向边界条件 (方程 (2.5.48b)) 的第三式) 得到决定本征值 $\lambda$ 或者 $k$ 的方程

$$\left[\alpha_3 J_{\tilde{m}}(k\rho)+\beta_3\frac{\mathrm{d}J_{\tilde{m}}(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]\bigg|_{\rho=R}=0 \tag{2.5.56b}$$

设上式第 $l$ 个根为 $k_l^{\tilde{m}}$, 最后得到本征值 $\lambda_{lmn}=(k_l^{\tilde{m}})^2+(k_z^n)^2$, 以及相应的本征函数系

$$\psi_{lmn}(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{N_{lmn}}\sqrt{\frac{2}{\Delta}}J_{\tilde{m}}(k_l^{\tilde{m}}\rho)Z_n(z)\sin\left[\frac{m\pi(\varphi-\varphi_1)}{\Delta}\right] \tag{2.5.57a}$$

其中归一化系数 $N_{lmn}$ 为

$$N_{lmn}=\sqrt{\int_0^h\int_0^R Z_n^2(z)[J_{\tilde{m}}(k_l^{\tilde{m}}\rho)]^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z} \tag{2.5.57b}$$

### 2.5.5 柱函数: Bessel 函数的几种不同形式

在 2.5.1 和 2.5.4 小节中, 我们经常遇到 Bessel 方程. 因此有必要讨论一下它的解的性质. 考虑任意 $\nu$ 阶 Bessel 方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-\nu^2)y=0 \tag{2.5.58a}$$

由于 $x=0$ 是 Bessel 方程的正则奇点, 存在 $x=0$ 处有限的解, 即为 Bessel 函数 $J_\nu(x)$, 它具有级数形式

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \tag{2.5.58b}$$

而 Bessel 方程的另一个解在 $x=0$ 有奇性, 它一般取下列形式

$$N_\nu(x)=\frac{\cos\nu\pi J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{2.5.58c}$$

$J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 分别称为 **Bessel 函数**和 **Neumann 函数**. 图 2.5.3 和图 2.5.4 出了前三个 Bessel 函数和 Neumann 函数. 显然取 $J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 的线性组合也应是 Bessel 方程的解

$$\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(x)&=J_\nu(x)+\mathrm{i}N_\nu(x)\\H_\nu^{(2)}(x)&=J_\nu(x)-\mathrm{i}N_\nu(x)\end{aligned} \tag{2.5.59a}$$

称 $H_\nu^{(1)}(x)$ 和 $H_\nu^{(2)}(x)$ 为第三类 Bessel 函数, 或称为第一和第二类 **Hankel 函数**. 三类 Bessel 函数通称为**柱函数**(注意: 柱函数一定是 Bessel 方程的解, 反之不成立).

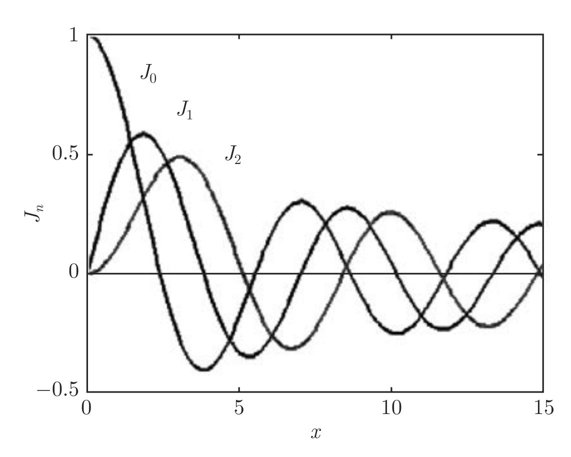



图 2.5.3　前三个 Bessel 函数

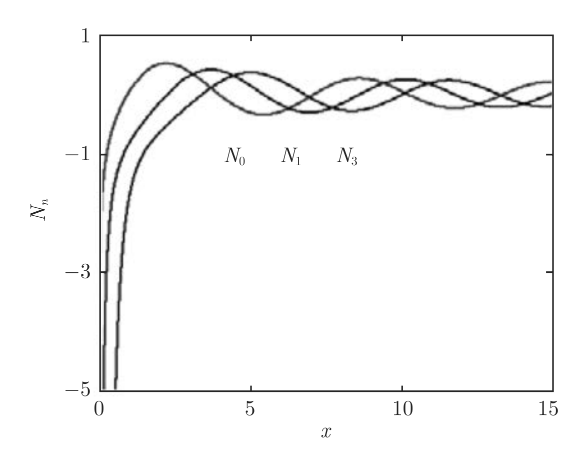



图 2.5.4　前三个 Neumann 函数

柱函数当 $x \to \infty$ 时有渐近式

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}) \\ N_\nu(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}) \end{aligned} \tag{2.5.59b}$$

以及

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[\mathrm{i}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] + O(x^{-3/2}) \\ H_\nu^{(2)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-\mathrm{i}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] + O(x^{-3/2}) \end{aligned} \tag{2.5.59c}$$

由此可见: ①$J_\nu(x)$ 或 $N_\nu(x)$ 在无穷远处有振荡特性; ②$J_\nu(x)$ 或 $N_\nu(x)$ 在 $x$ 轴上

有无穷多个零点; ③$(J_\nu, N_\nu)$ 与 $(H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)})$ 的关系, 就象三角函数 $(\sin x, \cos x)$ 与指数函数 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$ 的关系. 由于 $(J_\nu, N_\nu)$ 表示驻波解, 而驻波只能在有限空间中反射形成, 因此, 在有限空间中取 $J_\nu$ 和 $N_\nu$ 较方便; 反之, $(H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)})$ 表示行波解, 而行波只有在无穷空间才能实现, 因此, 考虑波的辐射和散射问题时, 取 Hankel 函数较为方便.

特别要指出的是, 式 (2.5.59b) 或者 (2.5.59c) 的渐近表达式只有在 $x >> \nu$ 才成立, 对固定的 $x$, 即使 $x$ 很大, 如果 $\nu$ 也很大, 以至 $x \approx \nu$(即具有大阶数、大宗量的 Bessel 函数), 展开式 (2.5.59b) 或者 (2.5.59c) 也不成立. 事实上, 在 $x \approx \nu$ 附近, Bessel 函数不是震荡函数, 只有当 $x >> \nu$, Bessel 函数才有震荡特性, 为了理解这点, 图 2.5.5 画出了 $\nu = 50$,$x = 50$ 附近 $J_{50}(x)$ 的曲线, 从图可见只有当 $x > 60$ 时, $J_{50}(x)$ 才开始震荡, 而在 $x < 40$ 区域, 函数值近似为零. 事实上, 当 $x \approx \nu \to \infty$ 时, 令 $x = \nu + x'$, 那么 $1 - \nu^2/x^2 \approx 2x'/\nu$, 方程 (2.5.58a) 近似为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x'^2} + \frac{2x'}{\nu} y = 0 \tag{2.5.59d}$$

上式称为 **Airy 方程**, 其解在 $x' < 0$ 区域指数衰减, 而在 $x' > 0$ 区域震荡. 可见, 在 $x \approx \nu$ 附近, Bessel 函数的性态由 Airy 函数 (见 6.4.2 小节讨论) 描述.

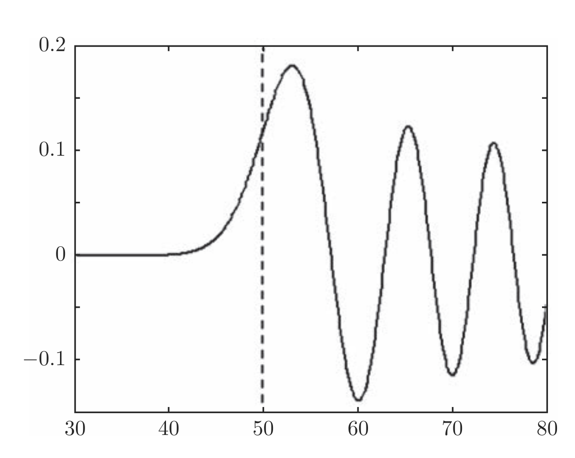



图 2.5.5　$J_{50}(x)$ 在 $x = 50$ 附近的图像, 只有当 $x > 60$ 时才呈现震荡特性

当 $x \to 0$ 时, 对 $\nu$ 阶柱函数有渐近关系

$$\begin{aligned} & J_0(x) \approx 1 - \frac{1}{4}x^2;\ J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu, (\nu \neq -1, -2, \cdots) \\ & N_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2};\ N_\nu(x) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, (\nu \neq 0) \end{aligned} \tag{2.5.60a}$$

以及

$$H_0^{(1)}(x) \approx \mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2};\ H_\nu^{(1)}(x) \approx -\mathrm{i}\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu$$
$$H_0^{(2)}(x) \approx -\mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2};\ H_\nu^{(2)}(x) \approx \mathrm{i}\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu \quad (2.5.60b)$$

由上可见: $N_\nu(x)$ 和 $H_\nu(x)$ 在 $x=0$ 处都有奇性, 但必须注意, $H_0^{(1)}(x)$ 在原点是弱奇性. 取何种形式的柱函数, 由具体的物理问题决定. 例如, 如果 $x=0$ 在区域内, 只能取 $J_\nu(x)$.

注意：$J_0(0)=1$, 而其他 $J_\nu(0)=0, (\nu>0)$, 那么当 $\nu$ 为分数, 即分数阶 Bessel 函数, $\nu=1/p$, 当 $p$ 从 1 增加到 $\infty$ 时, $J_{1/p}(0)$ 如何从 0 变化到 1 的? 图 2.5.6(a) 画出了 $J_1(x)$, $J_{1/3}(x)$, $J_{1/10}(x)$ 和 $J_0(x)$ 四条曲线, 图 2.5.6(b) 为零点附近的变化情况, 从图中可大致看出曲线的变化情况.

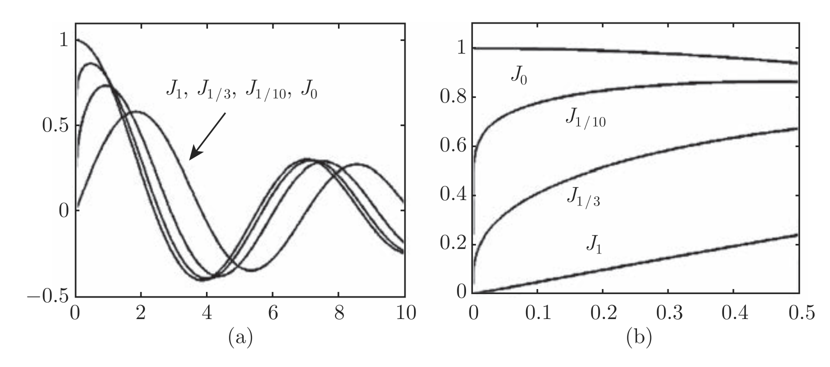



图 2.5.6　(a) 四个分数阶 Bessel 函数; (b) 零点附近的特性, 表明 $J_1(0)=0$ 如何变化到 $J_0(0)=1$

**虚宗量 Bessel 函数**　取式 (2.5.58b) 中 $x\to\mathrm{i}x$, 则

$$J_\nu(\mathrm{i}x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{\mathrm{i}x}{2}\right)^{\nu+2k}=\mathrm{i}^\nu I_\nu(x) \quad (2.5.61a)$$

其中

$$I_\nu(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (2.5.61b)$$

称为**第一类虚宗量 Bessel 函数**. 显然, $I_\nu(x)$ 满足虚宗量 Bessel 方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(x^2+\nu^2)y=0 \quad (2.5.61c)$$

上式的另一个线性独立解定义为 $K_\nu(x)$

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\pi\nu} \quad (2.5.61d)$$

称为**第二类虚宗量 Bessel 函数**, 与第一类 Hankel 函数的关系为

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}x) \tag{2.5.61e}$$

故也称为**虚宗量 Hankel 函数**. 图 2.5.7 和 2.5.8 画出了三个第一和第二类虚宗量 Bessel 函数.

当 $x \to \infty$ 时, 有渐近式

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &\approx \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}}[1 + O(1\ /\ x)] \\ K_\nu(x) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{e}^{-x}[1 + O(1\ /\ x)] \end{aligned} \tag{2.5.62a}$$

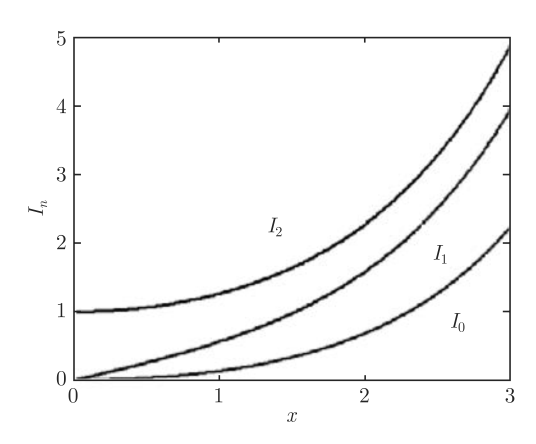



图 2.5.7　第一类虚宗量 Bessel 函数

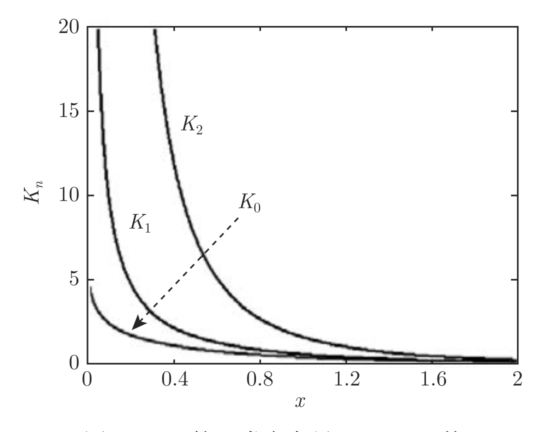



图 2.5.8　第二类虚宗量 Bessel 函数

当 $x \to 0$ 时, 近似为

$$
\begin{aligned}
&I_0(x) \cong 1 + \frac{1}{4}x^2;\ I_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu, (\nu \neq -1, -2, \cdots) \\
&K_0(x) \sim -\ln\frac{x}{2};\ K_\nu(x) \sim \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, (\nu \neq 0)
\end{aligned} \tag{2.5.62b}
$$

可见, ①$I_\nu(x)$ 在无穷远点发散, 当处理的问题涉及无穷远处时, 应去掉 $I_\nu(x)$; ②当考虑的物理问题包含原点时应去掉 $K_\nu(x)$; ③$(I_\nu, K_\nu)$ 就象 $(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x})$, 分别适用于圆柱坐标的径向分量和一维情况.

**球 Bessel 函数**　在球坐标系中分离 Laplace 算子的本征方程时, 得到球 Bessel 方程 (2.5.9b), 它可化为半奇数阶的 Bessel 方程 (2.5.10a). 定义球 Bessel 函数为

$$
j_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{\nu+1/2}(x);\ n_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{\nu+1/2}(x) \tag{2.5.63a}
$$

分别称 $j_\nu$ 和 $n_\nu$ 为第一和第二类**球 Bessel 函数**.

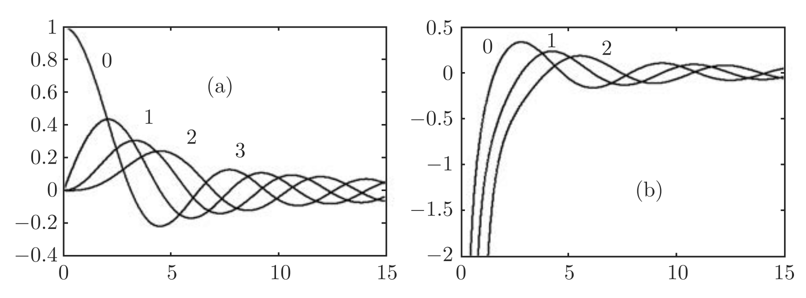



图 2.5.9　(a) 前 4 个球 Bessel 函数: $j_0(x)$(曲线 0)、$j_1(x)$(曲线 1)、$j_2(x)$(曲线 2) 和 $j_3(x)$(曲线 3); (b) 前 3 个球 Neumann 函数: $n_0(x)$(曲线 0)、$n_1(x)$(曲线 1) 和 $n_2(x)$(曲线 2)

有趣的是当 $\nu = l$(正整数) 时, 球 Bessel 函数可用初等函数表示, 即

$$
\begin{aligned}
&j_0(x) = \frac{\sin x}{x};\ j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \\
&j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{2.5.63b}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&n_0(x) = -\frac{\cos x}{x};\ n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \\
&n_2(x) = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{2.5.63c}
$$

图 2.5.9 画出了前几个球 Bessel 函数, 显然, 在 $x=0$ 点, $j_0(0)=1$ 和 $j_\nu(0)=0,(\nu>0))$, 而 $n_\nu(0)\to\infty$ 发散! 近似关系为

$$
\begin{aligned}
j_\nu(x) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\Gamma(\nu+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu,\ (x\to 0)\\
n_\nu(x) &\approx -\sqrt{\frac{\pi}{4}}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1},\ (x\to 0)
\end{aligned}
\tag{2.5.64a}
$$

当 $x\to\infty$ 时, 渐近关系为

$$
j_\nu(x)\approx\frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}\right);\ n_\nu(x)\approx-\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}\right) \tag{2.5.64b}
$$

**球 Hankel 函数** 定义第一、二类球 Hankel 函数 $h_\nu^{(1)}(x)$ 和 $h_\nu^{(2)}(x)$

$$
\begin{aligned}
h_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{\nu+1/2}^{(1)}(x)=j_\nu(x)+\mathrm{i}n_\nu(x)\\
h_\nu^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{\nu+1/2}^{(2)}(x)=j_\nu(x)-\mathrm{i}n_\nu(x)
\end{aligned}
\tag{2.5.65a}
$$

当 $\nu=l$(正整数) 时, 球 Hankel 函数 $h_l^{(1)}(x)$ 和 $h_l^{(2)}(x)$ 的初等函数表示为

$$
\begin{aligned}
h_0^{(1)}(x) &= -\frac{\mathrm{i}}{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x};\ h_1^{(1)}(x)=\left(-\frac{1}{x}-\frac{\mathrm{i}}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\\
h_2^{(1)}(x) &= \left(\frac{\mathrm{i}}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{3\mathrm{i}}{x^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\\
h_0^{(2)}(x) &= \frac{\mathrm{i}}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x};\ h_1^{(2)}(x)=\left(-\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{i}}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\\
h_2^{(2)}(x) &= \left(-\frac{\mathrm{i}}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{3\mathrm{i}}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}
\end{aligned}
\tag{2.5.65b}
$$

当 $x\to\infty$ 时, 渐近关系为

$$
\begin{aligned}
h_\nu^{(1)}(x) &\approx -\frac{\mathrm{i}}{x}\exp\left[\mathrm{i}\left(x-\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]\\
h_\nu^{(2)}(x) &\approx \frac{\mathrm{i}}{x}\exp\left[-\mathrm{i}\left(x-\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.5.65c}
$$

注意: ①与柱函数的渐近展开讨论类似, 上式成立的条件是 $x>>\nu$(低阶球 Bessel 函数), 对大宗量、高阶数的球 Bessel 函数, 渐近展开较为复杂; ②零阶球 Hankel 函数 $h_0^{(1)}(x)$ 和 $h_0^{(2)}(x)$(或者 1/2 阶 Hankel 函数 $H_{1/2}^{(1)}(x)$ 和 $H_{1/2}^{(2)}(x)$) 与变量有简单的初等函数关系.

## 2.6 无穷区域的分离变量法

当物理问题涉及到无穷或半无穷区域时, 边界条件已不存在, 这时算子 $\boldsymbol{L}$ 的本征谱一般是连续的. 因此, 通解应对本征谱求积分

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(t,\lambda)\psi_\lambda(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\lambda \tag{2.6.1a}$$

问题是本征函数 $\psi_\lambda(\boldsymbol{r})$ 如何归一化? 显然, 不能指望 $\psi_\lambda(\boldsymbol{r})$ 平方可积, 即

$$\int_\infty \rho(\boldsymbol{r})|\psi_\lambda(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=1 \tag{2.6.1b}$$

不再成立, 因为区域遍及整个空间, 积分可能发散. 另一种情况是, 仅仅在某个方向是无限区域, 因而本征谱是连续谱和离散谱的混合, 例如 2.2.1 小节的例 2.2.2. 下面通过具体例子来说明如何运用积分变换解这类定解问题.

### 2.6.1 无限大区域: 波动方程的 Cauchy 问题

首先考虑一维波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{gathered}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0\\ u|_{t=0}=\phi(x);\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ x\in(-\infty,\infty)\end{gathered} \tag{2.6.2a}$$

设分离变量解为 $u(x,t)=X(x)U(t)$, 代入上式方程得到

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2\psi=0,\ x\in(-\infty,\infty)\\ \frac{\mathrm{d}^2U(t)}{\mathrm{d}t^2}+c^2\lambda^2U(t)=0,\ t>0\end{gathered} \tag{2.6.2b}$$

对第一个方程, 唯一的要求是 $X(x)$ 在 $x\to\pm\infty$ 处有界, 故分离变量常数 (也就是本征值) 应大于零 $\lambda^2>0$. 于是, 得到第一个方程的解

$$X_\lambda(x)=A_\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \tag{2.6.2c}$$

其中本征值 $\lambda$ 构成连续谱, 是任意的实数, 即 $\lambda\in(-\infty,\infty)$. 显然, $X_\lambda$ 在无限空间不是平方可积的, 不可能要求正交归一到 $\delta_{\lambda\lambda'}$ 函数. 事实上

$$\int_{-\infty}^{\infty}X_\lambda^*X_{\lambda'}\mathrm{d}x=A_\lambda^*A_{\lambda'}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda'-\lambda)x}\mathrm{d}x=2\pi A_\lambda^*A_{\lambda'}\delta(\lambda'-\lambda) \tag{2.6.2d}$$

其中 $\delta(\lambda'-\lambda)$ 为 Dirac Delta 函数 (见 3.1 节讨论). 于是, 如果取 $A_\lambda=1/\sqrt{2\pi}$, 则本征函数 $\psi_\lambda$ 归一化到 Dirac Delta 函数.

对式 (2.6.2b) 中第二个方程, 必须附以初始条件, 但 $u(x,t)=X_\lambda(x)T_\lambda(t)$ 是不可能满足初始条件的, 唯一的可能是把所有本征值 $\lambda$ 的解叠加起来

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\lambda,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda \tag{2.6.3a}$$

上式恰好是函数 $u(x,t)$ 的 Fourier 积分展开, 存在逆变换

$$U(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \tag{2.6.3b}$$

函数 $U(\lambda,t)$ 称为 $u(x,t)$ 的 Fourier 积分. 这是我们熟知的, 任一属于 $L^2(-\infty,\infty)$ 的 $f(x)$, 它的 Fourier 积分存在. 可见 Fourier 积分的核函数是简单的微分算子 $\boldsymbol{L}=-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ 在无限大空间上的本征函数.

把式 (2.6.3a) 代入方程 (2.6.2a) 中第一式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2U(\lambda,t)}{\mathrm{d}t^2}+c^2\lambda^2U(\lambda,t)=0,\ t>0 \tag{2.6.4a}$$

而由式 (2.6.3b), $U(\lambda,t)$ 满足初始条件

$$\begin{aligned}U(\lambda,t)|_{t=0}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\equiv\varPhi(\lambda)\\ \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\equiv\varPsi(\lambda)\end{aligned} \tag{2.6.4b}$$

其中 $\varPhi(\lambda)$ 和 $\varPsi(\lambda)$ 分别为 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的 Fourier 积分. 结合方程 (2.6.4a) 和 (2.6.4b) 得

$$U(\lambda,t)=\frac{1}{2}\left[\varPhi(\lambda)-\frac{1}{\mathrm{i}\lambda c}\varPsi(\lambda)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda ct}+\frac{1}{2}\left[\varPhi(\lambda)+\frac{1}{\mathrm{i}\lambda c}\varPsi(\lambda)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda ct} \tag{2.6.4c}$$

代入式 (2.6.3a)

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-ct)}\varPhi(\lambda)\mathrm{d}\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x+ct)}\varPhi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]\\&+\frac{1}{2c\sqrt{2\pi}}\left[-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-ct)}\frac{\varPsi(\lambda)}{\mathrm{i}\lambda}\mathrm{d}\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x+ct)}\frac{\varPsi(\lambda)}{\mathrm{i}\lambda}\mathrm{d}\lambda\right]\end{aligned} \tag{2.6.4d}$$

利用

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varPsi(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\\ \int_x\psi(s)\mathrm{d}s&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varPsi(\lambda)}{\mathrm{i}\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\end{aligned} \tag{2.6.5a}$$

不难推出

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\mathrm{d}s \tag{2.6.5b}$$

上式是熟知的 d′ Alembert 解.

对三维波动方程的 Cauchy 问题 (设 $G$ 为三维无限大空间)

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}-c^2\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)=0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\ u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\phi(\boldsymbol{r});\ u_t|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\end{gathered} \tag{2.6.6a}$$

也可用同样的方法处理. 本征函数为

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{2.6.6b}$$

令

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int U(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{2.6.6c}$$

$$U(\boldsymbol{k},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int u(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{2.6.6d}$$

代入波动方程, 得 $U(\boldsymbol{k},t)$ 的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 U(k,t)}{\mathrm{d}t^2}+k^2c^2U(k,t)=0 \tag{2.6.7a}$$

其中 $k=|\boldsymbol{k}|$. 由初始条件, 得 $U(k,t)$ 的初值

$$U|_{t=0}=\varPhi(\boldsymbol{k});\ U_t|_{t=0}=\varPsi(\boldsymbol{k}) \tag{2.6.7b}$$

其中 $\varPhi(\boldsymbol{k})$ 和 $\varPsi(\boldsymbol{k})$ 分别为 $\phi(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的三维 Fourier 积分. 于是, 容易从式 (2.6.7a) 和 (2.6.7b) 得

$$U(\boldsymbol{k},t)=\varPhi(\boldsymbol{k})\cos kct+\varPsi(\boldsymbol{k})\frac{\sin kct}{kc} \tag{2.6.7c}$$

代入式 (2.6.6c)

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{8\pi^3}\int\int\left[\phi(\boldsymbol{r}')\cos kt+\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\sin kct}{kc}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\\ &=\frac{1}{8\pi^3}\frac{\partial}{\partial t}\int\phi(\boldsymbol{r}')I(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'+\frac{1}{8\pi^3}\int\psi(\boldsymbol{r}')I(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\end{aligned} \tag{2.6.7d}$$

其中积分为

$$I(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\equiv\int\frac{\sin kct}{kc}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{2.6.7e}$$

由于在对 $\boldsymbol{k}$ 的积分过程中 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 是常量, 可取 $\boldsymbol{k}$ 与 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 的夹角为 $\vartheta_k$, 即, $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\vartheta_k$, 于是角度部分可简单积出

$$\begin{aligned}I(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta_k\int_0^{\infty}\frac{\sin kct}{kc}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\vartheta_k}k^2\sin\vartheta_k\mathrm{d}k\\&=\frac{4\pi}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^{\infty}\sin kct\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\mathrm{d}k\end{aligned}\tag{2.6.8a}$$

利用积分关系以及 Dirac Delta 的偶函数性质

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k;\ \ \delta(x)=\delta(-x)\tag{2.6.8b}$$

不难推出

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\sin kct\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\mathrm{d}k&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sin kct\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\mathrm{d}k\\&=-\frac{\pi}{2}[\delta(ct+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)-\delta(ct-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)]\end{aligned}\tag{2.6.8c}$$

由于 $ct+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|>0$, 第一个 $\delta$ 函数为零, 于是可得到

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial}{\partial t}\int\phi(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'+\int\psi(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\tag{2.6.9a}$$

其中

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\equiv\frac{1}{4\pi c}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-ct)\tag{2.6.9b}$$

称为初值问题式 (2.6.6a) 的 Green 函数 (见 3.4.3 小节). 利用 Dirac Delta 函数的积分性质, 不难看出方程 (2.6.9a) 与 Poisson 公式 (1.2.7c) 完全一致.

### 2.6.2 半无限大区域: Laplace 方程的边值问题

考虑二维 Laplace 方程上半平面的第一类边值问题

$$\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}=0,\ x\in(-\infty,\infty),\ y>0\\&u(x,y)|_{y=0}=f(x),\ x\in(-\infty,\infty)\end{aligned}\tag{2.6.10a}$$

要求解在无穷远点趋近零, 即 $\lim\limits_{|x|,y\to\infty}u(x,y)\to0$. 把上式写成 $u_{yy}-\boldsymbol{L}u=0$ 的形式, 则 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数 $\psi_\lambda$ 同样为式 (2.6.2c). 因此, 可把 $u$ 在 $x$ 方向展成 Fourier 积分

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(y,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\tag{2.6.10b}$$

$$U(y,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\tag{2.6.10c}$$

代入方程 (2.610a) 的第一式得

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}y^2}-\lambda^2U=0,\ 0<y<\infty \tag{2.6.10d}$$

由式 (2.6.10c) 得 $y$ 方向的边界条件

$$U(y,\lambda)|_{y=0}=F(\lambda) \tag{2.6.10e}$$

其中 $F(\lambda)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 积分. 由方程 (2.6.10d) 和 (2.6.10e), 且注意到 $\lim\limits_{y\to\infty}U=0$, 即可得 $U(y,\lambda)=F(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}$. 于是

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x-|\lambda|y}F(\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-t)\lambda-|\lambda|y}f(t)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.6.11a}$$

对 $\lambda$ 可积出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-t)-|\lambda|y}\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\lambda[\mathrm{i}(x-t)+y]}\mathrm{d}\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda[\mathrm{i}(x-t)-y]}\mathrm{d}\lambda=\frac{2y}{(x-t)^2+y^2}$$

于是有

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t \tag{2.6.11b}$$

上式与方程 (1.3.11b) 完全一致. 利用上述结果, 可求得第二类边值问题 $u_y|_{y=0}=g(x)$ 的解. 只要令 $v(x,y)=\partial u(x,y)/\partial y$, 显然

$$\begin{gathered}\nabla^2v(x,y)=\nabla^2u_y=\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2u)=0\\v(x,y)|_{y=0}=u_y(x,0)=g(x)\end{gathered} \tag{2.6.12a}$$

于是

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int^{y}v(x,s)\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi}\int^{y}\frac{sg(t)}{(x-t)^2+s^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int^{y}\frac{s\mathrm{d}s}{(s-t)^2+s^2}\right]g(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln[(x-t)^2+y^2]g(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.6.12b}$$

考虑二维 Laplace 方程在带状区域内的第一类边值问题, 如图 2.6.1

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,\ 0<x<\infty,\ 0<y<a\\u(x,0)=f(x);\ u(x,a)=g(x),\ 0<x<\infty\\u(0,y)=0,\ 0<y<a\end{gathered} \tag{2.6.13a}$$

并且当 $x \to \infty$, $u(x,y)$ 关于 $y$ 一致地趋向于零. 本征方程

$$-\frac{\mathrm{d}^2\psi_\lambda(x)}{\mathrm{d}x^2} = \lambda^2\psi_\lambda(x)$$
$$\psi_\lambda(x)|_{x=0} = 0 \tag{2.6.13b}$$

的解为

$$\psi_\lambda(x) = A_\lambda \cos\lambda x + B_\lambda \sin\lambda x \tag{2.6.13c}$$

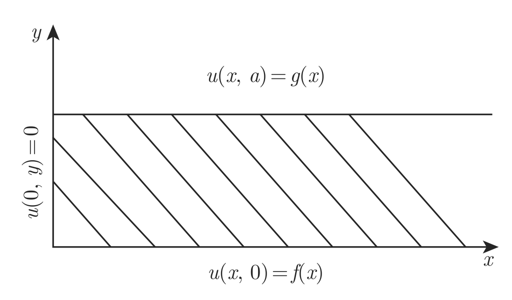



图 2.6.1　带状区域的第一变值问题

如果 $\lambda^2 \leqslant 0$, 则

$$\psi_\lambda = A_\lambda \mathrm{e}^{|\lambda|x} + B_\lambda \mathrm{e}^{-|\lambda|x},\ \psi_0 = A_0 x + B_0 \tag{2.6.13d}$$

因 $x \to \infty$ 时,$\psi_\lambda$ 有限, 故 $A_\lambda \equiv 0$ 和 $A_0 \equiv 0$; 又 $\psi_\lambda|_{x=0} = 0$, 故 $B_\lambda \equiv 0$ 和 $B_0 \equiv 0$, 因此 $\lambda^2 > 0$. 由 $x = 0$ 处边界条件 $\psi_\lambda|_{x=0} = 0$,$A_\lambda \equiv 0$, 故本征函数为

$$\psi_\lambda(x) = B_\lambda \sin\lambda x,\ 0 < x < \infty \tag{2.6.14a}$$

本征谱 $\lambda : 0 < \lambda < \infty$. 考察 $\psi_\lambda(x)$ 的归一化, 作积分

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \psi_\lambda(x)\psi_{\lambda'}\mathrm{d}x &= B_\lambda B_{\lambda'}\int_0^\infty \sin\lambda' x \sin\lambda x \mathrm{d}x \\ &= -\frac{B_{\lambda'}B_\lambda}{4}\left[\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda'+\lambda)x}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda'-\lambda)x}\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{B_{\lambda'}B_\lambda}{4}2\pi[\delta(\lambda'-\lambda) - \delta(\lambda'+\lambda)]\end{aligned} \tag{2.6.14b}$$

因 $\lambda > 0,\ \lambda' > 0,\ \lambda + \lambda' \neq 0$, 故

$$\int_0^\infty \psi_\lambda(x)\psi_{\lambda'}(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}B_\lambda B_{\lambda'}\delta(\lambda'-\lambda) \tag{2.6.14c}$$

取 $B_\lambda = \sqrt{2/\pi}$, 则 $\psi_\lambda$ 归一化到 $\delta$ 函数, 于是归一化的本征函数为

$$\psi_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\lambda x,\ 0 < x < \infty,\ 0 < \lambda < \infty \tag{2.6.14d}$$

令方程 (2.6.13a) 的解

$$u(x,y)=\int_0^\infty U(\lambda,y)\psi_\lambda(x)\mathrm{d}\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(\lambda,y)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda \tag{2.6.15a}$$

上式两边乘 $\psi_{\lambda'}(x)$ 并对 $x$ 积分

$$\int_0^\infty u(x,y)\psi_{\lambda'}(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty U(\lambda,y)\left[\int_0^\infty \psi_{\lambda'}(x)\psi_\lambda(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\lambda \tag{2.6.15b}$$

利用式 (2.6.14c) 即得

$$U(\lambda,y)=\int_0^\infty u(x,y)\psi_\lambda(x)\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,y)\sin\lambda x\mathrm{d}x \tag{2.6.15c}$$

函数 $U(\lambda,y)$ 称为 $u(x,y)$ 的**正弦 Fourier 积分**, 其逆变换即为式 (2.6.15a).

把式 (2.6.15a) 代入式 (2.6.13a) 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2U(\lambda,y)}{\mathrm{d}y^2}-\lambda^2U(\lambda,y)=0 \tag{2.6.16a}$$

再由式 (2.6.13a) 的边值条件得到

$$u(\lambda,y)|_{y=0}=F(\lambda);\ U(\lambda,y)|_{y=a}=G(\lambda) \tag{2.6.16b}$$

其中 $F(\lambda)$ 和 $G(\lambda)$ 分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的正弦 Fourier 积分. 于是, 由式 (2.6.16a) 和 (2.6.16b) 可得 $U(\lambda,y)$. 考虑简单情况：$g(x)=0$, 即 $G(\lambda)=0$, 于是

$$U(\lambda,y)=F(\lambda)\frac{\sinh[\lambda(a-y)]}{\sinh(a\lambda)} \tag{2.6.16c}$$

因此, 所求解为

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\left[\int_0^\infty \sin(\lambda t)\frac{\sinh[\lambda(a-y)]}{\sinh(a\lambda)}\sin(\lambda x)\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}t \tag{2.6.16d}$$

当 $a\to\infty$ 时, 式 (2.6.13a) 变成第一象限内第一类边值问题

$$\begin{gathered}u_{xx}+u_{yy}=0,\ x>0,\ y>0\\ u(x,y)|_{x=0}=0,\ y>0;\ u(x,y)|_{y=0}=f(x),\ x>0\\ \lim_{x\to\infty}\ u(x,y)\to 0\end{gathered} \tag{2.6.17a}$$

式 (2.6.16c) 中取 $a\to\infty$, $\sinh[\lambda(a-y)]/\sinh(a\lambda)\approx \mathrm{e}^{-\lambda y}$, 于是

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\left[\int_0^\infty \sin\lambda t\sin\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}t\\ &=\frac{y}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{y^2+(x-t)^2}-\frac{1}{y^2+(x+t)^2}\right]f(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.6.17b}$$

如果 $x=0$ 处是第二类边界条件 $u_x(0,y)=0$, 那么应取式 (2.6.13c) 中 $B_\lambda\equiv 0$, 通过类似的推导可以得到

$$\psi_\lambda(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\lambda x,\ 0<x<\infty,\ 0<\lambda<\infty \tag{2.6.18a}$$

以及变换对

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(\lambda,y)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda \\ U(\lambda,y)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,y)\cos\lambda x\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.6.18b}$$

函数 $U(\lambda,y)$ 称为 $u(x,y)$ 的**余弦 Fourier 积分**.

如果 $x=0$ 处是第三类边界条件, 考虑本征值问题

$$\begin{gathered} -\frac{\mathrm{d}^2\psi_\lambda(x)}{\mathrm{d}x^2}=\lambda^2\psi_\lambda(x),\ x\in(0,\infty) \\ \left(\alpha\psi_\lambda-\beta\frac{\mathrm{d}\psi_\lambda}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}=0 \end{gathered} \tag{2.6.19a}$$

如果 $\lambda^2>0$, 则解由式 (2.6.13c) 表示, 代入边界条件得到 $\alpha A_\lambda=\beta\lambda B_\lambda$, 于是本征函数为

$$\psi_\lambda(x)=B'_\lambda(\alpha\sin\lambda x+\beta\lambda\cos\lambda x) \tag{2.6.19b}$$

其中 $B'_\lambda\equiv\alpha B_\lambda$. $\psi_\lambda(x)$ 的归一化积分为

$$\int_0^\infty\psi_\lambda(x)\psi_{\lambda'}(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}B'{}_\lambda B'{}_{\lambda'}(\alpha^2+\beta^2\lambda\lambda')\delta(\lambda-\lambda') \tag{2.6.19c}$$

其中已利用 $\lambda+\lambda'>0$. 因此, 归一化到 $\delta$ 函数的本征函数为

$$\psi_\lambda(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi(\alpha^2+\beta^2\lambda^2)}}(\alpha\sin\lambda x+\beta\lambda\cos\lambda x) \tag{2.6.19d}$$

如果 $\lambda^2<0$, 则解由式 (2.6.13d) 表示, 即

$$\psi_\lambda=A_\lambda\mathrm{e}^{|\lambda|x}+B_\lambda\mathrm{e}^{-|\lambda|x},\ \psi_0=A_0x+B_0 \tag{2.6.20a}$$

因 $x\to\infty$ 时, $\psi_\lambda$ 有限, 故 $A_\lambda\equiv 0$ 和 $A_0\equiv 0$; 由方程 (2.6.19a) 中的第三类边界条件得到 $B_0\equiv 0$ 以及

$$(\alpha+\beta|\lambda|)B_\lambda=0 \tag{2.6.20b}$$

注意：与第一、二类边界条件的区别！如果 $\alpha$ 和 $\beta$ 同号, 则 $B_\lambda\equiv 0$; 反之, $B_\lambda$ 不一定恒为零, 只要 $|\lambda|=-\alpha/\beta$(这也就是为什么正则 S-L 本征值问题中要求 $\alpha$ 和

$\beta$ 同号的原因, 见 2.3.1 小节), 方程 (2.6.20b) 也满足! 因此, 在 $\alpha$ 和 $\beta$ 异号情况下, 存在一个独立 (仅仅一个) 的模式 $\psi_d(x) = B_d\mathrm{e}^{-|\alpha/\beta|x}$, $B_d$ 由归一化条件得到 $B_d = \sqrt{2|\alpha/\beta|}$. 此时, 由式 (2.6.19d) 的 $\psi_\lambda(x)$ 加上这个独立模式才构成完备系, 即 $\{\psi_\lambda(x), \psi_d(x)\}$. 因此, 封闭关系 (见 3.1.2 小节讨论) 为

$$\delta(x, x') = \psi_d(x')\psi_d(x) + \int_0^\infty \psi_\lambda(x')\psi_\lambda(x')\mathrm{d}\lambda \tag{2.6.21a}$$

证明：设 $\delta(x, x')$ 用完备系 $\{\psi_\lambda(x), \psi_d(x)\}$ 展开为

$$\delta(x, x') = c_d\psi_d(x) + \int_0^\infty c_\lambda\psi_\lambda(x)\mathrm{d}\lambda \tag{2.6.21b}$$

上式二边乘 $\psi_{\lambda'}(x)$ 并且对 $x$ 积分 (利用式 (2.6.19c))

$$\psi_{\lambda'}(x') = c_d\int_0^\infty \psi_{\lambda'}(x)\psi_d(x)\mathrm{d}x + c_{\lambda'} \tag{2.6.21c}$$

不难证明 $\psi_\lambda(x)$ 与 $\psi_d(x)$ 也正交, 即

$$\int_0^\infty \psi_{\lambda'}(x)\psi_d(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{2.6.21d}$$

故得到 $c_{\lambda'} = \psi_{\lambda'}(x')$；同样, 方程 (2.6.21b) 二边乘 $\psi_d(x)$ 并且对 $x$ 积分 (利用式 (2.6.21d)) 得到 $c_d = \psi_d(x')$. 于是封闭关系式 (2.6.21a) 得证明.

以上讨论对定义在半无限大区域的一维热扩散方程或者波动方程也成立. 例如考虑定解问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < \infty,\ t > 0\\ u(x,t)|_{t=0} = \psi(x),\ 0 < x < \infty\\ (\alpha u - \beta u_x)|_{x=0} = 0,\ t > 0\end{gathered} \tag{2.6.22a}$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 同号. 取解的形式为

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \int_0^\infty U(\lambda,t)\psi_\lambda(x)\mathrm{d}\lambda\\ U(\lambda,t) &= \int_0^\infty u(x,t)\psi_\lambda(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.6.22b}$$

其中本征函数 $\psi_\lambda(x)$ 由方程 (2.6.19d) 给出. 把上式代入式 (2.6.22a) 得到

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}U(\lambda,t)}{\mathrm{d}t} + \lambda^2 U(\lambda,t) = 0,\ t > 0\\ U(\lambda,t) = F(\lambda),\ t > 0\end{gathered} \tag{2.6.22c}$$

其中 $F(\lambda)$ 是 $\psi(x)$ 的广义 Fourier 变换, 积分核为 $\psi_\lambda(x)$. 方程 (2.6.22c) 的解为

$$U(\lambda,t)=F(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda^2 t} \tag{2.6.22d}$$

代入方程 (2.6.22b) 得到

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^\infty \psi(x')g(x,x',t)\mathrm{d}x'\\ g(x,x',t)&\equiv\int_0^\infty \psi_\lambda(x')\mathrm{e}^{-\lambda^2 t}\psi_\lambda(x)\mathrm{d}\lambda\end{aligned} \tag{2.6.22e}$$

设 $\beta=0$, 由式

$$\begin{aligned}g(x,x',t)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\lambda x'\sin\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda^2 t}\mathrm{d}\lambda=\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[\cos\lambda(x-x')-\cos\lambda(x+x')]\mathrm{e}^{-\lambda^2 t}\mathrm{d}\lambda\\ &=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4t}\right]-\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4t}\right]\end{aligned} \tag{2.6.22f}$$

上式的结果与式 (1.4.12d) 完全一致.

由以上讨论可以看出, 对半无限大问题, 关键是要在边界 $x$=0 处满足齐次边界条件.

### 2.6.3　径向无限区域、Hankel 变换和平面波导

首先介绍较简单的问题, 即平面极坐标中二维波动方程的 Cauchy 问题, 求与方位角无关的轴对称解 $u=u(r,t)$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}u=0,\ \rho\in(0,\infty)\ t>0\\ &u|_{t=0}=f_1(\rho);\ u_t|_{t=0}=f_2(\rho),\ \rho\in(0,\infty)\end{aligned} \tag{2.6.23a}$$

算子 $\boldsymbol{L}$ 为

$$\boldsymbol{L}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) \tag{2.6.23b}$$

相应的本征方程 $\boldsymbol{L}\psi_\lambda=\lambda^2\psi_\lambda$ 写成 S-L 型形式为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}\psi_\lambda}{\mathrm{d}\rho}\right)=\lambda^2\rho\psi_\lambda(r) \tag{2.6.23c}$$

当 $\lambda^2<0$ 时, 解为虚宗量 Bessel 函数, 因 $I_0(\lambda\rho)\to\infty\ (\lambda\rho\to\infty)$, 而 $K_0(\lambda\rho)\to\infty\ \ (\lambda\rho\to 0)$, 故 $\lambda^2<0$ 应排除; 当 $\lambda=0$ 时, 上式有解 $\psi_0(\rho)=c_1\ln\rho+c_2$, 而

$\rho \to 0$ 时 $\ln \rho \to \infty$, 故应有 $c_1 \equiv 0$. 因此, 只有 $\lambda^2 \geqslant 0$, 这时方程 (2.6.23c) 为零阶 Bessel 方程, 故求得本征函数

$$\psi_\lambda(\rho) = A_\lambda J_0(\lambda\rho) \tag{2.6.23d}$$

权函数为 $w(\rho) = \rho$. 考察归一化积分

$$\int_0^\infty \psi_\lambda(\rho)\psi_{\lambda'}(\rho)w(\rho)\mathrm{d}\rho = A_\lambda A_{\lambda'}\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)J_0(\lambda'\rho)\rho\mathrm{d}\rho \tag{2.6.23e}$$

利用积分关系

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)J_0(\lambda'\rho)\rho\mathrm{d}\rho = \frac{\delta(\lambda-\lambda')}{\lambda} \tag{2.6.23f}$$

我们不严规证明上式 (把直角坐标系中二维 Fourier 积分的正交性关系转换到极坐标就可以证明该积分关系), 仅给出近似的估计, 注意到当 $\lambda$ 和 $\lambda'$ 较大时

$$J_0(\lambda\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\rho r}}\cos(\lambda\rho);\ \ J_0(\lambda'\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda'\rho}}\cos(\lambda'\rho) \tag{2.6.23g}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)J_0(\lambda'\rho)\rho\mathrm{d}\rho &\approx \frac{2}{\pi\lambda}\int_0^\infty \cos(\lambda\rho)\cos(\lambda'\rho)\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{2}{\pi\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\delta(\lambda-\lambda')\end{aligned} \tag{2.6.23h}$$

因此取 $A_\lambda = \sqrt{\lambda}$. 令方程 (2.6.23a) 的解为

$$u(\rho,t) = \int_0^\infty U(\lambda,t)\psi_\lambda(\rho)\mathrm{d}\lambda \tag{2.6.24a}$$

为了求逆变换, 上式两边乘 $\rho\psi_{\lambda'}(\rho)$ 并积分

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u(\rho,t)\psi_{\lambda'}(\rho)\rho\mathrm{d}\rho &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \psi_\lambda(\rho)\psi_{\lambda'}(\rho)\rho\mathrm{d}\rho\right]U(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^\infty \delta(\lambda-\lambda')U(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda = U(\lambda',t)\end{aligned}$$

于是

$$U(\lambda,t) = \int_0^\infty u(\rho,t)\psi_\lambda(\rho)\rho\mathrm{d}\rho = \sqrt{\lambda}\int_0^\infty u(\rho,t)J_0(\lambda\rho)\rho\mathrm{d}\rho \tag{2.6.24b}$$

把式 (2.6.24a) 和 (2.6.24b) 写成对称形式, 令 $\tilde{U}(\lambda,t) = U(\lambda,t)/\sqrt{\lambda}$, 代入方程 (2.6.24a)

$$\begin{aligned}u(\rho,t) &= \int_0^\infty \psi_\lambda(\rho)U(\lambda,t)d\lambda = \int_0^\infty \sqrt{\lambda}J_0(\lambda\rho)U(\lambda,t)d\lambda \\ &= \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\tilde{U}(\lambda,t)\lambda d\lambda\end{aligned} \tag{2.6.24c}$$

于是, 方程 (2.6.24a) 和 (2.6.24b) 可改写成对称的变换对

$$\begin{aligned} u(\rho,t) &= \int_0^\infty U(\lambda,t)J_0(\lambda\rho)\lambda\mathrm{d}\lambda \\ U(\lambda,t) &= \int_0^\infty u(\rho,t)J_0(\lambda\rho)\rho\mathrm{d}\rho \end{aligned} \tag{2.6.24d}$$

称为零级 Hankel 变换 (在 5.4.4 小节中, 可以从 Fourier 变换推出 Hankel 变换).

把上二式代入方程 (2.6.23a) 得 $U$ 满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2U(\lambda,t)}{\mathrm{d}t^2}+\lambda^2U(\lambda,t)=0 \tag{2.6.25a}$$

由方程 (2.6.23a) 的第二式得 $U(\lambda,t)$ 的初值

$$\begin{aligned} U(\lambda,t)|_{t=0} &= \int_0^\infty f_1(\rho)J_0(\lambda\rho)\rho\mathrm{d}\rho\equiv F_1(\lambda) \\ U_t(\lambda,t)|_{t=0} &= \int_0^\infty f_2(\rho)J_0(\lambda\rho)\rho\mathrm{d}\rho\equiv F_2(\lambda) \end{aligned} \tag{2.6.25b}$$

方程 (2.6.25a) 和 (2.6.25b) 的解为

$$U(\lambda,t)=F_1(\lambda)\cos(\lambda t)+F_2(\lambda)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \tag{2.6.25c}$$

于是, 得到方程 (2.6.23a) 的解

$$\begin{aligned} u(\rho,t) &= \int_0^\infty F_1(\lambda)\cos(\lambda t)\lambda J_0(\lambda\rho)\mathrm{d}\lambda+\int_0^\infty F_2(\lambda)\sin(\lambda t)J_0(\lambda\rho)\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty G(\rho,\rho',t)f_1(\rho')\rho'\mathrm{d}\rho'+\int_0^\infty G(\rho,\rho',t)f_2(\rho')\rho'\mathrm{d}\rho' \end{aligned} \tag{2.6.26a}$$

其中

$$G(\rho,\rho',t)\equiv\int_0^\infty J_0(\lambda\rho')J_0(\lambda\rho)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{2.6.26b}$$

函数 $G(\rho',\rho,t)$ 称为方程 (2.6.23a) 的含时 Green 函数, 见 3.4 节讨论.

注意: 解式 (2.6.26a) 和 (2.6.26b) 可以从式 (1.2.9a) 推得. 事实上, 在初始条件径向分布的条件下, 式 (1.2.9a) 简化为

$$u(\rho,\varphi,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_D\frac{f_1(\rho')\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi'}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}}+\frac{1}{2\pi}\iint_D\frac{f_2(\rho')\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi'}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}} \tag{2.6.27a}$$

其中 $|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|$ 是二点 $(\rho,\varphi)$ 和 $(\rho',\varphi')$ 间的距离

$$|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|=\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')} \tag{2.6.27b}$$

利用积分关系

$$\int_0^\infty J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)\sin\lambda t\mathrm{d}\lambda = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}},\ t<|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'| \\ 0,\ t>|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'| \end{cases} \tag{2.6.27c}$$

式 (2.6.27a) 变成

$$\begin{aligned} u(\rho,\varphi,t) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f_1(\rho')\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi'\int_0^\infty J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)\sin\lambda t\mathrm{d}\lambda \\ &\quad+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f_1(\rho')\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi'\int_0^\infty J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)\sin\lambda t\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \Theta(\rho,\rho',t)f_1(\rho')\rho'\mathrm{d}\rho' + \int_0^\infty \Theta(\rho,\rho',t)f_2(\rho')\rho'\mathrm{d}\rho' \end{aligned} \tag{2.6.27d}$$

其中积分

$$\Theta(\rho,\rho',t)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)\sin\lambda t\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\varphi' \tag{2.6.28a}$$

利用 Bessel 函数的展开关系

$$J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|) = J_0(\lambda\rho)J_0(\lambda\rho') + 2\sum_{k=0}^{\infty} J_k(\lambda\rho)J_k(\lambda\rho')\cos k(\varphi-\varphi') \tag{2.6.28b}$$

完成对角度的积分后

$$\Theta(\rho,\rho',t)\equiv\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)J_0(\lambda\rho')\sin\lambda t\mathrm{d}\lambda \tag{2.6.28c}$$

比较式 (2.6.26b), $\Theta(\rho,\rho',t)=G(\rho,\rho',t)$.

**热扩散方程**　考虑轴对称的热扩散问题

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{L}u = h(\rho,t),\ \rho\in(0,\infty)\ t>0 \\ u|_{t=0} = f(\rho),\ \rho\in(0,\infty) \end{gathered} \tag{2.6.29a}$$

直接令 Hankel 积分形式的解

$$\begin{aligned} u(\rho,t) &= \int_0^\infty U(\lambda,t)J_0(\lambda\rho)\lambda\mathrm{d}\lambda \\ U(\lambda,t) &= \int_0^\infty u(\rho,t)J_0(\lambda\rho)\rho\mathrm{d}\rho \end{aligned} \tag{2.6.29b}$$

代入方程 (2.6.29a) 得到

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}U(\lambda,t)}{\mathrm{d}t}+\lambda^2U(\lambda,t)=H(\lambda,t),\ \lambda\in(0,\infty)\ t>0\\ U(\lambda,t)|_{t=0}=F(\lambda),\ \lambda\in(0,\infty)\end{gathered}\tag{2.6.30a}$$

其中 $H(\lambda,t)$ 和 $F(\lambda)$ 分别是 $h(\rho,t)$ 和 $f(\rho)$ 的 Hankel 变换. 上式的解为

$$U(\lambda,t)=F(\lambda)\exp(-\lambda^2t)+\int_0^t H(\lambda,\tau)\exp[-\lambda^2(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\tag{2.6.30b}$$

代入方程 (2.6.29a) 的第一式得到

$$u(\rho,t)=\int_0^\infty G(\rho,\rho',t)f(\rho')\rho'\mathrm{d}\rho'+\int_0^\infty\int_0^t G(\rho,\rho',t-\tau)h(\rho',\tau)\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\tau\tag{2.6.31a}$$

其中

$$G(\rho,\rho',t)\equiv\int_0^\infty\exp(-\lambda^2t)J_0(\lambda\rho')J_0(\lambda\rho)\lambda\mathrm{d}\lambda\tag{2.6.31b}$$

函数 $G(\rho,\rho',t)$ 是二维轴对称情况下热扩散方程的 Green 函数. 利用积分关系

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha\lambda^2}J_\nu(\beta\lambda)J_\nu(\gamma\lambda)\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2+\gamma^2}{4\alpha}}I_\nu\left(\frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right)\tag{2.6.31c}$$

式 (2.6.31b) 简化为

$$G(\rho,\rho',t)=\frac{1}{2t}\exp\left(-\frac{\rho^2+\rho'^2}{4t}\right)I_0\left(\frac{\rho'\rho}{2t}\right)\tag{2.6.31d}$$

上式也可以从式 (1.4.11f) 和 (1.4.11g) 推来. 事实上, 在轴对称情况下, 式 (1.4.11f) 和 (1.4.11g) 简化成 (取 $n$=2)

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi,t)=&\int_0^\infty f(\rho')\Theta(\rho,\rho',t)\rho'\mathrm{d}\rho'\\ &+\int_0^t\int_0^\infty h(\rho',\tau)\Theta(\rho,\rho',t-\tau)\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{2.6.32a}$$

其中

$$\Theta(\rho,\rho',t)\equiv\frac{1}{4\pi t}\int_0^{2\pi}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}{4t}\right)\mathrm{d}\varphi'\tag{2.6.32b}$$

由式 (2.6.27b)

$$\begin{aligned}\Theta(\rho,\rho',t)&=\frac{1}{4\pi t}\exp\left(-\frac{\rho^2+\rho'^2)}{4t}\right)\int_0^{2\pi}\exp\left[\frac{\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')}{2t}\right]\mathrm{d}\varphi'\\ &=\frac{1}{2t}\exp\left(-\frac{\rho^2+\rho'^2}{4t}\right)I_0\left(\frac{\rho\rho'}{2t}\right)\end{aligned}\tag{2.6.32c}$$

比较式 (2.6.31d), $\Theta(\rho,\rho',t)=G(\rho,\rho',t)$.

**高阶 Hankel 变换**　考虑圆柱坐标系中无限大圆盘的热传导问题, 设区域 $G{:}\rho\in(0,\infty),\varphi\in[0,2\pi],z\in(0,H)$

$$\begin{gathered}u_t-\nabla^2u=0,\ t>0,\ (\rho,\varphi,z)\in G\\ u|_{t=0}=u_0(\rho,\varphi,z);\ u|_{z=0}=u|_{z=H}=0\end{gathered}\tag{2.6.33a}$$

其中 Laplace 算子为

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\tag{2.6.33b}$$

设分离变量解为 $u(\rho,\varphi,z,t)=T(t)R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$, 讨论如下:

(1) 方位角部分仍然是

$$\Phi(\varphi)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\ (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)\tag{2.6.34a}$$

(2) 轴向是齐次边界条件, 故不难得到

$$Z(z)=A\sin\frac{n\pi}{H}z\tag{2.6.34b}$$

(3) 径向部分的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(\lambda^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0\tag{2.6.34c}$$

因为 $\rho=0$ 在区域 $G$ 内, 故取解为 $R(\rho)=AJ_{|m|}(\lambda\rho)$, 径向不存在边界条件, 本征值 $\lambda$ 可取大于零的任意实数;

(4) 时间变化部分的方程为

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}+\left[\lambda^2+\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\right]T(t)=0\tag{2.6.34d}$$

故解为

$$T(t)=T_0e^{-[\lambda^2+(n\pi/H)^2]t}\tag{2.6.34e}$$

为了满足初始条件, 取定解问题式 (2.6.33a) 的通解为

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi,z,t)=&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}A_{mn}(\lambda)e^{-[\lambda^2+(n\pi/H)^2]t}J_{|m|}(\lambda\rho)\lambda\mathrm{d}\lambda\\&\times\sin\frac{n\pi z}{H}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\end{aligned}\tag{2.6.35a}$$

代入方程 (2.6.33a) 的初始条件

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}A_{mn}(\lambda)J_{|m|}(\lambda\rho)\lambda\mathrm{d}\lambda\sin\frac{n\pi z}{H}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=u_0(\rho,\varphi,z) \tag{2.6.35b}$$

对右边作二重 Fourier 级数展开后得到

$$\int_0^{\infty}A_{mn}(\lambda)J_{|m|}(\lambda\rho)\lambda\mathrm{d}\lambda=u_{nm}(\rho) \tag{2.6.35c}$$

其中

$$u_{nm}(\rho)\equiv\frac{1}{\pi H}\int_0^{2\pi}\int_0^{H}u_0(\rho,\varphi,z)\sin\frac{n\pi z}{H}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \tag{2.6.35d}$$

问题是能否从方程 (2.6.35c) 求出系数 $A_{mn}(\lambda)$? 为此, 方程 (2.6.35c) 二边乘以 $\rho J_{|m|}(\lambda'\rho)$ 并积分

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}A_{mn}(\lambda)\left[\int_0^{\infty}J_{|m|}(\lambda\rho)J_{|m|}(\lambda'\rho)\rho\mathrm{d}\rho\right]\lambda\mathrm{d}\lambda\\&=\int_0^{\infty}\bar{u}_{nm}(\rho)J_{|m|}(\lambda'\rho)\rho\mathrm{d}\rho\end{aligned} \tag{2.6.36a}$$

与式 (2.6.23h) 类似, 存在积分关系

$$\int_0^{\infty}J_{|m|}(\lambda'\rho)J_{|m|}(\lambda\rho)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\delta(\lambda'-\lambda)}{\lambda} \tag{2.6.36b}$$

因此

$$A_{mn}(\lambda)=\int_0^{\infty}u_{nm}(\rho)J_{|m|}(\lambda\rho)\rho\mathrm{d}\rho \tag{2.6.36c}$$

最后, 由式 (2.6.36c) 和 (2.6.35d) 得到展开系数为.

$$A_{mn}(\lambda)=\frac{1}{\pi H}\int_0^{2\pi}\int_0^{H}\int_0^{\infty}u_0(\rho,\varphi,z)J_{|m|}(\lambda\rho)\rho\mathrm{d}\rho\sin\frac{n\pi z}{H}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi$$

上式代入式 (2.6.35a) 得到

$$u(\rho,\varphi,z,t)=\int_0^{2\pi}\int_0^{H}\int_0^{\infty}u_0(\rho',\varphi',z')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}z'\mathrm{d}\varphi' \tag{2.6.36d}$$

其中

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\equiv&\frac{1}{2\pi H}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2+\rho'^2}{4t}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}I_{|m|}\left(\frac{\rho\rho'}{2t}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\\&\times\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(n\pi/H)^2t}\sin\frac{n\pi z}{H}\sin\frac{n\pi z'}{H}\end{aligned} \tag{2.6.36e}$$

得到上式, 利用了积分关系式 (2.6.31c).

变换式 (2.6.36c) 称为 **$m$阶 Hankel 变换**, 对任意带权 $w(\rho)=\rho$ 平方可积的函数 $f(\rho)$

$$\int_0^{\infty}|f(\rho)|^2\rho\mathrm{d}\rho<\infty \tag{2.6.37a}$$

存在 $m$ 阶 Hankel 变换对 (见 5.4.4 小节讨论)

$$\begin{aligned}F_m(k_\rho)&=\int_0^{\infty}f(\rho)J_{|m|}(k_\rho\rho)\rho\mathrm{d}\rho\\ f(\rho)&=\int_0^{\infty}F_m(k_\rho)J_{|m|}(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho\end{aligned} \tag{2.6.37b}$$

对径向无限的其他定解问题, 可采用类似的办法, 例如考虑 $G$ 上的非齐次 Helmholtz 方程的边值问题

$$\begin{gathered}-(\nabla^2+k_0^2)u=f(\rho,\varphi,z),\ (\rho,\varphi,z)\in G\\ u|_{z=0}=u|_{z=H}=0,\rho\in(0,\infty),\varphi\in[0,2\pi]\end{gathered} \tag{2.6.38a}$$

其中 $k_0$ 是常数, 在研究平面波导中波的激发时, 经常遇到该定解问题. 设解为

$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}A_m(k_\rho,z)J_{|m|}(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.6.38b}$$

代入方程 (2.6.38a) 得

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2A_m(k_\rho,z)}{\mathrm{d}z^2}+(k_0^2-k_\rho^2)A_m(k_\rho,z)=-f_m(k_\rho,z)\\ A_m(k_\rho,z)|_{z=0}=0;\ A_m(k_\rho,z)|_{z=H}=0\end{gathered} \tag{2.6.39a}$$

其中 $f_m(k_\rho,z)$ 是 $f(\rho,\varphi,z)$ 关于变量 $\rho$ 作 $m$ 阶 Hankel 变换、变量 $\varphi$ 作 Fourier 级数展开的系数

$$f_m(k_\rho,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}f(\rho,\varphi,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}J_{|m|}(k_\rho\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \tag{2.6.39b}$$

容易得到方程 (2.6.39a) 的解为

$$A_m(k_\rho,z)=\int_0^{H}f_m(k_\rho,z')g(k_\rho,z,z')\mathrm{d}z' \tag{2.6.39c}$$

其中

$$g(k_\rho,z,z')\equiv\frac{2}{H}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_\rho^2-[k_0^2-(n\pi/H)^2]}\sin\frac{n\pi}{H}z\sin\frac{n\pi}{H}z' \tag{2.6.39d}$$

把式 (2.6.39c) 代入式 (2.6.38b) 得到

$$u(\rho,\varphi,z)=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^H f(\rho',\varphi',z')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}z' \tag{2.6.39e}$$

其中

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\equiv\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\int_0^\infty J_{|m|}(k_\rho\rho)J_{|m|}(k_\rho\rho')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}g(k_\rho,z,z')k_\rho\mathrm{d}k_\rho\right] \tag{2.6.39f}$$

**关于式 (2.6.38b) 中积分的讨论** 考虑简单情况 $f(\rho,\varphi,z)=f(\rho,z)$, 于是 $m=0$. 式 (2.6.39e) 简化成

$$u(\rho,z)=\sqrt{\frac{2}{H}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^\infty\frac{f_n(k_\rho)J_0(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho}{k_\rho^2-[k_0^2-(n\pi/H)^2]}\right]\sin\frac{n\pi}{H}z \tag{2.6.40a}$$

其中

$$f_n(k_\rho)=\sqrt{\frac{2}{H}}\int_0^H\left[\int_0^\infty f(\rho,z)J_0(k_\rho\rho)\rho\mathrm{d}\rho\right]\sin\frac{n\pi}{H}z\mathrm{d}z \tag{2.6.40b}$$

利用 Bessel 函数关系 $2J_0(k_\rho\rho)=H_0^{(1)}(k_\rho\rho)-H_0^{(1)}(k_\rho\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})$, 式 (2.6.40a) 中中括号内的积分可写成

$$B_n(\rho)\equiv\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_n(k_\rho)}{k_\rho^2-[k_0^2-(n\pi/H)^2]}H_0^{(1)}(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho \tag{2.6.40c}$$

上式的优点是: ①物理意义明确, 由 $H_0^{(1)}(k_\rho\rho)$ 的渐近展开看出, $H_0^{(1)}(k_\rho\rho)$ 表示行波场, 故上式可看成行波的叠加; ②可以利用复变函数作积分. 由式 (2.6.40c), 积分的贡献主要来自于二个单极点 $k_\rho^{\pm}=\pm\sqrt{k_0^2-(n\pi/H)^2}$, 当 $k_0^2-(n\pi/H)^2>0$ 时, 单极点在实轴上, 第一类 Hankel 函数的宗量是实数, 代表行波; 反之, 当 $k_0^2-(n\pi/H)^2<0$ 时, 第一类 Hankel 函数的宗量是虚数, 虚宗量的第一类 Hankel 函数正比于 $K_0(k_\rho\rho)$, 当 $\rho\to\infty$ 时, $K_0(k_\rho\rho)$ 指数衰减, 故波不能传播. 因此, 在平面波导中, 只能传播有限个模式的波. 特别是当 $k_0^2<(\pi/H)^2$ 时, 所有的模式都不能传播.

### 2.6.4 轴向无限区域和等截面波导

设区域为半径 $a$ 的无限长圆柱, 在柱坐标中 $G$: $\rho\in(0,a)$,$\varphi\in[0,2\pi]$ 和 $z\in(-\infty,\infty)$. 在 $G$ 上考虑混合问题

$$\begin{gathered}u_t-\nabla^2u=0,\ t>0,\ (\rho,\varphi,z)\in G\\ u|_{t=0}=u_0(\rho,\varphi,z);\ u|_{\rho=a}=0\end{gathered} \tag{2.6.41a}$$

其中 Laplace 算子为

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.6.41b}$$

设分离变量解为 $u(\rho,\varphi,z)=T(t)R(\rho)\varPhi(\varphi)Z(z)$, 分析如下:

(1) 方位角部分仍然由式 (2.6.34a) 表示;

(2) 轴向满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2Z(z)}{\mathrm{d}z^2}+\delta^2Z(z)=0 \tag{2.6.42a}$$

因 $z$ 方向无限, 只能 $\delta^2>0$, 即轴向是连续谱: $-\infty<\delta<+\infty$, 相应的本征函数为 $Z(z)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta z}$;

(3) 径向部分的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(\lambda^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{2.6.42b}$$

因为 $\rho=0$ 在区域 $G$ 内, 故取解为 $R(\rho)=AJ_{|m|}(\lambda\rho)$, 由径向边界条件的 $J_{|m|}(\lambda a)=0$, 设 $J_{|m|}(x)=0$ 的第 $n$ 个根为 $\alpha_n^m$, $(n=1,2,\cdots)$, 则径向本征值为 $\lambda_n^m=\alpha_n^m/a$, $(n=1,2,\cdots)$, 相应的本征函数为 $R_n^{|m|}(\rho)=AJ_{|m|}(\lambda_n^m\rho)$;

(4) 时间变化部分的方程为

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}+\left[\left(\frac{\alpha_n^m}{a}\right)^2+\delta^2\right]T(t)=0 \tag{2.6.42c}$$

故解为 $T(t)=T_0e^{-[\delta^2+(\alpha_n^m/a)^2]t}$. 为了满足初始条件, 取定解问题式 (2.6.41a) 的通解

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi,z,t)=&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A_{nm}(\delta)\mathrm{e}^{-[(\alpha_n^m/a)^2+\delta^2]t}\\&\times J_{|m|}\left(\frac{\alpha_n^m}{a}\rho\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\varphi+\delta z)}\mathrm{d}\delta\end{aligned} \tag{2.6.43a}$$

可见: ①径向由于存在边界条件, 为离散谱 — 广义 Fourier 级数; ②周向由于周期边界条件, 也为离散谱 —Fourier 级数; ③轴向, 不存在边界条件而形成连续谱 —Fourier 积分. 由方程 (2.6.41a) 中的初始条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A_{nm}(\delta)J_{|m|}\left(\frac{\alpha_n^m}{a}\rho\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\varphi+\delta z)}\mathrm{d}\delta=u_0(\rho,\varphi,z) \tag{2.6.43b}$$

因此得到展开系数为

$$\begin{aligned}A_{nm}(\delta)=&\frac{1}{(2\pi)^2(N_n^m)^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(\rho,\varphi,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m\varphi+\delta z)}\\&\times J_{|m|}\left(\frac{\alpha_n^m}{a}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{2.6.43c}$$

其中 $[N_n^m]^2 = a^2 J_{|m|+1}^2(\alpha_n^n)/2$, 代入方程 (2.6.43a) 得到

$$u(\rho,\varphi,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^a u_0(\rho',\varphi',z')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}z' \tag{2.6.44a}$$

其中

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) \equiv & \frac{1}{(2\pi)^2(N_n^m)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{|m|}\left(\frac{\alpha_n^m}{a}\rho\right)J_{|m|}\left(\frac{\alpha_n^m}{a}\rho'\right)\\ & \times\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-[(\alpha_n^m/a)^2+\delta^2]t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[m(\varphi-\varphi')+\delta(z-z')]}\mathrm{d}\delta\end{aligned} \tag{2.6.44b}$$

由方程 (1.4.3c), 上式积分可以积出, 于是

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = & \frac{1}{(2\pi)^2(N_n^m)^2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-z')^2}{4t}}\\ & \times\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{|m|}\left(\frac{\alpha_n^m}{a}\rho\right)J_{|m|}\left(\frac{\alpha_n^m}{a}\rho'\right)\mathrm{e}^{-(\alpha_n^m/a)^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\end{aligned} \tag{2.6.44c}$$

可见：$z$ 方向的热扩散独立于平面方向.

**外边值问题** 设区域 $G$ 为 $\rho\in(a,\infty)$,$\varphi\in[0,2\pi]$ 和 $z\in(-\infty,\infty)$. 在 $G$ 上考虑 Helmholtz 方程的外边值问题

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u(\rho,\varphi,z)+k_0^2 u(\rho,\varphi,z)=0,\ (\rho,\varphi,z)\in G\\ &u(\rho,\varphi,z)|_{\rho=a}=u_0(\varphi,z),\ \varphi\in[0,2\pi],z\in(-\infty,\infty)\end{aligned} \tag{2.6.45a}$$

其中 $k_0$ 为常数. 设分离变量解为 $u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\varPhi(\varphi)Z(z)$, 分析如下：

(1) 方位角部分由式 (2.6.34a) 表示；

(2) 轴向部分由式 (2.6.42a) 得 $Z(z)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta z}$, $(-\infty<\delta<\infty)$;

(3) 径向部分的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(k_0^2-\delta^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{2.6.45b}$$

方程 (2.6.45a) 表示无限长圆柱表面振动在空间激发的声波, 故取满足 Sommerfeld 辐射条件的解为 $R(\rho)=AH_m^{(1)}(k_\rho\rho)$(其中 $k_\rho\equiv\sqrt{k_0^2-\delta^2}$). 为了满足径向边界条件, 由叠加原理, 通解写为

$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A_m(\delta)H_m^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\varphi+\delta z)}\mathrm{d}\delta \tag{2.6.46a}$$

代入方程 (2.3.45a) 的边界条件得到

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A_m(\delta)H_m^{(1)}(k_\rho a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\varphi+\delta z)}\mathrm{d}\delta=u_0(\varphi,z) \tag{2.6.46b}$$

因此

$$A_m(\delta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{H_m^{(1)}(k_\rho a)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} u_0(\varphi, z) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m\varphi + \delta z)} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \tag{2.6.46c}$$

代入方程 (2.3.46a) 得到

$$u(\rho, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\varphi', z') G(\boldsymbol{r}, \varphi', z') \mathrm{d}z' \mathrm{d}\varphi', \ (\rho > a) \tag{2.6.47a}$$

其中

$$G(\boldsymbol{r}, \varphi', z') \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi - \varphi')} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_m^{(1)}(k_\rho \rho)}{H_m^{(1)}(k_\rho a)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(z - z')} \mathrm{d}\delta \tag{2.6.47b}$$

注意：当 $|\delta| < k_0$ 时, $k_\rho = \sqrt{k_0^2 - \delta^2} > 0$; 而当 $\delta > k_0$ 时, $k_\rho = \mathrm{i}\sqrt{\delta^2 - k_0^2}$ 为虚数, 故式 (2.6.47b) 积分可分二部分：$|\delta| \leqslant k_0$ 和 $|\delta| > k_0$. 对前者, $H_m^{(1)}(k_\rho \rho)$ 的远场表示行波, 而对后者, $H_m^{(1)}(k_\rho \rho)$ 的远场指数衰减.

**等截面波导中波的传播和激发**　波导是传递波之能量的有效方法. 设波导伸展方向在轴向 $z \in (-\infty, \infty)$, 且波导是等截面的, 截面方程为 $\Gamma$:$g(x, y) = 0$, $G$ 表示波导内部. 非齐次的 Helmholtz 方程的内边值问题为

$$\begin{gathered} -(\nabla^2 + k_0^2) u(x, y, z) = f(x, y, z), \ (x, y, z) \in G \\ \left. \left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right|_\Gamma = 0, \ z \in (-\infty, \infty) \end{gathered} \tag{2.6.48a}$$

其中 $k_0$ 为常数,$(x, y)$ 为波导横截面, 系数 $\alpha$ 和 $\beta$ 与 $z$ 无关 (否则就不能分离变量了). 三维 Laplace 算子可表示为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.6.48b}$$

式中 $\nabla_t^2$ 表示横截面部分, 仅对 $(x, y)$ 作用. 首先考虑齐次 Helmholtz 方程 (传播问题), 令分离变量解为 $u(x, y, z) = \psi(x, y) Z(z)$ 代入齐次的 Helmholtz 方程 $\nabla^2 u + k_0^2 u = 0$ 及边界条件 (方程 (2.6.48a) 的第二式) 得到

(1) 横向部分满足二维 Laplace 算子的本征值问题

$$\begin{gathered} -\nabla_t^2 \psi(x, y) = \lambda^2 \psi(x, y) \\ \left. \left[ \alpha \psi(x, y) + \beta \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial n} \right] \right|_\Gamma = 0 \end{gathered} \tag{2.6.49a}$$

设本征函数和相应的本征值分别为 $\psi_\nu(x,y)$ 和 $\lambda_\nu^2$, $(\nu=0,1,2,\cdots)$(注意：下标 $\nu$ 实际上为二个指标的集合);

(2) 轴向部分满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2Z(z)}{\mathrm{d}z^2}+(k_0^2-\lambda_\nu^2)Z(z)=0 \tag{2.6.49b}$$

显然, 通解为

$$Z_\nu(z)=A_\nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k_0^2-\lambda_\nu^2}z}+B_\nu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k_0^2-\lambda_\nu^2}z} \tag{2.6.49c}$$

当 $k_0^2>\lambda_\nu^2$ 时, 第一、二项分别表示向 $+z$ 或者 $-z$ 方向传播的波; 当 $k_0^2<\lambda_\nu^2$ 时, 第一、二项分别表示向 $+z$ 或者 $-z$ 方向传播的指数衰减的波. 因此, 当 $k_0^2<\lambda_1^2$(最小的非零本征值), 波导内不能传播本征值为 $\lambda_\nu^2$, $(\nu\geqslant 1)$ 的高次模式. 如果存在零本征值, 则波导内只能传播零本征值对应的模式 (称为主波).

对非齐次的 Helmholtz 方程 (2.6.48a), 利用叠加原理, 把通解写成

$$u(x,y,z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}A_\nu(z)\psi_\nu(x,y) \tag{2.6.50a}$$

上式代入方程 (2.6.48a) 得到

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[(k_0^2-\lambda_\nu^2)A_\nu(z)+\frac{\mathrm{d}^2A_\nu(z)}{\mathrm{d}z^2}\right]\psi_\nu(x,y)=-f(x,y,z) \tag{2.6.50b}$$

分二种情况讨论：

(1) $\boldsymbol{L}=-\nabla_t^2$ 是 Hermite 对称算子, 即 $\alpha$ 和 $\beta$ 都是实函数, 于是函数系 $\{\psi_\nu(x,y)\}$ 形成正交的完备系 (假定已归一化), 故从方程 (2.6.50b) 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2A_\nu(z)}{\mathrm{d}z^2}+(k_0^2-\lambda_\nu^2)A_\nu(z)=-f_\nu(z) \tag{2.6.50c}$$

其中

$$f_\nu(z)\equiv\iint_S\psi_\nu^*(x,y)f(x,y,z)\mathrm{d}x dy \tag{2.6.50d}$$

积分在波导的横截面进行. 方程 (2.6.50c) 可由 Fourier 方法解之

$$\begin{aligned}A_\nu(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\delta^2-(k_0^2-\lambda_\nu^2)}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_\nu(z')\exp(-\mathrm{i}\delta z')\mathrm{d}z'\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta z}\mathrm{d}\delta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f_\nu(z')G_\nu(z,z')\mathrm{d}z'\end{aligned} \tag{2.6.51a}$$

其中积分可由复变函数方法得到为

$$G_\nu(z,z')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(z-z')}}{k_0^2-\lambda_\nu^2-\delta^2}\mathrm{d}\delta=\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k_0^2-\lambda_\nu^2}|z-z'|}}{\sqrt{k_0^2-\lambda_\nu^2}} \tag{2.6.51b}$$

把式 (2.6.51a) 代入式 (2.6.50a)

$$u(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\iint_S f(x',y',z')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}x'dy'\mathrm{d}z' \tag{2.6.51c}$$

其中

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\equiv\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k_0^2-\lambda_\nu^2}|z-z'|}}{\sqrt{k_0^2-\lambda_\nu^2}}\psi_\nu^*(x',y')\psi_\nu(x,y) \tag{2.6.51d}$$

式 (2.6.51c) 和 (2.6.51d) 就是非齐次的 Helmholtz 方程 (2.6.48a) 的解;

(2) $\boldsymbol{L}=-\nabla_t^2$ 是非 Hermite 对称算子, 即 $\alpha$ 和 $\beta$ 是复函数, 设函数系 $\{\psi_\nu(x,y)\}$ 形成完备系, 由 2.2.4 小节讨论, 共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的本征函数 $\psi_\lambda^+(x,y)=\psi_\lambda^*(x,y)$, 式 (2.6.50b) 二边乘以 $\psi_\nu(x,y)$ 并在截面上积分得到

$$\frac{\mathrm{d}^2A_\nu(z)}{\mathrm{d}z^2}+(k_0^2-\lambda_\nu^2)A_\nu(z)=-\tilde{f}_\nu(z) \tag{2.6.52a}$$

其中

$$\begin{gathered}\tilde{f}_\nu(z)\equiv\frac{1}{N_\nu^2}\iint_S f(x,y,z)\psi_\nu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ N_\nu^2\equiv\iint_S\psi_\nu^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{gathered} \tag{2.6.52b}$$

仿照式 (2.6.51a), 用 Fourier 方法求解方程 (2.6.52a)

$$A_\nu(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}_\nu(z')\tilde{G}_\nu(z,z')\mathrm{d}z' \tag{2.6.52c}$$

其中

$$\tilde{G}_\nu(z,z')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(z-z')}}{\delta^2-(k_0^2-\lambda_\nu^2)}\mathrm{d}\delta \tag{2.6.52d}$$

必须注意的是: 现在 $\lambda_\nu^2$ 是复数, 设 $\lambda_\nu=\lambda_\nu^R+\mathrm{i}\lambda_\nu^I$ 并且 $\lambda_\nu^R>>\lambda_\nu^I$, 则复变函数积分中的二个单极点近似为

$$\delta_\pm=\pm\left[\sqrt{k_0^2-(\lambda_\nu^R)^2}-\mathrm{i}\alpha_\nu\right];\ \alpha_\nu\equiv\frac{\mathrm{i}\lambda_\nu^R\lambda_\nu^I}{\sqrt{k_0^2-(\lambda_\nu^R)^2}} \tag{2.6.52e}$$

由式 (2.6.52d), 得到近似表达式为

$$\tilde{G}_\nu(z,z')=\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha_\nu|z-z'|}}{\sqrt{k_0^2-\lambda_\nu^2}}\exp[\mathrm{i}\sqrt{k_0^2-(\lambda_\nu^R)^2}|z-z'|] \tag{2.6.52f}$$

最后, 得到解为

$$u(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\iint_S f(x',y',z')\tilde{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}x'dy'\mathrm{d}z' \tag{2.6.52g}$$

其中

$$\tilde{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\equiv\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\left[-\alpha_\nu+\mathrm{i}\sqrt{k_0^2-(\lambda_\nu^R)^2}\right]|z-z'|}}{N_\nu^2\sqrt{k_0^2-(\lambda_\nu^R)^2}}\psi_\nu(x',y')\psi_\nu(x,y) \tag{2.6.52h}$$

积分变换在数学物理中有重要的应用, 本节仅作简单介绍. 我们将在第五章进一步讨论之, 特别是另二个尚未提及的重要变换, 即 Laplace 变换和 Hilbert.

### 2.6.5 波动方程的非衍射解

波在空间传播的一个基本特征是: 有限宽度的波束在传播过程中的横向展宽, 称为波的衍射, 这在物理应用中是不利的. 那么波动方程是否存在这样的解, 它在空间传播过程中保持横向不变化呢? 这样的解称为**非衍射解**. 我们在圆柱坐标中讨论这个问题.

在柱坐标下, 空间的标量波场 $\psi(\rho,\varphi,z,t)$ 满足方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \tag{2.6.53a}$$

假定波束沿 $z$ 方向传播, 波场与 $\rho$ 的关系给出了波束的变化. 满足波动方程的非衍射束最简单的例子是所谓 Bessel 束

$$\psi(\rho,z,t)=A_0J_0(\gamma\delta\rho)\exp[\mathrm{i}\delta(z-Vt)] \tag{2.6.53b}$$

其中 $A_0$,$V$ 和 $\delta$ 是常数, $\gamma=\sqrt{V^2/c_0^2-1}$. 容易证明上式满足波动方程 (2.6.52a), 波的横向截面不随传播距离变化, 而保持零阶 Bessel 函数的分布.

设波束在 $\Delta t$ 时间内沿 $z$ 方向传播距离为 $\Delta z_0$, 波束传播的速度为 $V$, 那么 $\Delta t=\Delta z_0/V$. 如果声束是非衍射的, 即波振幅在横向 ($\rho$ 方向) 保持不变, $\psi(\rho,\varphi,z,t)$ 应该满足关系

$$\psi(\rho,\varphi,z,t)=\psi\left(\rho,\varphi,z+\Delta z_0,t+\frac{\Delta z_0}{V}\right) \tag{2.6.53c}$$

另一方面, 对 $\psi(\rho,\varphi,z,t)$ 作变换：角度 $\varphi$ 变量作 Fourier 级数展开；$z$ 和时间 $t$ 变量作 Fourier 积分展开；而 $\rho$ 变量作 Hankel 变换展开, 那么

$$\begin{aligned}\psi(\rho,\varphi,z,t)=&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}k_\rho\mathrm{d}k_\rho\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_z\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega A_m(k_\rho,k_z,\omega)J_m(k_\rho\rho)\\&\times\exp\left[\mathrm{i}(k_zz+m\varphi-\omega t)\right]\end{aligned} \tag{2.6.53d}$$

上式代入方程 (2.6.53c), 显然要求

$$\exp\left[\mathrm{i}\left(k_z\Delta z_0-\omega\frac{\Delta z_0}{V}\right)\right]=1 \tag{2.6.53e}$$

即

$$\omega = Vk_z + 2n\pi\frac{V}{\Delta z_0},\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.6.53f}$$

这就是 $\psi(\rho,\varphi,z,t)$ 为非衍射声场的约束条件. 另一方面, 式 (2.6.53d) 必须满足波动方程 (2.6.53a), 得到

$$k_\rho^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2 \tag{2.6.54a}$$

因此 $A_m(k_\rho,k_z,\omega)$ 可以写成

$$A_m(k_\rho,k_z,\omega) = B_m(k_z,\omega)\delta\left(k_\rho^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} + k_z^2\right) \tag{2.6.54b}$$

其中 $B_n(k_z,\omega)$ 是任意函数, 上式代入方程 (2.6.53d) 得到

$$\begin{aligned}\psi(\rho,\varphi,z,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\int_{-\omega/c_0}^{\omega/c_0}\mathrm{d}k_z B_m(k_z,\omega)J_m\left(\rho\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2}\right)\\ \times\exp\left[\mathrm{i}(k_z z + m\varphi - \omega t)\right]\end{aligned} \tag{2.6.54c}$$

得到上式, 利用了关系

$$\delta\left(k_\rho^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} + k_z^2\right) = \frac{1}{2k_\rho}\left[\delta\left(k_\rho - \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2}\right) + \delta\left(k_\rho + \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2}\right)\right] \tag{2.6.54d}$$

注意: ①方程 (2.6.53d) 的诸积分可看成线性叠加, 我们无需求积分逆变换, 因而式 (2.6.54c) 中仅考虑正频率部分的积分就可以了; ②当 $k_z^2 > \omega^2/c_0^2$ 时, 方程 (2.6.54c) 中 Bessel 函数的宗量为虚数, 其值随 $\rho$ 指数发散, 因而对 $k_z$ 的积分也限制在区域 $k_z \in (-\omega/c_0, \omega/c_0)$.

考虑轴对称情况, 即取 $m = 0$, 式 (2.6.54c) 简化成

$$\begin{aligned}\psi(\rho,z,t) = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\int_{-\omega/c_0}^{\omega/c_0}\mathrm{d}k_z B(k_z,\omega)J_0\left(\rho\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2}\right)\\ \times\exp\left[\mathrm{i}(k_z z - \omega t)\right]\end{aligned} \tag{2.6.55a}$$

其中 $B(k_z,\omega) \equiv B_0(k_z,\omega)$, 作积分变换

$$\alpha = \frac{1}{2V}(\omega + Vk_z);\ \beta = \frac{1}{2V}(\omega - Vk_z) \tag{2.6.55b}$$

或者 $\omega = V(\alpha+\beta)$; $k_z = \alpha - \beta$, 代入式 (2.6.55a)

$$\begin{aligned}\psi(\rho,z,t) = \int_0^\infty\int_0^\infty B(\alpha,\beta)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\alpha\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(z-Vt)}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(z+Vt)}\\ \times J_0\left[\rho\sqrt{\left(\frac{V^2}{c_0^2} - 1\right)(\alpha^2+\beta^2) + 2\left(\frac{V^2}{c_0^2} + 1\right)\alpha\beta}\right]\end{aligned} \tag{2.6.56a}$$

得到上式, 忽略了二重积分变换过程中出现的常数. 当 $V=c_0$ 时, 上式简化成

$$\psi(\rho,z,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty B(\alpha,\beta)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\alpha J_0\left(2\rho\sqrt{\alpha\beta}\right)\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(z-c_0t)}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(z+c_0t)} \tag{2.6.56b}$$

为了保证上式是非衍射声场, $\omega$ 和 $k_z$ 必须满足式 (2.6.53f), 即 $\beta=2n\pi/\Delta z_0\equiv b_n/2$. 因此必须取

$$B(\alpha,\beta)=S(\alpha)\delta(\beta-b_n/2) \tag{2.6.56c}$$

代入式 (2.6.56b)

$$\begin{aligned}\psi(\rho,z,t)=&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b_n(z+Vt)/2}\cdot\int_0^\infty S(\alpha)\mathrm{d}\alpha\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(z-Vt)}\\&\times J_0\left[\rho\sqrt{\left(\frac{V^2}{c_0^2}-1\right)\left(\alpha^2+\frac{b_n^2}{4}\right)+b_n\left(\frac{V^2}{c_0^2}+1\right)\alpha}\right]\end{aligned} \tag{2.6.56d}$$

上式代表轴对称情况下的非衍射波束, 指数因子 $\exp[-\mathrm{i}b_n(z+Vt)/2]$ 代表 $-z$ 方向传播的波, 故非衍射波束受到一个 $-z$ 方向传播波的调制. 取 $n=0$, 即 $b_n=0$, 上式变成

$$\psi(\rho,z,t)=\int_0^\infty S(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(z-Vt)}J_0(\rho\gamma\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{2.6.57a}$$

其中 $\gamma\equiv\sqrt{V^2/c_0^2-1}$. 分三种情况讨论：① $V>c_0$, 上式中 Bessel 函数宗量为实数, 积分可理解为 Bessel 型波场的线性叠加；② $V=c_0$, 式 (2.6.57a) 简化成一般平面波的叠加, 平面波当然是非衍射的, 但是平凡的. 故此时不假定 $b_n$ 为零, 由式 (2.6.56d), 在 $V=c_0$ 时, 非衍射波束的表达式为

$$\psi(\rho,z,t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b_n(z+c_0t)/2}\cdot\int_0^\infty S(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(z-c_0t)}J_0\left(\rho\sqrt{2b_n\alpha}\right)\mathrm{d}\alpha \tag{2.6.57b}$$

显然必须 $b_n>0$；③ $V<c_0$, 式 (2.6.57a) 中 Bessel 函数宗量为虚数, 随径向 $\rho$ 增长指数发散, 故此时也不能假定 $b_n$ 为零.

因此, 当 $b_n=0$ 时, 我们假定 $V>c_0$. 最简单的例子是取

$$S(\alpha)=aV\exp(-aV\alpha),\ \ (V>c_0) \tag{2.6.57c}$$

其中 $a$ 是常数, 代入式 (2.6.57a) 得到

$$\begin{aligned}\psi(\rho,z,t)&=aV\int_0^\infty\exp[-\alpha(aV-\mathrm{i}\xi)]J_0(\rho\gamma\alpha)\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{aV}{\sqrt{(aV-\mathrm{i}\xi)^2+\gamma^2\rho^2}}\equiv X\end{aligned} \tag{2.6.57d}$$

其中 $\xi \equiv z - Vt$. 得到上式的第二个等号, 利用了积分关系

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-A\alpha} J_0(B\alpha)\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{2.6.57e}$$

图 2.6.2 给出了 $\psi(\rho,z,t)$ 的实部：由图可见, 场的空间分布像字母 “X”, 故这样的非衍射波称为 **X 波**, 式 (2.6.57d) 表示的 X 波也称为**经典 X 波**. 容易证明, 式 (2.6.57d) 确实满足波动方程.

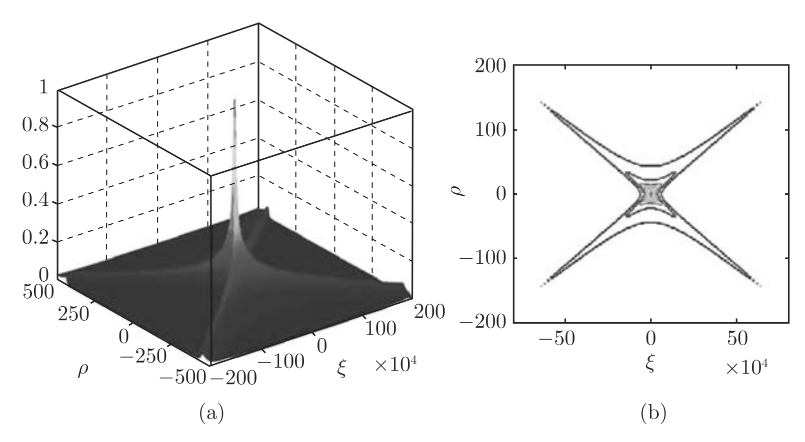



图 2.6.2　经典 X-波: (a) 三维图, 纵轴为 $\mathrm{Re}(\psi)$; (b) 等值线图

**超声速非衍射波束**　当 $V > c_0$ 时, 式 (2.6.57a) 表示的非衍射波束一般是 X 波, 式 (2.6.57d) 是最简单的 X 波. 由于波动方程 (2.6.53a) 是齐次的线性方程, 故式 (2.6.57d) 的 $m$ 阶偏导数也是波动方程 (2.6.53a) 的解, 而且也是 X 波

$$\psi(\rho,z,t) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial\beta^m}\frac{aV}{\sqrt{\gamma^2\rho^2+\beta^2(z,t)}} \tag{2.6.58a}$$

其中 $\beta(z,t) \equiv aV - \mathrm{i}(z-Vt)$, 上式中加 $(-1)^m$ 仅是为了得到的 X- 波前面的系数是正的. 当 $m=1$ 时

$$\psi(\rho,z,t) = \frac{aV\beta(z,t)}{[\gamma^2\rho^2+\beta^2(z,t)]^{3/2}} \tag{2.6.58b}$$

当 $m=2$ 时

$$\begin{aligned}\psi(\rho,z,t) =& -\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{aV\beta(z,t)}{[\gamma^2\rho^2+\beta^2(z,t)]^{3/2}} = \frac{aV\beta^2(z,t)}{[\gamma^2\rho^2+\beta^2(z,t)]^{5/2}}\\ &-\frac{aV}{[\gamma^2\rho^2+\beta^2(z,t)]^{3/2}}\end{aligned} \tag{2.6.58c}$$

**其他形式的 X 波**　我们可以通过式 (2.6.57a), 选择 $S(\alpha)$ 生成多种形式的 X-波, 例如选取 $S(\alpha) = J_0\left(2\sqrt{q\alpha}\right)\exp(-aV\alpha)$, $(V > c_0, q$ 是任意大于零的实数), 代入

式 (2.6.57a) 得到 X- 波

$$\psi(\rho,z,t)=\int_0^\infty J_0\left(2d\sqrt{\alpha}\right)J_0(\rho\gamma\alpha)\exp[-\alpha\beta(z,t)]\mathrm{d}\alpha \tag{2.6.59a}$$

利用积分关系

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta x}J_0\left(2a\sqrt{x}\right)J_0(bx)\mathrm{d}x=&\exp\left(-\frac{a^2\beta}{\beta^2+b^2}\right)J_0\left(\frac{a^2b}{\beta^2+b^2}\right)\\&\times\frac{1}{\sqrt{\beta^2+b^2}};\ (\mathrm{Re}\beta>0,b>0)\end{aligned} \tag{2.6.59b}$$

完成 Bessel 函数的积分后得到

$$\begin{aligned}\psi(\rho,z,t)=&\frac{1}{\sqrt{\beta^2(z,t)+\gamma^2\rho^2}}J_0\left[\frac{\gamma\rho q}{\beta^2(z,t)+\gamma^2\rho^2}\right]\\&\times\exp\left[-\frac{q\beta(z,t)}{\beta^2(z,t)+\gamma^2\rho^2}\right]\end{aligned} \tag{2.6.59c}$$

由于波动方程是齐次的线性方程, 故上式乘权重函数 $\chi(q)$ 且对任意常数 $q$ 积分仍然是齐次波动方程的解, 取 $\chi(q)=J_0\left(2\sqrt{\delta q}\right)$ ($\delta>0$ 为常数), 则

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(\rho,z,t)=&\frac{1}{\sqrt{\beta^2(z,t)+\gamma^2\rho^2}}\int_0^\infty J_0\left(2\sqrt{\delta q}\right)J_0\left[\frac{\gamma\rho q}{\beta^2(z,t)+\gamma^2\rho^2}\right]\\&\times\exp\left[-\frac{\beta(z,t)q}{\beta^2(z,t)+\gamma^2\rho^2}\right]\mathrm{d}q=J_0(\gamma\delta\rho)\mathrm{e}^{-aV\delta}\exp\left[\mathrm{i}\delta(z-Vt)\right]\end{aligned} \tag{2.6.59d}$$

显然, 这就是 Bessel 束, 可见由 X- 波的叠加也可以形成 Bessel 束.

**等声速非衍射波束** 从式 (2.6.57b), 可以得到一系列等声速 ($V=c_0$) 传播的非衍射波. 例如取 $S(\alpha)=aV\exp(-aV\alpha)$, ($V=c_0$), 代入式 (2.6.57b) 得到

$$\begin{aligned}\psi(\rho,z,t)&=aV\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b_n(z+c_0t)/2}\cdot\int_0^\infty\exp[-\alpha(aV-\mathrm{i}\xi)]J_0\left(\rho\sqrt{2b_n\alpha}\right)\mathrm{d}\alpha\\&=2aV\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b_n(z+c_0t)/2}\cdot\int_0^\infty\exp[-\sigma^2(aV-\mathrm{i}\xi)]J_0\left(\sigma\rho\sqrt{2b_n}\right)\sigma\mathrm{d}\sigma\\&=aV\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b_n(z+c_0t)/2}\frac{1}{aV-\mathrm{i}\xi}\exp\left[-\frac{b_n\rho^2}{2(aV-\mathrm{i}\xi)}\right]\end{aligned} \tag{2.6.60a}$$

其中积分利用了积分关系

$$\int_0^\infty\exp\left(-Q^2\xi'^2\right)J_0\left(\beta\xi'\right)\xi'\mathrm{d}\xi'=\frac{1}{2Q^2}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4Q^2}\right) \tag{2.6.60b}$$

最后指出, 尽管已经证明并且找到了波动方程的各种非衍射 (例如 X- 波) 波束的形式解, 但在实验上实现是困难的.

## 习 题 二

2.1 证明

(1) $P_{2n}(0)=(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$; (2)$P_{2n+1}(0)=0$; (3)$P'_{2n}(0)=0$;

(4) $P'_{2n+1}(0)=(-1)^n\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$; (5)$P'_n(1)=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

(6) $P'_n(-1)=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.2 对本征方程 $\psi''+\lambda\psi=0,\ (0<x<l)$, 写出下列各种边界条件下的本征函数和本征值:

(1) $\psi(0)=\psi(l)=0$; (2)$\psi(0)=\psi'(l)=0$

(3) $\psi'(0)=\psi(l)=0$; (4)$\psi(0)=0;\ \alpha\psi(l)+\beta\psi'(l)=0$

(5) $\alpha_1\psi(0)+\beta_1\psi'(0)=0;\ \alpha_2\psi(l)+\beta_2\psi'(l)=0$

2.3 考虑本征值问题

$$a^2\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda\psi=0,\ x\in(0,l)$$

$$\psi|_{x=0}=0;\ \lambda\psi|_{x=l}=c^2\psi'|_{x=l}$$

其中 $a$ 和 $c$ 为实常数. (1) 求本征函数 $\psi_n(x)$ 及相应的本征值 $\lambda_n$; (2) 求本征函数 $\psi_n(x)$ 的模; 求积分

$$\int_0^l\psi_n(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x;\ \int_0^l\psi'_n(x)\psi'_m(x)\mathrm{d}x.$$

注意本题中本征函数 $\psi_n(x)$ 不正交, 上述本征值问题没有 Hermite 对称性.

2.4 考虑本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]\,\psi=0,\ x\in(a,b)$$

$$\psi(b)=a_{11}\psi(a)+a_{12}\psi'(a);\ \psi'(b)=a_{11}\psi(a)+a_{12}\psi'(a)$$

其中 $p(a)=p(b)$. 证明当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$ 时, 对应不同本征值的本征函数正交.

2.5 求本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda\psi=0,\ (0<x<l_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{a_1}{a_2}\lambda\psi=0,\ (l_1<x<l_1+l_2)$$

$$\psi'(0)=0;\ \psi'(l_1+l_2)=0$$

$$\psi(l_1-0)=\psi(l_1+0);\ \alpha\psi'(l_1-0)=\beta\psi'(l_1+0)$$

其中 $a_1$, $a_2$, $\alpha$ 和 $\beta$ 为正的常数. 并且证明

(1) 对应不同本征值的本征函数在区间 $x\in[0,l_1+l_2]$ 带权正交, 权函数为

$$\rho(x)=\begin{cases}\alpha/a_1^2,\ 0\leqslant x<l_1\\ \beta/a_2^2,\ l_1<x\leqslant l_1+l_2\end{cases}$$

(2) 本征值大于或等于零 $\lambda_n \geqslant 0$.

2.6 考虑本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda\rho(x)\psi(x)=0, x\in(0,l)$$

$$\alpha_1\psi(0)-\beta_1\psi'(0)=\alpha_2\psi(l)-\beta_l\psi'(l)=0$$
$$\psi(c-0)=\psi(c+0)$$
$$p(c)\left[\psi'(c+0)-\psi'(c-0)\right]=\lambda M\psi(c),\ (0<c<l)$$

导出本征函数的正交关系式. 并证明当 $\rho(x)=\rho_0(x)+M\delta(x-c)$ 时, 本征函数正交. 提示: $c$ 点为函数 $\psi(x)$ 的间断点, 因此必须分段表示 $\psi(x)$.

2.7 考虑 4 阶常微分方程的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[q(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda\rho(x)-\gamma(x)\right]\psi(x)=0$$

其中 $x\in(a,b)$. $\psi(x)$ 在端点 $x=a,b$ 满足

(1) $\psi(a)=\psi(b)=0;\ \psi'(a)=\psi'(b)$;

(2) $\psi(a)=\psi(b)=0;\ \psi''(a)=\psi''(b)$;

(3) $\psi'(a)=\psi'(b)=0;\ [p(x)\psi''(x)]'|_{x=a}=[p(x)\psi''(x)]'|_{x=b}=0$

证明在以上三种情况, 对应不同本征值的本征函数带权 $\rho(x)$ 正交.

2.8 将函数 $(x^2+2z^2+3xy+4xz)/r^2$ 用球谐函数展开.

2.9 已知在球坐标下两点 $\boldsymbol{r}=(r,\vartheta,\varphi)$ 和 $\boldsymbol{r}'=(r',\vartheta',\varphi')$ 且 $r'<r$. 证明

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r'^l}{r^{l+1}}Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

提示: ① $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\Theta}$;

② $P_l(x)$ 的生成函数公式;

③加法公式 $P_l(\Theta)=\dfrac{4\pi}{2l+1}\displaystyle\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$,

其中 $\cos\Theta=\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')$.

2.10 一半径为 $a$、高为 $h$ 的导体圆柱体, 电导率为 $\sigma$. 稳定电流 $I$ 从上底中心垂直流入而从下底中心流出. 求柱内电势分布. 提示: 电流密度

$$j_z|_{z=\pm h}=\sigma E_z|_{z=\pm h}=\sigma\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\pm h}=\begin{cases}\dfrac{I}{\pi\varepsilon^2},\ 0\leqslant\rho<\varepsilon\\ 0,\ \varepsilon<\rho\leqslant a\end{cases}\qquad(\varepsilon\to 0)$$

或者用 $\delta$ 函数表示

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\pm h}=\frac{I}{2\pi\sigma}\frac{\delta(\rho-\varepsilon)}{\rho},\ (\varepsilon\to 0)$$

2.11 一无限长匀质圆柱管 ($R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$), 其外壁保持零温度, 内壁有均匀分布、强度为 $q_0$ 的恒定热流流入. 设初始温度为零, 求此后管内的温度分布. 提示: 内壁边界条件为 $u_\rho|_{\rho=R_1} = -q_0/k$, ($k$ 为热传导系数), 为了使内边界条件齐次化并保持外边界条件及方程的齐次, 作变换

$$u(\rho,t) = \frac{q_0 R_1}{k} \ln \frac{R_2}{\rho} + v(\rho,t)$$

2.12 一半径为 $a$ 的圆柱体由二段匀质圆柱体连接而成, 其中一段高为 $h_1$, 导热系数为 $k_1$; 另一段高为 $h_2$, 导热系数 $k_2$. 设圆柱两端保持零度, 侧面保持恒温 $u_0$, 求圆柱体内稳定温度分布. 提示: 令分离变量解为

$$u(\rho,\varphi) = R(\rho)Z(z)$$

$R(\rho)$ 满足零级虚宗量 Bessel 方程. 而 $Z(z)$ 应分段表示.

# 第 3 章　Green 函数方法

本章介绍求解数学物理方程定解问题的 Green 函数法. 主要内容有: 3.1 节首先介绍广义函数理论基础, 目的是希望更深刻地理解 Dirac Delta 函数, 然后介绍 Dirac Delta 函数的若干重要性质; 3.2 节介绍常微分方程的 Green 函数, 重点放在本征值问题上; 3.3 节介绍高维边值问题的 Green 函数, 主要讨论 Laplace 方程和 Helmholtz 方程; 3.4 节介绍热导方程及波动方程的含时 Green 函数; 最后, 在 3.5 节介绍 Green 函数方法应用于求解一般形式的二阶线性偏微分方程的非齐次问题. 本章特别强调 Green 函数理论的一个重要应用, 即把微分方程化成积分方程.

## 3.1　广义函数及 Dirac Delta 函数

本节介绍数学物理方程中一个十分重要的函数, 即 Dirac Delta 函数. 由于 Dirac Delta 函数不能用经典函数来描述, 故必须推广函数的定义. 因此, 本节首先介绍广义函数的概念, 而 Dirac Delta 函数作为一个广义函数, 我们将详细讨论之.

### 3.1.1　广义函数概念和运算法则

根据定义, 函数 $f(\boldsymbol{r})$ 表示 $R^n$ 中点集 $E$ 到数域 $R^1$ 的一一对应, 即如果对每个 $\boldsymbol{r} \in E$, 有唯一确定的数 $f(\boldsymbol{r}) \in R^1$ 与之对应, 则称 $f(\boldsymbol{r})$ 是定义在 $E$ 上的一个函数. 这样的函数称为**经典函数**. 经典函数反映了现实世界中一个量随另一个量变化而变化的关系, 但是经典函数有其明显的缺点. 最典型的例子是不能表达物理上 “点源” 或 “点电荷” 的分布. 考虑在坐标原点的单位点电荷, 电荷密度分布应如何表达呢? 直观上, 可写密度分布函数 $\rho(\boldsymbol{r})$ 如下

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{r} \neq 0 \\ \rho_0, & \boldsymbol{r} = 0 \end{cases} \tag{3.1.1a}$$

上式表明, 函数 $\rho(\boldsymbol{r})$ 是一几乎处处为零的函数, 按经典函数的积分理论, 应有

$$\int_G \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\tau = 0 \tag{3.1.1b}$$

但上式左边表示总电荷, 物理上应有

$$\int_G \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\tau = \begin{cases} 1, \ \boldsymbol{r} = 0 \in G \\ 0, \ \boldsymbol{r} = 0 \notin G \end{cases} \tag{3.1.1c}$$

因此, 式 (3.1.1a) 在经典的意义上, 不能描述点电荷的分布. 此外, 经典函数最大的缺点是对微分和积分等运算的局限性. 例如, 不连续函数的求导问题、高阶导数的存在性、函数列求导与求极限的交换次序问题, 以及在经典函数意义下若干积分的发散性等等. 这些限制往往给问题带来复杂性. 有时使问题无法得到解决. 因此, 必须推广函数的概念, 当然, 推广的函数必须至少能解决上述所列的问题, 即具有性质

(1) 反映通常的数量关系, 能包含经典函数在内, 且又能反映上述 “点源” 分布问题;

(2) 可求任意阶导数, 对经典函数, 新定义应与之一致;

(3) 推广的函数对求导、求积和求极限可任意交换运算.

这种新的函数称为**广义函数**或简称**广函**. 为了定义广函, 首先介绍**基本函数**或**试验函数**的概念: 设空间 $D$ 为所有在 $R^n$ 中无穷可微且在不同有界域外恒等于零的函数组成的空间, 记为 $D(R^n) \equiv C_0^\infty(R^n)$. $D$ 中元素是很多的, 例如一维情况可取

$$\psi(x,a,b)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{b^2}{a^2-x^2}\right), & |x|<a\\[2ex] 0, & |x|\geqslant a\end{cases}\tag{3.1.2}$$

式中 $a$ 和 $b$ 为任意正数, 图 3.1.1 画出了取不同 $b$ 的曲线, 不难证明不仅函数 $\psi(x,a,b)$ 而且其任意阶导数在 $x=\pm a$ 都连续. 对 $n$ 维空间, 式中以 $|\boldsymbol{x}|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 代替 $x^2$ 即可. 空间 $D$ 中的函数序列 $\{\psi_n\}$ 收敛于零定义为

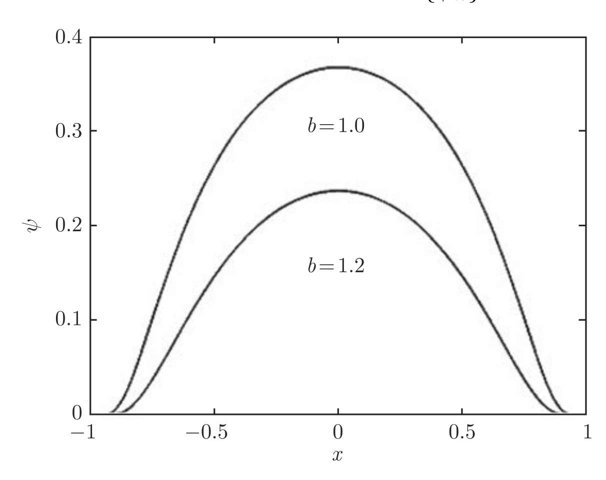



图 3.1.1 试验函数 $\psi(x,a,b):a=1$

(1) 所有 $\psi_n$ 在某同一有界域 $K$ 外恒为零;

(2) $\{\psi_n\}$ 及其各阶导数在 $K$ 上一致收敛于零, 记作 $\psi_n\to 0(D)$

称 $D$ 中的函数为**基本函数**或**试验函数**. 我们利用泛函来定义广义函数: $D$ 上的广义函数 $f$ 为 $D$ 上的连续线性泛函, 即对 $D$ 中每个元素 $\psi$, 有确定的实或复数 $c(f,\psi)$ 与之相应, 记作

$$f(\psi) \equiv (f,\psi) = c(f,\psi),\ \forall\psi \in D \tag{3.1.3a}$$

且具有性质:

(1) 线性, 对任意二个实或复数 $\alpha$ 和 $\beta$

$$f(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha f(\psi_1) + \beta f(\psi_2),\ \psi_1,\ \psi_2 \in D \tag{3.1.3b}$$

(2) 连续性, 即当 $\psi_n \to 0$ 时, 有 $f(\psi_n) \to 0$.

$D$ 上的广义函数全体记作 $D'$, 称为 $D$ 的**对偶空间**. 根据广函 $f$ 之定义, 可看出: 广函 $f$ 是定义在特定空间上的, 如上面我们定义在 $D$ 空间上. 当然还可以在其他空间上. 另一个十分重要的空间是速降函数空间 $L(R^n)$, 它由下列函数组成

(1) $\psi(x)$ 为 $R^n$ 中的无限可微函数;

(2) $\psi(x)$ 的任意阶导数乘上任意次幂函数在无限远处仍趋向零, 即 $\psi(x)$ 在无穷远处急速下降

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha \frac{\partial^p \psi(x)}{\partial x^p} = 0 \tag{3.1.4a}$$

其中 $\alpha$ 和 $p$ 为任意非负整数;

(3) $L(R^n)$ 中的任一函数序列 $\{\psi_n\}$ 对任意非负整数 $\alpha$ 和 $p$ 在 $R^n$ 上一致成立

$$\lim_{n\to\infty} x^\alpha \frac{\partial^p \psi_n(x)}{\partial x^p} = 0 \tag{3.1.4b}$$

则称 $\psi_n(x) \to 0[L(R^n)]$. 定义在 $L(R^n)$ 的广函全体记作 $L'(R^n)$, 可以证明 $D$ 中的广函包含所有 $L(R^n)$ 中的广函, 即 $L'(R^n)$ 是 $D'(R^n)$ 的子空间

$$D'(R^n) \supset L'(R^n) \tag{3.1.4c}$$

严格地说, 广函 $f$ 不是 $x$ 的函数, 即对每一个 $x$ 并不对应一个值, 而是对每一个检验函数 $\psi(x)$ 对应一个值. 但在我们考虑的情况, 广函 $f$ 能表达成 $f(x)$ 的形式 (对几乎所有的 $x$ 点). 例如考虑 $f(x)$ 是一般的可积函数 (在有限区域内), 则泛函具有形式

$$(f,\psi) = \int f(x)\psi(x)\mathrm{d}x,\ \forall\psi \in D \tag{3.1.5a}$$

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个可积函数, 且

$$(f,\psi) = (g,\psi),\ \forall\psi \in D \tag{3.1.5b}$$

则

$$\int [f(x) - g(x)]\psi(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{3.1.5c}$$

因 $\psi$ 取遍 $D$ 空间, 于是由上式知 $g(x)$ 和 $f(x)$ 几乎处处相等:$f(x) = g(x)$. 因此, 由式 (3.1.5a) 定义的泛函, 唯一决定一个可积函数; 反过来, 每个可积函数可以决定一个泛函式 (3.1.5a). 因而可以决定一个广义函数, 这样的广义函数通常称为**正则广义函数**, 故正则的广义函数能用可积函数来表示. 不能用可积函数来表示的广义函数称为**奇异广义函数**. 奇异的广义函数最简单的例子是 Dirac Delta 函数, 它定义为泛函

$$(\delta, \psi) = \psi(0) \tag{3.1.6a}$$

严格地, Dirac Delta 函数不能表示成式 (3.1.5a) 的积分形式, 但我们经常写成

$$(\delta, \psi) = \int \delta(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \psi(0) \tag{3.1.6b}$$

广义函数的基本运算法则如下.

**加法** $D'$ 中任意二个广函 $f$ 和 $g$ 的和 $f + g$ 定义为如下的泛函

$$(f + g, \psi) = (f, \psi) + (g, \psi),\ \forall \psi \in D \tag{3.1.7a}$$

当 $f$ 和 $g$ 是可积函数时, 由式 (3.1.5a)

$$(f + g, \psi) = \int [f(x) + g(x)]\psi(x)\mathrm{d}x \tag{3.1.7b}$$

因此有 $f + g = f(x) + g(x)$, 相当于函数逐点相加.

**乘法** 广函 $f$ 与数 $\alpha$ 相乘产生的广函定义为

$$(\alpha f, \psi) = \alpha(f, \psi) = (f, \alpha\psi) \tag{3.1.7c}$$

如果 $f$ 是可积函数, 则 $\alpha f = \alpha f(x)$.

**坐标扩展** 设 $f$ 是 $D'$ 中的广函, 下面考虑广函 $f(cx)$ 的定义, 首先考虑 $f(x)$ 是可积函数

$$\begin{aligned}[f(cx), \psi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(cx)\psi(x)\mathrm{d}x &= \begin{cases} \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi\left(\dfrac{x}{c}\right)\mathrm{d}x,\ c > 0 \\ -\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi\left(\dfrac{x}{c}\right)\mathrm{d}x,\ c < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|c|}\left[f(x), \psi\left(\frac{x}{c}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.1.8a}$$

当 $f(x)$ 不是一般可积函数时, 直接定义 $f(cx)$ 是下列泛函

$$[f(cx),\psi(x)]=\frac{1}{|c|}\left[f(x),\psi\left(\frac{x}{c}\right)\right] \tag{3.1.8b}$$

例如对 Dirac Delta 函数

$$[\delta(cx),\psi(x)]=\frac{1}{|c|}\left[\delta(x),\psi\left(\frac{x}{c}\right)\right]=\frac{1}{|c|}\psi(0)=\left(\frac{1}{|c|}\delta(x),\psi(x)\right)$$

于是, 形式上有

$$\delta(cx)=\frac{\delta(x)}{|c|} \tag{3.1.8c}$$

特别当 $c=-1$

$$\delta(-x)=\delta(x) \tag{3.1.8d}$$

故我们说 Dirac Delta 函数是偶函数.

**坐标平移** 考虑 $f$ 是可积情形

$$[f(x+c),\psi(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x+c)\psi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\psi(x-c)dx=[f(x),\psi(x-c)]$$

因此, 当 $f(x)$ 不是一般可积函数时, 广函 $f(x+c)$ 定义为下列泛函

$$[f(x+c),\psi(x)]=[f(x),\psi(x-c)] \tag{3.1.9a}$$

例如对 Dirac Delta 函数

$$[\delta(x-y),\psi(x)]=[\delta(x),\psi(x+y)]=\psi(y) \tag{3.1.9b}$$

**函数相乘** 广函 $f$ 和无限可微函数 $g(x)$ 相乘, 考虑 $f(x)$ 是可积情形

$$\begin{aligned}[g(x)f(x),\psi(x)]&=\int[g(x)f(x)]\psi(x)\mathrm{d}x\\&=\int f(x)[g(x)\psi(x)]\mathrm{d}x=[f(x),g(x)\psi(x)]\end{aligned} \tag{3.1.10a}$$

如果 $g(x)$ 无限可微, 则 $g(x)\psi(x)$ 仍然是 $D$ 中元素, 当 $f(x)$ 不是正则的广函时, 直接定义

$$(gf,\psi)=(f,g\psi) \tag{3.1.10b}$$

由上式可证明

$$g(x)\delta(x-y)=g(y)\delta(x-y) \tag{3.1.10c}$$

事实上

$$[g(x)\delta(x-y),\psi(x)] = [\delta(x-y),g(x)\psi(x)] \\ = g(y)\psi(y) = [g(y)\delta(x-y),\psi(x)] \tag{3.1.10d}$$

因此式 (3.1.10c) 式得证. 特别地, 我们有

$$x\delta(x) = 0\cdot\delta(x) = 0 \tag{3.1.10e}$$

**广函的合复函数** 设 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 为零, 即 $g(x_0)=0$, 由式 (3.1.6b)

$$\{\delta[g(x)],\psi(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta[g(x)]\psi(x)\mathrm{d}x \\ = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\sigma)\psi[x(\sigma)]\frac{\mathrm{d}\sigma}{g'[x(\sigma)]}, & g'[x(\sigma)]>0 \\ \displaystyle-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\sigma)\psi[x(\sigma)]\frac{\mathrm{d}\sigma}{g'[x(\sigma)]}, & g'[x(\sigma)]<0 \end{cases} \tag{3.1.11a}$$

即

$$\{\delta[g(x)],\psi(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\sigma)\psi[x(\sigma)]\frac{\mathrm{d}\sigma}{|g'[x(\sigma)]|} \\ = \frac{\psi(x_0)}{|g'(x_0)|} = \left[\frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x-x_0),\psi(x)\right] \tag{3.1.11b}$$

上式积分中取变数变换 $\sigma=g(x)$ 故 $x=x(\sigma)$. 注意：$\sigma=0$ 的点即为 $g(x)$ 的零点 $x_0$. 从式 (3.1.11b) 可见

$$\delta[g(x)] = \frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x-x_0) \tag{3.1.11c}$$

当 $g(x)$ 有 $n$ 个零点 $x_n$ 时, 显然应有

$$\delta[g(x)] = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x-x_n) \tag{3.1.11d}$$

**例 3.1.1** 在无限大区域上 $-\infty<x<+\infty$, 下式成立

$$\delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k\pi) \tag{3.1.12a}$$

**例 3.1.2** 在 $(\vartheta,\vartheta')\in(0,\pi)$ 上, 方程 $\cos\vartheta-\cos\vartheta'=0$ 只有一个根, 即 $\vartheta=\vartheta'$, 故

$$\delta(\cos\vartheta-\cos\vartheta') = \frac{1}{\sin\vartheta}\delta(\vartheta-\vartheta') \tag{3.1.12b}$$

在实际问题的运算中, 总把 Dirac Delta 函数视作具有下列性质的 "经典函数"

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\begin{cases}0, \ \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0\\ \infty, \ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0\end{cases};\quad \int_G\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}1, \ \boldsymbol{r}\in G\\ 0, \ \boldsymbol{r}\notin G\end{cases}\tag{3.1.13a}$$

或者

$$\int_G f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}f(\boldsymbol{r}_0), & \boldsymbol{r}_0\in G\\ 0, & \boldsymbol{r}_0\notin G\end{cases}\tag{3.1.13b}$$

对一维情况, 上式为

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0)\tag{3.1.14a}$$

注意: 这里假定 $f(x)$ 是连续函数, 如果 $f(x)$ 在 $x_0$ 存在间断 (如图 3.1.2), 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]\tag{3.1.14b}$$

证明: 把函数 $f(x)$ 表示成

$$f(x)=f_c(x)+hH(x-x_0)\tag{3.1.15a}$$

其中 $h=f(x_0+0)-f(x_0-0)$, $H(x-x_0)$ 是 Heaviside 函数, 见 3.1.2 小节的式 (3.1.17a), $f_c(x)$ 在 $x_0$ 点连续, 由式 (3.1.14a)

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f_c(x_0)+h\int_{-\infty}^{\infty}H(x-x_0)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x\tag{3.1.15b}$$

由 3.1.2 小节的式 (3.1.17c), 上式右边积分可化成

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}H(x-x_0)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{+\infty}H(x-x_0)\frac{\mathrm{d}H(x-x_0)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\ H^2(x-x_0)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{2}\end{aligned}\tag{3.1.15c}$$

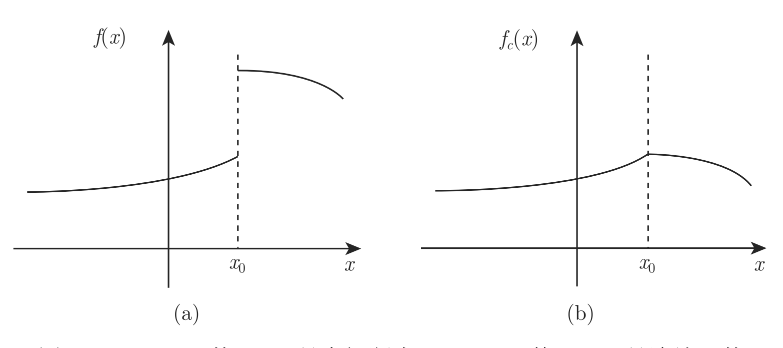



图 3.1.2 (a) 函数 $f(x)$ 具有间断点 $x_0$; (b) 函数 $f_c(x)$ 是连续函数

代入式 (3.1.15b) 并且注意到 $f_c(x_0) = f(x_0 - 0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = f_c(x_0) + \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)] \tag{3.1.15d}$$

得证!

### 3.1.2 广义函数的导数

为了引进广义函数的导数, 先考虑经典的连续可微函数 $f(x)$, 由式 (3.1.5a) 并利用 $\psi$ 的性质: $\psi$ 及其任意导数在某有界闭域外恒为零

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \psi\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\psi(x)dx = f(x)\psi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi'(x)\mathrm{d}x = (f, -\psi')\end{aligned} \tag{3.1.16a}$$

当 $f(x)$ 不是经典函数时, 根据上式作推广: 定义 $D'$ 中任一广函 $f$, 其导数 $f'$ 定义为广函

$$(f', \psi) = -(f, \psi') \tag{3.1.16b}$$

在 $n$ 维空间, 可定义广函 $f$ 的高阶偏导数

$$(D^\alpha f, \psi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \psi) \tag{3.1.16c}$$

其中

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \tag{3.1.16d}$$

由于检验函数 $\psi$ 无穷可微, 因此广义函数 $f$ 无穷可微. 显然, 当 $f(x)$ 连续可微时, $f(x)$ 作为广函而言, 其广义导数与经典导数一致. 但当 $f(x)$ 是不可导的局部可积函数时, $f(x)$ 作为广函而言, 仍有任意阶偏导数. 由于对 $\psi$ 的偏导可交换次序, 故对广函的偏导也可交换次序.

**例 3.1.3** 在广函意义下, 求 Heaviside 函数的导数

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{3.1.17a}$$

当 $x = 0$ 时,$H(x)$ 不连续, 故 $H(x)$ 在 $x = 0$ 处无经典导数. 但作为广函

$$[H'(x), \psi(x)] = -\int_0^{\infty} \psi'(x)\mathrm{d}x = -\psi(x)|_0^{\infty} = \psi(0) = [\delta(x), \psi] \tag{3.1.17b}$$

因此

$$H'(x) = \delta(x) \tag{3.1.17c}$$

**例 3.1.4** 计算广函 $\delta(x-a)$ 的导数

$$[\delta'(x-a),\psi(x)]=-[\delta(x-a),\psi'(x)]=-\psi'(a) \tag{3.1.18a}$$

一般有

$$[\delta^{(k)}(x-a),\psi(x)]=(-1)^k\psi^{(k)}(a) \tag{3.1.18b}$$

可见 Dirac Delta 函数的导数只能用泛函来表示, 而 $H(x)$ 的导数可用 $\delta$ 函数写成显式. 形式上, Dirac Delta 函数的导数可表示成微分算子

$$\frac{\mathrm{d}\delta(x-a)}{\mathrm{d}x}=-\delta(x-a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{3.1.18c}$$

**例 3.1.5** 在广函导数意义下计算 $\nabla^2(1/r)$, 其中 $r^2=x^2+y^2+z^2$. 由式 (3.1.16c)

$$\left(\nabla^2\frac{1}{r},\psi\right)=\left(\frac{1}{r},\nabla^2\psi\right)=\int\frac{\nabla^2\psi}{r}\mathrm{d}\tau=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r\geqslant\varepsilon}\frac{\nabla^2\psi}{r}\mathrm{d}\tau \tag{3.1.19a}$$

其中最后一步是为了挖去奇点 $r=0$. 由于 $\psi$ 对某一个 $\alpha$, 当 $r\geqslant\alpha$ 时恒为零, 应用 Green 公式

$$\int_{r\geqslant\varepsilon}\frac{\nabla^2\psi}{r}\mathrm{d}\tau=\int_{r\geqslant\varepsilon}\psi\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}\tau-\iint_{r=\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{1}{r}\mathrm{d}S+\iint_{r=\varepsilon}\psi\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\mathrm{d}S \tag{3.1.19b}$$

当 $r\geqslant\varepsilon$ 时, 直接计算表明 $\nabla^2(1/r)=0$, 而沿球面 $r=\varepsilon$ 的积分可估计如下

$$\begin{aligned}&\left|\iint_{r=\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{1}{r}\mathrm{d}S\right|=\max\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|\right)\frac{1}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2=O(\varepsilon)\\&\iint_{r=\varepsilon}\psi\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\mathrm{d}S=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{r=\varepsilon}\psi\mathrm{d}S=-4\pi S_\varepsilon(\psi)\end{aligned} \tag{3.1.19c}$$

其中因为 $\psi$ 是试验函数, $\partial\psi/\partial r$ 有界, $S_\varepsilon(\psi)$ 为 $\psi$ 在球面 $r=\varepsilon$ 上的中值, 当 $\varepsilon\to 0$ 时 $S_\varepsilon(\psi)=\psi(0)$, 代入式 (3.1.19a) 和 (3.1.19b) 得

$$\left(\nabla^2\frac{1}{r},\psi\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r\geqslant\varepsilon}\frac{\nabla^2\psi}{r}\mathrm{d}\tau=-4\pi\psi(0)=-4\pi(\delta,\psi) \tag{3.1.20a}$$

故在广函意义下

$$-\nabla^2\frac{1}{4\pi r}=\delta(\boldsymbol{r}) \tag{3.1.20b}$$

**例 3.1.6** 不连续函数的导数, 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有跃变

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x<x_0\\ f_2(x), & x>x_0\end{cases} \tag{3.1.21a}$$

由式 (3.1.16b)

$$
\begin{aligned}
(f',\psi) &= -(f,\psi') = -\int_{-\infty}^{x_0-0} f(x)\psi'(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0+0}^{\infty} f(x)\psi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -f(x)\psi(x)|_{-\infty}^{x_0-0} - f(x)\psi(x)|_{x_0+0}^{\infty} \\
&\quad + \int_{-\infty}^{x_0-0} f'(x)\psi(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+0}^{\infty} f'(x)\psi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{3.1.21b}
$$

合并后得到

$$
(f',\psi) = [f_2(x_0) - f_1(x_0)]\psi(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\psi(x)\mathrm{d}x \tag{3.1.21c}
$$

上式中积分号下 $f'(x)$ 表示对 $x \neq x_0$ 处求导, 由于 $f'(x)$ 在 $x_0$ 点的左导数和右导数为有限值, 故 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 的值对积分不作贡献, 因此

$$
(f',\psi) = [f_2(x_0) - f_1(x_0)][\delta(x-x_0),\psi] + [f'(x),\psi(x)] \tag{3.1.21d}
$$

因此

$$
f'(x) = [f_2(x_0) - f_1(x_0)]\delta(x-x_0) + \begin{cases} f_1'(x), & x < x_0 \\ f_2'(x), & x > x_0 \end{cases} \tag{3.1.21e}
$$

式 (3.1.17c) 为特殊情况：$f_2(x_0) - f_1(x_0) = 1$ 和 $f_1'(x) = 0,\ f_2'(x) = 0$, 故 $H'(x) = \delta(x)$.

**例 3.1.7**　求下列函数的导数

$$
\ln x = \begin{cases} \ln|x|, & x > 0 \\ \ln(-|x|) = \pm\mathrm{i}\pi + \ln|x|, & x < 0 \end{cases} \tag{3.1.22a}
$$

由式 (3.1.21e) 得

$$
\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \mp \mathrm{i}\pi\delta(x) \tag{3.1.22b}
$$

另一方面

$$
\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{d}\ln(x \pm \mathrm{i}\varepsilon)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x \pm \mathrm{i}\varepsilon} \tag{3.1.22c}
$$

故形式上我们有

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x \pm \mathrm{i}\varepsilon} = \frac{1}{x} \mp \mathrm{i}\pi\delta(x) \tag{3.1.22d}
$$

**例 3.1.8**　考虑函数 $G(x,x')$ 满足的二阶微分方程

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\right] = -\delta(x,x') + q(x)G(x,x') \tag{3.1.23a}
$$

把 $p(x)G'(x,x')$ 看作 $f(x)$, 比较式 (3.2.21d), 则应有

$$\left.\frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'+0}-\left.\frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'-0}=-\frac{1}{p(x')} \tag{3.1.23b}$$

**封闭关系** 设 $\{\psi_n(\boldsymbol{r}),\rho(\boldsymbol{r})\}$ 是定义在 $G$ 上的 Hermite 算子 $\boldsymbol{L}$ 的正交、完备本征函数系. 在广函意义下展开式成立

$$\frac{\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r})}=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.1.24a}$$

上式称为**封闭关系**, 一个完备的函数系, 必须满足封闭关系. 证明：上式右边取复共轭, 然后乘以试验函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $\rho(\boldsymbol{r})$ 并积分得到

$$\begin{aligned}\int_G\left[\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(\boldsymbol{r}')\psi_n^*(\boldsymbol{r})\right]\rho(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau&=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(\boldsymbol{r}')\int_G\rho(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(\psi_n,\psi)\psi_n(\boldsymbol{r}')\end{aligned} \tag{3.1.24b}$$

另一方面, 试验函数 $\psi(\boldsymbol{r}')$ 也用 $\{\psi_n(\boldsymbol{r}')\}$ 展开得到

$$\psi(\boldsymbol{r}')=\sum_{n=0}^{\infty}(\psi_n,\psi)\psi_n(\boldsymbol{r}') \tag{3.1.24c}$$

比较式 (3.1.24b) 与上式, 得到

$$\int_G\left[\sum_{n=0}^{\infty}\rho(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r}')\psi_n^*(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=\psi(\boldsymbol{r}') \tag{3.1.24d}$$

二边取复共轭且根据 Dirac Delta 函数的定义, 即在广函意义下

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.1.24e}$$

于是, 方程 (3.1.24a) 成立. 注意：如果算子 $\boldsymbol{L}$ 的谱由有限个离散谱和连续谱构成, 则离散谱的本征函数和连续谱本征函数合在一起, 才能构成完备系, 封闭关系为

$$\frac{\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r})}=\sum_{n=0}^{N}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})+\int\psi_\nu^*(\boldsymbol{r}')\psi_\nu(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\nu \tag{3.1.24f}$$

其中 $N$ 是离散谱个数, 例如 2.6.2 小节中式 (2.6.21a).

### 3.1.3　广义函数的 Fourier 变换

首先, 考虑经典函数 $f(\boldsymbol{r})$, 设 $f(\boldsymbol{r})$ 的 Fourier 积分存在

$$\Im f=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int f(\boldsymbol{t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t}}\mathrm{d}^n\boldsymbol{t} \tag{3.1.25a}$$

其中 $n$ 为空间的维数, 于是

$$\begin{aligned}(\Im f,\psi)&=\int\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int f(\boldsymbol{t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t}}\mathrm{d}^n\boldsymbol{t}\right]\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}\\&=\int f(\boldsymbol{t})\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t}}\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}\right]\mathrm{d}^n\boldsymbol{t}=(f,\Im\psi)\end{aligned} \tag{3.1.25b}$$

其中 $\Im\psi$ 为检验函数的 Fourier 变换

$$\Im\psi=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t}}\mathrm{d}^n\boldsymbol{r} \tag{3.1.25c}$$

于是, 对一般的广函 $f$ , 可以定义其 Fourier 变换为广函 $\Im f$

$$(\Im f,\psi)=(f,\Im\psi) \tag{3.1.25d}$$

但上式存在一个基本问题: 即 $D$ 中试验函数 $\psi$ 的 Fourier 变换 $\Im\psi$ 不一定属于 $D$. 因此 $\Im\psi$ 不一定都可作为 $D$ 中的试验函数. 于是, 在 $D$ 上定义广函 $f$ 的 Fourier 变换显然是不恰当的, 必须寻找新的函数空间, 这个函数空间中的函数必须有这样的性质

(1) 首先是其 Fourier 变换仍属这个空间, 这样就可以由式 (3.1.25c) 定义广函的 Fourier 变换;

(2) 同定义在 $D$ 上的广函一样, 定义在这个空间上的广函必须具有诸如无穷可微, 求极限与求导可变换次序等性质.

我们发现由速降函数组成的空间 $L(R^n)$ 中的函数具有这样好的性质. 显然 $D(R^n)$ 是 $L(R^n)$ 的一个子空间

$$L(R^n)\supset D(R^n) \tag{3.1.26a}$$

这是因为 $D$ 中的元素总可视为速降函数. 因此, 我们定义 $L(R^n)$ 上的广函 $f$ 的 Fourier 变换为广函 $\Im f$

$$(\Im f,\psi)=(f,\Im\psi),\ \forall\psi\in L(R^n) \tag{3.1.26b}$$

因速降函数 $\psi$ 的 Fourier 变换 $\Im\psi$ 仍是速降函数, 故 $\Im\psi$ 仍是试验函数. 因此式 (3.1.26b) 右边确实能定义一个广函, 这个广函即是 $f$ 的 Fourier 变换.

**例 3.1.9** 求 $\delta(x-a)$ 的 Fourier 变换. 因为

$$\begin{aligned}(\Im\delta,\psi) &= [\delta(x-a),\Im\psi] = \left[\delta(x-a),\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\psi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\psi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi},\psi)\end{aligned} \tag{3.1.27a}$$

故

$$\Im[\delta(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi} \tag{3.1.27b}$$

**例 3.1.10** 求 $f(\boldsymbol{r})=1$ 的 Fourier 变换. 根据经典的 Fourier 变换理论, $f(\boldsymbol{r})=1$ 的 Fourier 变换不存在, 但在广函意义下则存在. 记 $\Im\psi=\chi$, 则 $\Im^{-1}\chi=\psi$

$$\begin{aligned}[\Im(1),\psi] &= (1,\Im\psi) = (1,\chi) = \int\chi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \\ &= (2\pi)^{n/2}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\chi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\end{aligned} \tag{3.1.28a}$$

因

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \Im^{-1}\chi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\chi(\boldsymbol{t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{t} \tag{3.1.28b}$$

故

$$\psi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\chi(\boldsymbol{t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot\boldsymbol{t}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{t} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\chi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{3.1.28c}$$

于是

$$[\Im(1),\psi] = (2\pi)^{n/2}\psi(0) = (2\pi)^{n/2}[\delta(\boldsymbol{r}),\psi] \tag{3.1.29a}$$

因此有

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\Im(1) \tag{3.1.29b}$$

对一维情况, 上式为

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{3.1.29c}$$

**例 3.1.11** 在广函意义下求 $\sin ax$ 的 Fourier 变换. 因 $\sin ax = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})/2\mathrm{i}$, 故只要讨论 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$ 即可. 记 $\chi=\Im\psi$ 和 $\psi=\Im^{-1}\chi$

$$\begin{aligned}(\Im\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax},\psi) &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax},\Im\psi) = \int\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\chi(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}(\Im^{-1}\chi)|_a \\ &= \sqrt{2\pi}\psi(a) = \sqrt{2\pi}[\delta(\xi-a),\psi]\end{aligned} \tag{3.1.30a}$$

其中 $(\Im^{-1}\chi)|_a$ 表示在 $a$ 点取值, 故 $\Im(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax})=\sqrt{2\pi}\delta(\xi-a)$, 从而

$$\Im(\sin ax) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\xi-a)-\delta(\xi+a)] \tag{3.1.30b}$$

同理可求得

$$\Im(\cos ax)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\xi-a)+\delta(\xi+a)] \tag{3.1.30c}$$

**例 3.1.12** 求 Heaviside 函数 (式 (3.1.17a)) 的 Fourier 变换. 注意到符号函数

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases} \tag{3.1.31a}$$

Heaviside 函数可表示为

$$H(x)=\frac{1}{2}[1+\mathrm{sgn}(x)] \tag{3.1.31b}$$

由关系 $\Im(1)=\sqrt{2\pi}\delta(x)$, 对上式二边作 Fourier 变换得到

$$\Im[H(x)]=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2\pi}\delta(x)+\Im[\mathrm{sgn}(x)]\right\} \tag{3.1.32a}$$

利用积分关系

$$\mathrm{sgn}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases} \tag{3.1.32b}$$

改写为

$$\mathrm{sgn}(x)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{i}\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}}{\omega}\mathrm{d}\omega\right)=\begin{cases}+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases} \tag{3.1.32c}$$

因此

$$\Im[\mathrm{sgn}(x)]=\frac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{i}\pi}\cdot\frac{1}{\omega} \tag{3.1.33a}$$

代入方程 (3.1.32a) 得到

$$\Im[H(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\right] \tag{3.1.33b}$$

**广函 Fourier 变换的基本性质** 与经典函数的基本类似 (证明略)

(1) 线性变换

$$\Im[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]=c_1\Im[f_1(x)]+c_2\Im[f_2(x)] \tag{3.1.34a}$$

(2) 时移性质

$$\Im[f(x-x_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}\Im[f(x)] \tag{3.1.34b}$$

(3) 卷积定理

$$\begin{aligned}\Im[f(x)*g(x)]&=\sqrt{2\pi}\Im[f(x)]\Im[g(x)]\\ \Im[f(x)g(x)]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Im[f(x)]*\Im[g(x)]\end{aligned}\tag{3.1.34c}$$

(4) 微分性质

$$\Im[f'(x)]=\mathrm{i}\omega\Im[f(x)]\tag{3.1.34d}$$

(5) 积分性质

$$\Im\left[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\Im[f(x)]+\pi\left.\Im[f]\right|_{\omega=0}\delta(\omega)\tag{3.1.35a}$$

这是与经典函数的 Fourier 变换唯一存在区别的性质. 证明：把积分表示成

$$\int_{-\infty}^{x}f(\xi)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)H(x-\xi)\mathrm{d}x\tag{3.1.35b}$$

二边作 Fourier 变换并且利用卷积定理 (方程 (3.1.34c) 的第一式)

$$\Im\left[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)\mathrm{d}x\right]=\sqrt{2\pi}\Im[f(x)]\cdot\Im[H(x)]\tag{3.1.35c}$$

利用式 (3.1.33b)

$$\begin{aligned}\Im\left[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]&=\sqrt{2\pi}\Im[f(x)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\right]\\ &=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\Im[f(x)]+\pi\Im[f]_{\omega=0}\delta(\omega)\end{aligned}\tag{3.1.36a}$$

得证. 因为

$$\lim_{\omega\to0}\Im[f(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\omega\to0}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\mathrm{d}\xi\tag{3.1.36b}$$

为平均值, 故如果函数的平均值为零, 即 $\left.\Im[f]\right|_{\omega=0}=\lim\limits_{\omega\to0}\Im[f(x)]=0$, 那么广函 Fourier 变换的积分性质与经典函数一样!

### 3.1.4 弱收敛、弱解和 Dirac Delta 函数序列

给定 $D$ 上的广函序列, 当有

$$\lim_{k\to\infty}(f_k,\psi)=(f,\psi),\ \forall\psi\in D\tag{3.1.37a}$$

我们说广函序列**弱收敛**到 $f$, 如果 $\{f_k\}$ 收敛到 Dirac Delta 函数

$$\lim_{k\to\infty}(f_k,\psi)=(\delta,\psi)=\psi(0),\ \forall\psi\in D\tag{3.1.37b}$$

称序列弱收敛到 Dirac Delta 函数.

在广函意义下, 如果 $\{f_k\}$ 弱收敛到 $f$, 微分和极限运算能交换次序

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{3.1.38a}$$

事实上, 对任意检验函数 $\psi$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i},\psi\right)=-\lim_{k\to\infty}\left(f_k,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) \tag{3.1.38b}$$

因为 $\{f_k\}$ 弱收敛到 $f$, 故

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i},\psi\right)=-\lim_{k\to\infty}\left(f_k,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)=-\left(f,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_i},\psi\right) \tag{3.1.38c}$$

得到方程 (3.1.38a).

**例 3.1.13**　分析 Fourier 级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \tag{3.1.39a}$$

其中 $f(x)=(\pi-x)/2$(当 $0<x<2\pi$), 且 $f(x)$ 以 $2\pi$ 为周期, 如图 3.1.3 所示. 令

$$f_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{\sin nx}{n} \tag{3.1.39b}$$

则

$$\frac{\partial f_k}{\partial x}=\sum_{n=1}^{k}\cos nx \tag{3.1.39c}$$

而另一方面, 利用式 (3.1.21e) 直接得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{2}+\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi n) \tag{3.1.40a}$$

故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx=-\frac{1}{2}+\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi n) \tag{3.1.40b}$$

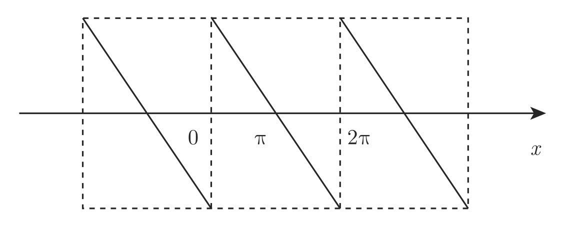



图 3.1.3　$f(x)$ 的周期为 $2\pi$

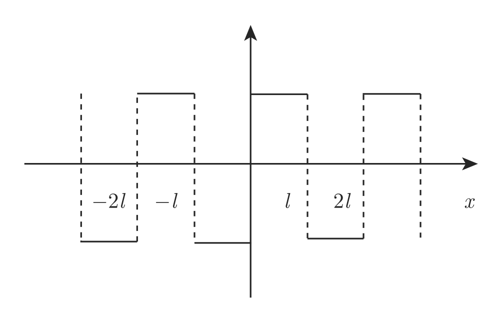



图 3.1.4 $f(x)$ 的周期为 $2l$

**例 3.1.14** 考虑波动方程混合问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ x\in(0,l),\ t>0\\ u(0,t)=u(l,t)=0,\ t>0\\ u(x,0)=1;\ u_t(x,0)=0,\ x\in(0,l)\end{gathered}\tag{3.1.41a}$$

形式解为

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{kc\pi t}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\tag{3.1.41b}$$

其中

$$a_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{8l}}{k\pi},\ k=2n-1\\[2ex] 0,\ k=2n\end{cases}\tag{3.1.41c}$$

因此

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{l}(x+ct)\right]\\ &+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{l}(x-ct)\right]\end{aligned}\tag{3.1.41d}$$

上式的物理很明显, 表示一个向左, 一个向右的二个传播波. 显然式 (3.1.41d) 不可能是方程 (3.1.41a) 的古典解. 事实上, 只要看式 (3.1.41d) 在 $t=0$ 时情形

$$u(x,0)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{l}x\right]\tag{3.1.42a}$$

上式右边是函数 $f(x)=1,\ x\in[0,l]$ 作奇延拓情形的 Fourier 展式, 在 $x=0$ 和 $l$ 点只能收敛到零, 不可能为 1, 如图 3.1.4. 此外, 式 (3.1.41d) 右边在古典意义下, 求导和求和不能交换, 但在广义导数意义下导数总存在, 并且求导和求和能交换. 为了考

察这点, 令 $f(x)$ 的奇延拓函数为 $F(x)$, $F(x)$ 在 $x=\pm nl$ 处有跃变, 则式 (3.1.41d) 可表示成

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[F(x+ct)+F(x-ct)] \tag{3.1.42b}$$

于是有

$$\frac{\partial F(x+ct)}{\partial x}=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x+ct-nl)=\frac{4}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{l}(x+ct)\right] \tag{3.1.42c}$$

由上可看出, 只有在广函意义下, $u(x,t)$ 的导数才存在. 因此, 式 (3.1.41d) 可看作定解问题在广函意义下的解, 故是一种广义解 (注意：本例也可以定义基于函数序列收敛的广义解, 即强解).

**广义解和弱解** 下面给出广函意义下微分方程

$$\boldsymbol{L}u=f \tag{3.1.43a}$$

广义解的严格定义. 对 $D$ 中每个元素 $\psi$, 如果存在广函 $u\in D'$ 和 $f\in D'$ 满足

$$(\boldsymbol{L}u,\psi)=(f,\psi),\ \forall\psi\in D \tag{3.1.43b}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 对 $u$ 的所有导数都是在广函意义下的导数, 那么称 $u$ 是方程 (3.1.43a) 在广函意义下的**广义解**. 根据共轭算子 $\boldsymbol{L}^{+}$ 的定义, 把上式写成

$$(u,\boldsymbol{L}^{+}\psi)=(f,\psi) \tag{3.1.43c}$$

如果把式中的线性泛函定义成 Hibert 空间的内积, 则对 Hilbert 空间的矢量 $u$ 和 $f$, $(u,\boldsymbol{L}^{+}\psi)$ 和 $(f,\psi)$ 都存在. 因此, 可用式 (3.1.43c) 定义方程 (3.1.43a) 的广义解: 对 $D$ 中每个元素 $\psi$, 如果存在 $u\in L^2$ 和 $f\in L^2$ 满足式 (3.1.43c), 那么, 我们称 $u$ 是方程 (3.1.43a) 的广义解, 这种广义解称为**弱解**(注意：与 1.1.1 小节中强解的区别).

因为 $u\in L^2$ 和 $f\in L^2$ 一定是广义函数, 但反过来, 广义函数不一定平方可积. 因此, 由式 (3.1.43c) 定义的弱解一定是由式 (3.1.43b) 定义的广义解, 反之不一定成立. 但我们更感兴趣的是平方可积函数, 即方程 (3.1.43a) 的弱解 (4.2 节将进一步的讨论).

**Dirac Delta 函数序列** 存在多个弱收敛到 Dirac Delta 函数的序列, 最简单的例子是

$$f_k(x)=\begin{cases}k/2, & |x|<1/k\\ 0, & |x|>1/k\end{cases} \tag{3.1.44a}$$

显然有

$$
\begin{aligned}
(f_k, \psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \frac{k}{2}\int_{-1/k}^{1/k} \psi(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{k}{2}\psi(\bar{x})\int_{-1/k}^{1/k} \mathrm{d}x = \psi(\bar{x})
\end{aligned}
\tag{3.1.44b}
$$

其中 $\psi(\bar{x})$ 是 $x \in (-1/k, +1/k)$ 的平均值. 当 $k \to \infty$ 时, $\psi(\bar{x}) = \psi(0)$ 故

$$
\lim_{k\to\infty} (f_k, \psi) = \psi(0) \tag{3.1.44c}
$$

于是有 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = \delta(x)$.

说明: 证明一个序列是否弱收敛到 Dirac Delta 函数, 只要证明序列 $\{\delta_K\}$ 满足

$$
\lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_K(t)\mathrm{d}t = 1;\quad \lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\delta_K(t)\mathrm{d}t = \psi(0) \tag{3.1.45a}
$$

由于 $\lim\limits_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_K(t)\psi(0)\mathrm{d}t = \psi(0)$, 与上式中的第二式相减得到

$$
\lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\psi(t) - \psi(0)]\delta_K(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{3.1.45b}
$$

故证明上式等价于证明方程 (3.1.45a) 的二个式子. 下面给出经常用到的 4 个收敛到 $\delta$ 函数的序列.

**sinc 函数序列** 如图 3.1.5

$$
\delta(t) = \lim_{K\to\infty} \delta_K(t) = \lim_{K\to\infty} \frac{\sin Kt}{\pi t} \tag{3.1.46a}
$$

证明: 显然

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \delta_K(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Kt}{\pi t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t'}{t'}\mathrm{d}t' = 1 \tag{3.1.46b}
$$

又

$$
\begin{aligned}
\lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\delta_K(t)\mathrm{d}t &= \lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t'}{K}\right)\frac{\sin t'}{\pi t'}\mathrm{d}t' \\
&= \psi(0)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t'}{\pi t'}\mathrm{d}t' = \psi(0)
\end{aligned}
\tag{3.1.46c}
$$

由方程 (3.1.45c), 序列 $\delta_K(t)$ 收敛到 Dirac Delta 函数.

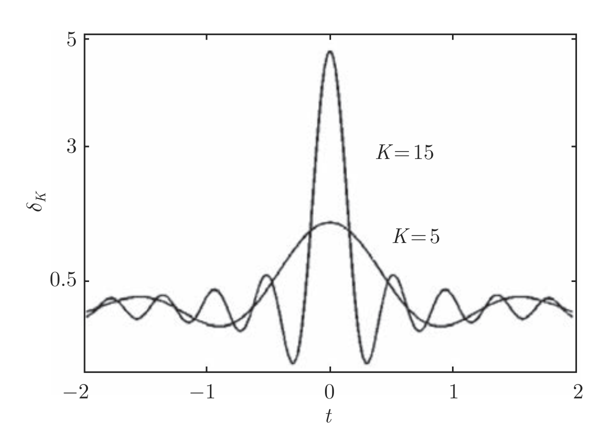



图 3.1.5　不同 $K$ 值的 sinc 函数

**Lorentz 函数序列**　如图 3.1.6

$$\delta(t)=\lim_{a\to 0}\delta_a(t)=\frac{1}{\pi}\lim_{a\to 0}\frac{a}{a^2+t^2} \tag{3.1.47a}$$

证明：显然

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+t^2}\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{t}{a}\right)\bigg|_0^{\infty}=1 \tag{3.1.47b}$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\delta_a(t)\mathrm{d}t&=\frac{1}{\pi}\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(at')\frac{1}{1+t'^2}\mathrm{d}t'\\&=\psi(0)\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t'^2}\mathrm{d}t'=\psi(0)\end{aligned} \tag{3.1.47c}$$

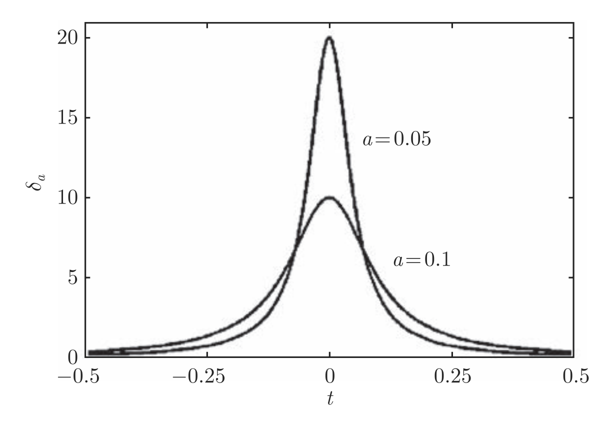



图 3.1.6　不同 $a$ 值的 Lorentz 函数

由方程 (3.1.45a), 序列 $\delta_a(t)$ 收敛到 Dirac Delta 函数;

**热扩散核函数序列** 如图 3.1.7

$$\delta(x)=\lim_{t\to0}\delta_t(x)=\lim_{a\to0}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \tag{3.1.48a}$$

证明：显然

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_t(x)\mathrm{d}t&=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\exp(-y^2)\mathrm{d}y=1\end{aligned} \tag{3.1.48b}$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\delta_t(x)\mathrm{d}x&=\lim_{t\to0}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)^2\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{t\to0}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sqrt{4t}y)\exp(-y^2)\mathrm{d}y\\&=\psi(0)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y^2)\mathrm{d}y=\psi(0)\end{aligned} \tag{3.1.48c}$$

由方程 (3.1.45a), 序列 $\delta_t(x)$ 收敛到 Dirac Delta 函数;

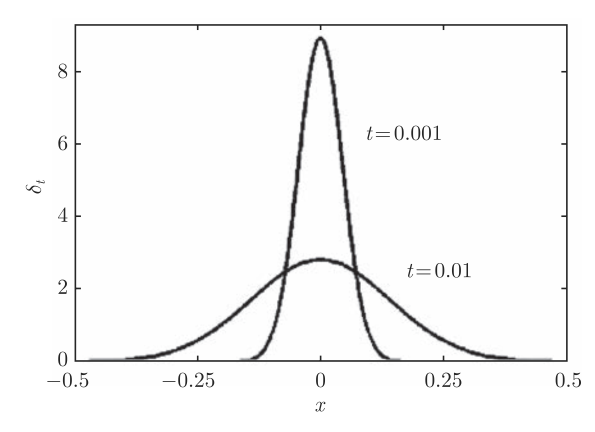



图 3.1.7 不同 $t$ 值的热扩散核函数

注意: 在式 (3.1.46c), (3.1.47c) 和 (3.1.48c) 中, 积分与求极限交换了次序, 故证明是不严格的. 严格的证明需利用方程 (3.1.45b), 下面给出一个例子.

**Poisson 核函数序列** 如图 3.1.8

$$\delta(\vartheta)=\lim_{a\to1}\delta_a(\vartheta)=\lim_{a\to1}\frac{1}{2\pi}\frac{1-a^2}{1-2a\cos\vartheta+a^2} \tag{3.1.49a}$$

证明：利用 Fourier 级数展开

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\vartheta-\varphi)+a^2}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\cos(k\vartheta),\ (a<1) \tag{3.1.49b}$$

显然

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta_a(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\cos(k\vartheta)\right]\mathrm{d}\vartheta\\&=1+\frac{1}{2\pi}\left[2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(k\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right]=1\end{aligned} \tag{3.1.49c}$$

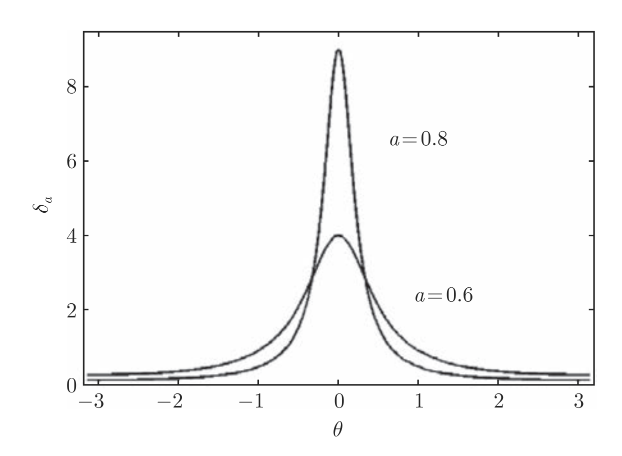



图 3.1.8　不同 $a$ 值的 Poisson 核函数

又

$$\begin{aligned}I_a&\equiv\left|\int_{-\pi}^{+\pi}[\psi(\vartheta)-\psi(0)]\delta_a(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right|\\&=\frac{1-a^2}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\psi(\vartheta)-\psi(0)}{1-2a\cos\vartheta+a^2}\mathrm{d}\vartheta\right|\end{aligned} \tag{3.1.50a}$$

由图 3.1.8 可见：当 $a\to 1$ 时, 积分主要是 $\vartheta=0$ 附近的贡献, 其他部分由于 $a\to 1$ 而为 0, 因此

$$\begin{aligned}I_a&=\frac{1-a^2}{2\pi}\left|\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{\psi(\vartheta)-\psi(0)}{1-2a\cos\vartheta+a^2}\mathrm{d}\vartheta\right|\\&\leqslant\frac{1-a^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}\left|\frac{\psi(\vartheta)-\psi(0)}{\sin\vartheta}\right|\cdot\frac{|\sin\vartheta|}{1-2a\cos\vartheta+a^2}\cdot|\mathrm{d}\vartheta|\end{aligned} \tag{3.1.50b}$$

注意到：当 $|\vartheta|<\pi/2$ 时, $|\sin\vartheta|>2|\vartheta|/\pi$, 上式右边进一步放大, 且扩大积分区域

$$\begin{aligned}I_a&\leqslant\frac{1-a^2}{4}\int_{-\delta}^{+\delta}\left|\frac{\psi(\vartheta)-\psi(0)}{\vartheta}\right|\cdot\frac{|\sin\vartheta|}{|1-2a\cos\vartheta+a^2|}\cdot|\mathrm{d}\vartheta|\\&\leqslant\frac{1-a^2}{2}|\max[\psi'(\vartheta)]|\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta}{1-2a\cos\vartheta+a^2}\mathrm{d}\vartheta\\&\sim|\max[\psi'(\vartheta)]|(1-a)\ln(1-a)\end{aligned}\tag{3.1.50c}$$

当取 $a\to1$ 时, 上式右边极限为零, 于是

$$\lim_{a\to1}\int_{-\pi}^{+\pi}[\psi(\vartheta)-\psi(0)]\delta_a(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta=0\tag{3.1.50d}$$

由方程 (3.1.45b), 序列 $\delta_a(\vartheta)$ 收敛到 Dirac Delta 函数. 注意: 角度定义为 $\vartheta\in[-\pi,\pi]$, 否则, 当 $a=1$ 时, 在 0 和 $2\pi$ 二点出现无限大.

注意: 在 1.4.3 小节中, 由图 1.4.1 和式 (1.4.21c), 当 $t\to0$ 时, 并不是 $\lim\limits_{t\to0}G_s(x,t)\to\infty$(当 $x\to0$ 时), 而是等幅震荡函数 (见关于式 (1.4.21c) 的讨论).

### 3.1.5 曲线坐标中的 Dirac Delta 函数

在直角坐标系中, 二维或三维 Dirac Delta 函数定义为

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)&=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\\\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)&=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\end{aligned}\tag{3.1.51a}$$

根据 Dirac Delta 函数定义式 (3.1.6a), 直角坐标系中的三维推广为

$$\int_V\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\psi(x,y,z)\mathrm{d}\tau=\psi(x_0,y_0,z_0)\tag{3.1.51b}$$

其中 $\mathrm{d}\tau$ 是体积元, $V$ 是 $(x,y,z)$ 坐标空间中包含点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的体积, 故 $\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$. 注意：不能简单看作坐标分离！在曲线坐标系

$$x=x(q_1,q_2,q_3);y=y(q_1,q_2,q_3);z=z(q_1,q_2,q_3)\tag{3.1.52a}$$

体积元的变化为

$$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x=|J|\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3\tag{3.1.52b}$$

其中 $J$ 是变换的 Jacobi 矩阵. 根据 Dirac Delta 函数定义, 在曲线坐标系应该有

$$\int_U\delta(q_1-q_0^1)\delta(q_2-q_0^2)\delta(q_3-q_0^3)\psi(q_1,q_2,q_3)\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3=\psi(q_0^1,q_0^2,q_0^3)\tag{3.1.52c}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}_0(q_0^1,q_0^2,q_0^3)$, $U$ 是 $(q_1,q_2,q_3)$ 坐标空间中包含点 $(q_0^1,q_0^2,q_0^3)$ 的体积. 利用式 (3.1.52b), 上式改写成对体积元 $d\tau$ 的积分

$$\int_U \frac{\delta(q_1-q_0^1)\delta(q_2-q_0^2)\delta(q_3-q_0^3)}{|J|}\psi(q_1,q_2,q_3)\mathrm{d}\tau=\psi(q_0^1,q_0^2,q_0^3) \tag{3.1.52d}$$

比较上式与式 (3.1.51b), 可知 Dirac Delta 函数在直角坐标系与曲线坐标系的变换关系为

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)=\frac{\delta(q_1-q_0^1)\delta(q_2-q_0^2)\delta(q_3-q_0^3)}{|J|} \tag{3.1.53a}$$

或者写成

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{\delta(q_1-q_0^1)\delta(q_2-q_0^2)\delta(q_3-q_0^3)}{|J|} \tag{3.1.53b}$$

其中 Jacobi 矩阵

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}\neq 0 \tag{3.1.53c}$$

在 $J=0$ 的点, 式 (3.1.53a) 不成立 (见下面讨论).

**圆柱坐标** $x=\rho\cos\varphi; y=\rho\sin\varphi; z=z$, 容易计算出

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)}=\rho \tag{3.1.54a}$$

故在圆柱坐标系内 Delta 函数的表示为

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)}{\rho} \tag{3.1.54b}$$

当 $\rho_0>0(J\neq 0)$ 时, $(x_0,y_0,z_0)$ 与 $(\rho_0,\varphi_0,z_0)$ 一一对应, 上式成立; 但当 $\rho_0=0$(原点或者 $z$ 轴上) 时, 方位角 $\varphi_0$ 没有意义! 此时的 Dirac Delta 函数应该如何表示? 设想在轴上 $z=z_0$ 处的一个圆环 (环面平行于 $xy$ 平面), 其半径为 $\rho_0$, 单位强度的点源均匀分布在环上, 求出这个圆环源的 Dirac Delta 函数表示后, 令 $\rho_0\to 0$, 圆环收缩到 $z$ 轴上一点, 于是就得到 $z$ 轴上点源的表示. 圆环上 $\varphi_0\to\varphi_0+\Delta\varphi_0$ 一段占有的 “强度” 为 $\Delta\varphi/2\pi$, 用 Dirac Delta$\delta$ 函数表示这部分 “强度” 就是

$$\frac{\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)}{\rho}\frac{\Delta\varphi_0}{2\pi} \tag{3.1.55a}$$

故整个圆环的 “强度” 为

$$\frac{\delta(\rho-\rho_0)\delta(z-z_0)}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\varphi_0)\mathrm{d}\varphi_0=\frac{\delta(\rho-\rho_0)\delta(z-z_0)}{2\pi\rho} \tag{3.1.55b}$$

注意: 上式给出了位于 $z=z_0$ 处圆环源的 Dirac Delta 函数表示 (在圆柱坐标中), 在实际问题也经常遇到. 取 $\rho_0=0$, 得到 $z$ 轴上点源的圆柱坐标表示

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)=\frac{\delta(\rho)\delta(z-z_0)}{2\pi\rho} \tag{3.1.55c}$$

如果点源位于原点, 上式取 $z_0=0$ 即可. 对二维平面极坐标, 原点存在点源的 Dirac Delta 函数表示为

$$\delta(x)\delta(y)=\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \tag{3.1.55d}$$

**球坐标** $x=r\sin\vartheta\cos\varphi$; $y=r\sin\vartheta\sin\varphi$; $z=r\cos\vartheta$, 容易计算出

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}=r^2\sin\vartheta \tag{3.1.56a}$$

故在球坐标系内 $\delta$ 函数的表示

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\vartheta-\vartheta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r^2\sin\vartheta} \tag{3.1.56b}$$

显然, 当 $r_0>0$ 且 $\vartheta_0\neq 0$ 和 $\pi$ 时 $(J\neq 0)$, $(x_0,y_0,z_0)$ 与 $(r_0,\vartheta_0,\varphi_0)$ 一一对应, 上式成立. 但是, 如果点源位于极轴上 ($r_0>0$, 但 $\vartheta_0=0$ 或 $\pi$), 则方位角 $\varphi_0$ 没有意义! 如果点源位于原点 $r_0=0$, 则极角 $\vartheta_0$ 和方位角 $\varphi_0$ 都没有意义.

首先考虑点源位于极轴上情况: 与圆柱坐标情况类似, 设想在极轴 (即 $z$ 轴) 上 $z_0=r_0\cos\vartheta_0$ 处的一个圆环 (环面平行于 $xy$ 平面), 其半径为 $R_0=r_0\sin\vartheta_0$, 单位强度的点源均匀分布在环上, 求出这个圆环源的 Dirac Delta 函数表示后, 令 $\vartheta_0\to 0$, 圆环收缩到极轴上一点, 于是就得到极轴上点源的表示. 与式 (3.1.55c) 类似, 不难得到圆环源的 Dirac Delta 函数表示为

$$\frac{\delta(r-r_0)\delta(\vartheta-\vartheta_0)}{2\pi r^2\sin\vartheta}\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\varphi_0)\mathrm{d}\varphi_0=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\vartheta-\vartheta_0)}{2\pi r^2\sin\vartheta} \tag{3.1.56c}$$

注意: 上式给出了位于 $z_0=r_0\cos\vartheta_0$ 处圆环源的 Dirac Delta 函数表示 (在球坐标中), 在实际问题也经常遇到. 取 $\vartheta_0=0$, 得到极轴上点源的球坐标表示

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\vartheta)}{2\pi r^2\sin\vartheta} \tag{3.1.56d}$$

其中 $z_0>0$ 和 $r_0=z_0$; 当点源位于 $\vartheta_0=\pi$ 的极轴时, 上式修改为

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\vartheta-\pi)}{2\pi r^2\sin\vartheta} \tag{3.1.56e}$$

其中 $z_0<0$ 和 $r_0=|z_0|$. 其次, 考虑点源位于原点 $r_0=0$ 情况, 设想位于 $r=r_0$ 的球壳层, 单位强度的点源均匀分布在球壳层上, 求出这个球壳层源的 Dirac Delta

函数表示后, 令 $r_0 \to 0$, 球壳层收缩到原点, 于是就得原点点源的 Dirac Delta 函数表示. 球壳层上 $\varphi_0 \to \varphi_0 + \Delta\varphi_0$ 和 $\vartheta_0 \to \vartheta_0 + \Delta\vartheta_0$ 面元上占有的 "强度" 为 $\sin\vartheta_0 \mathrm{d}\vartheta_0 \mathrm{d}\varphi_0 / 4\pi$, 用 Dirac Delta 函数表示这部分 "强度" 就是

$$\frac{\delta(r-r_0)\delta(\vartheta-\vartheta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r^2\sin\vartheta}\frac{\sin\vartheta_0\mathrm{d}\vartheta_0\mathrm{d}\varphi_0}{4\pi} \tag{3.1.57a}$$

注意到由于 $\delta(\vartheta-\vartheta_0)$ 的存在, 上式分母中 $\sin\vartheta = \sin\vartheta_0$, 故整个球壳层的 "强度" 为

$$\frac{\delta(r-r_0)}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\vartheta-\vartheta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\mathrm{d}\vartheta_0\mathrm{d}\varphi_0 = \frac{\delta(r-r_0)}{4\pi r^2} \tag{3.1.57b}$$

注意：上式给出了位于 $r = r_0$ 处球壳层源的 Dirac Delta 函数表示 (在球坐标中). 取 $r_0 = 0$, 得到球坐标原点存在点源时的 Dirac Delta 函数表示

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \tag{3.1.57c}$$

## 3.2　二阶常微分方程的 Green 函数

本节讨论二阶常微分方程的 Green 函数, 内容包括 Cauchy 问题的 Green 函数、边值问题的 Green 函数和广义 Green 函数. 最后, 讨论非 Hermite 对称算子的边值问题中如何定义 Green 函数, 并得到其积分解. 除用 Green 函数解非齐次方程外, 我们特别感兴趣的是如何把微分方程化成积分方程.

### 3.2.1　Cauchy 问题的 Green 函数

考虑经典力学中受迫阻尼振子方程的 Cauchy 问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi(t) = f(t),\ t > 0\\ \psi(t)|_{t=0} = \psi(0);\ \psi'(t)|_{t=0} = \psi'(0)\end{gathered} \tag{3.2.1a}$$

算子 $\boldsymbol{L}$ 为

$$\boldsymbol{L} = -\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) \tag{3.2.1b}$$

其中 $\gamma$ 为阻尼常数, $\omega_0$ 为系统频率. 根据 $\delta$ 函数的性质, 把方程 (3.2.1a) 写成

$$\boldsymbol{L}\psi(t) = \int f(t')\delta(t-t')\mathrm{d}t' \tag{3.2.2a}$$

如果定义函数 $G(t,t')$ 满足

$$\boldsymbol{L}G(t,t') = \delta(t-t'),\ t,\ t' > 0 \tag{3.2.2b}$$

根据 $\boldsymbol{L}$ 的线性性质应有

$$\psi(t)=\int f(t')G(t,t')\mathrm{d}t' \tag{3.2.2c}$$

事实上, 上式两边作用 $\boldsymbol{L}$ , 并利用方程 (3.2.2b)

$$\boldsymbol{L}\psi=\int f(t')\boldsymbol{L}G(t,t')\mathrm{d}t'=f(t) \tag{3.2.3a}$$

因此, 只要求得 $G(t,t')$, 即可求得非齐次方程 (3.2.1a) 的一个特解, 为了满足初始条件, 注意到齐次方程 $\boldsymbol{L}\psi(t)=0$ 存在二个线性独立解 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$, 于是可得方程 (3.2.1a) 的通解为

$$\psi(t)=a\psi_1(t)+b\psi_2(t)+\int_0^t f(t')G(t,t')\mathrm{d}t' \tag{3.2.3b}$$

其中常数 $a$ 和 $b$ 由初始条件决定. 由方程 (3.2.2b) 决定的函数 $G(t,t')$ 称为 Cauchy 问题的 **Green 函数**.

对常系数微分算子式 (3.2.1b), 可用 Fourier 积分方法求解. 令

$$G(t,t')=\int_{-\infty}^{\infty} g(k,t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}k \tag{3.2.4a}$$

代入方程 (3.2.2b)

$$\boldsymbol{L}G(t,t')=\int_{-\infty}^{\infty} g(k,t')(k^2+2\mathrm{i}\gamma k-\omega_0^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}k=\delta(t,t') \tag{3.2.4b}$$

于是

$$\begin{aligned}g(k,t')&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{k^2+2\mathrm{i}\gamma k-\omega_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t,t')\exp(\mathrm{i}kt)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\exp(\mathrm{i}kt')}{k^2+2\mathrm{i}\gamma k-\omega_0^2}\end{aligned} \tag{3.2.4c}$$

因此

$$G(t,t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[-\mathrm{i}(t-t')k]}{k^2+2\mathrm{i}\gamma k-\omega_0^2}\mathrm{d}k \tag{3.2.5a}$$

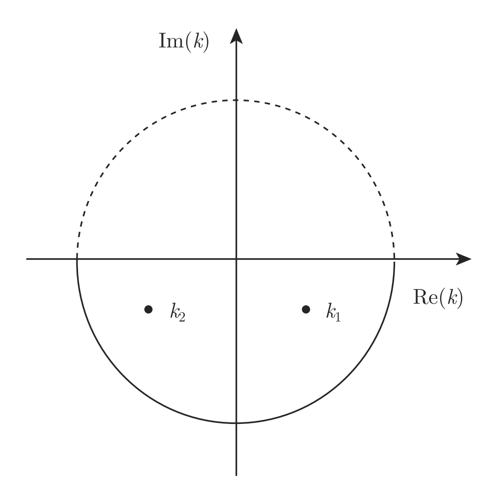



图 3.2.1　二个一阶极点分布

上式可用围道积分求积. 在复平面 $k$ 上, 被积函数

$$f(k) \equiv \frac{\exp[-\mathrm{i}(t-t')k]}{k^2+2\mathrm{i}\gamma k-\omega_0^2} \tag{3.2.5b}$$

有二个一阶极点

$$k_1 = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}-\mathrm{i}\gamma;\ k_2 = -\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}-\mathrm{i}\gamma \tag{3.2.5c}$$

位于下半平面, 如图 3.2.1. 当 $t > t'$ 时, 可取位于下半平面的半圆形; 当 $t < t'$ 时, 围道要取上半平面, 这时围道内无极点, 故得到

$$G(t,t') = \frac{1}{2\pi}\begin{cases} 2\pi\mathrm{i}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{2}\mathrm{Res}[f(k),k_\nu],\ t>t' \\ 0,\ t<t' \end{cases} \tag{3.2.6a}$$

最后可以求得

$$G(t,t') = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}\dfrac{\sin\left[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t')\right]}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}, & t>t' \\ 0, & t<t' \end{cases} \tag{3.2.6b}$$

上式的物理意义很明显, 因为 $\delta(t-t')$ 表示 $t=t'$ 时作用在振子上的瞬时外力, 对 $t<t'$ 的振动无影响, 故当 $t<t'$ 时, $G(t,t')=0$; 当 $t>t'$, 振子作衰减振动. 当过阻尼时, $\gamma>\omega_0$, 由关系 $\sin\mathrm{i}x=\mathrm{i}\sinh x$, 不难得到 $G(t,t')$ 的表达式; 当临界阻尼时,

$\gamma=\omega_0$, 此时 $f(k)$ 在下半平面的虚轴上有一个二阶极点 $k_0=-\mathrm{i}\gamma$, 不难得到

$$G(t,t')=\begin{cases}(t-t')\mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}, & t>t'\\ 0, & t<t'\end{cases} \tag{3.2.6c}$$

上式也可直接从式 (3.2.6b 求极限得到. 注意: 无论是过阻尼还是临界阻尼时, 随时间指数衰减项总是远快于随时间增长项.

对算子式 (3.2.1b), 容易求得齐次方程 $\boldsymbol{L}\psi(t)=0$ 的二个线性独立解 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$ 为

$$\psi_1(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right);\ \psi_2(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right) \tag{3.2.7a}$$

因此, Cauchy 问题式 (3.2.1a) 的解为

$$\begin{aligned}\psi(t)=&\psi(0)\psi_1(t)+\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}[\psi'(0)+\gamma\psi(0)]\psi_2(t)\\&+\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\int_0^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}f(t')\sin\left[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t')\right]\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{3.2.7b}$$

特别是当 $\gamma=0$ 时

$$\begin{aligned}\psi(t)=&\psi(0)\cos\omega_0 t+\frac{1}{\omega_0}\psi'(0)\sin\omega_0 t\\&+\frac{1}{\omega_0}\int_0^t f(t')\sin[\omega_0(t-t')]\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{3.2.7c}$$

对一般的变系数二阶线性微分算子

$$\boldsymbol{L}=-\left[f_0(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+f_1(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+f_2(t)\right] \tag{3.2.8a}$$

算子 $\boldsymbol{L}$ 的 Green 函数 $G(t,t')$ 定义为

$$\boldsymbol{L}G(t,t')=\delta(t-t'),\ t,\ t'>0 \tag{3.2.8b}$$

由于系数 $(f_0,f_1,f_2)$ 与 $t$ 有关, Fourier 积分法失效. 但可用构造法来求 $G(t,t')$. 由方程 (3.2.8b) 及 $\delta(t-t')$ 的定义, 当 $t\neq t'$ 时 $G(t,t')$ 满足齐次方程

$$\boldsymbol{L}G(t,t')=0,\ t\neq t' \tag{3.2.8c}$$

如果设 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$ 是齐次方程 (3.2.8c) 的两个线性独立解, 则

$$G(t,t')=\begin{cases}a_1\psi_1(t)+a_2\psi_2(t), & t>t'\\ b_1\psi_1(t)+b_2\psi_2(t), & t<t'\end{cases} \tag{3.2.9a}$$

下面利用 Green 函数 $G(t,t')$ 的性质来决定四个系数. 显然, 当 $t=t'$, $G(t,t')$ 必须连续, 因为如果它不连续, $G_t$ 就包含一个 Dirac Delta 函数, 而二阶导数就要包含 Dirac Delta 函数的导数, 但方程 (3.2.8b) 右边只是 Dirac Delta 函数. 因此, $G(t,t')$ 在 $t=t'$ 是第一类间断点, 一阶导数 $G_t$ 不连续. 现在来求 $G_t$ 在 $t=t'$ 处的跃值

$$\left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'+\varepsilon}-\left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'-\varepsilon} \tag{3.2.9b}$$

为此, 把方程 (3.2.2b) 两边从 $t=t'-\varepsilon$ 到 $t=t'+\varepsilon$ 积分

$$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} f_0(t)\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t+\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} f_1(t)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} f_2(t)G(t,t')\mathrm{d}t=-1 \tag{3.2.9c}$$

假定 $(f_0,f_1,f_2)$ 在 Green 函数的定义域内处处连续, 则

$$f_0(t')\left[\left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'+\varepsilon}-\left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'-\varepsilon}\right]=-1 \tag{3.2.9d}$$

注意: 直接由例 3.1.8 也可以得到上式. 因此, 在 $t=t'$ 点的连续性条件为

$$\begin{gathered}G(t,t')|_{t=t'+0}-G(t,t')|_{t=t'-0}=0\\ \left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'+0}-\left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'-0}=-\frac{1}{f_0(t')}\end{gathered} \tag{3.2.10a}$$

利用上式可得

$$\begin{gathered}a_1\psi_1(t')+a_2\psi_2(t')=b_1\psi_1(t')+b_2\psi_2(t')\\ \left[a_1\dot{\psi}_1(t')+a_2\dot{\psi}_2(t')\right]-\left[b_1\dot{\psi}_1(t')+b_2\dot{\psi}_2(t')\right]=-\frac{1}{f_0(t')}\end{gathered} \tag{3.2.10b}$$

从而求得

$$a_1-b_1=-\frac{\psi_2(t')}{f_0(t')W(t')};\ a_2-b_2=\frac{\psi_1(t')}{f_0(t')W(t')} \tag{3.2.10c}$$

其中 $W(t')$ 是 $\psi_1(t')$ 和 $\psi_2(t')$ 的 Wronskian 行列式

$$W(t')=\psi_1(t')\frac{\mathrm{d}\psi_2(t')}{\mathrm{d}t'}-\frac{\mathrm{d}\psi_1(t')}{\mathrm{d}t'}\psi_2(t')=\begin{vmatrix}\psi_1(t') & \psi_2(t')\\ \dot{\psi}_1(t') & \dot{\psi}_2(t')\end{vmatrix} \tag{3.2.10d}$$

由于 $\psi_1$ 与 $\psi_2$ 线性独立, 故恒有 $W(t')\neq 0$. 因此 Green 函数 $G(t,t')$ 为

$$G(t,t')=\begin{cases}b_1\psi_1(t)+b_2\psi_2(t)-\dfrac{\psi_1(t)\psi_2(t')-\psi_2(t)\psi_1(t')}{f_0(t')W(t')}, & t>t'\\[2ex] b_1\psi_1(t)+b_2\psi_2(t), & t<t'\end{cases} \tag{3.2.11a}$$

仍有两个常数 $b_1$ 和 $b_2$ 待定, 它们由问题的性质 (Cauchy 问题或边值问题, 后者将在下节讨论) 决定, 对 Cauchy 问题, $b_1$ 和 $b_2$ 可以合并到式 (3.2.3b) 的 $a$ 和 $b$ 中去, 因此可取 $b_1 = b_2 = 0$

$$G(t,t') = -\frac{\psi_1(t)\psi_2(t') - \psi_2(t)\psi_1(t')}{f_0(t')W(t')}H(t-t') \tag{3.2.11b}$$

注意：在求 Cauchy 问题的 Green 函数时, 并没有要求 Green 函数满足初始条件, 事实上, 由式 (3.2.11b) 可知：由于 $t=0$ 时, $t<t'$, $G(t,t')=0$, 故 $G(0,t')=0$ 和 $G_t(0,t')=0$ 自动满足.

### 3.2.2 S-L 型方程的边值问题

首先考虑边界条件齐次的 S-L 型方程的边值问题

$$\begin{gathered} \boldsymbol{L}\psi = f(x),\ x\in(a,b) \\ \left.\left(\alpha_1\psi - \beta_1\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a} = 0;\quad \left.\left(\alpha_2\psi + \beta_2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b} = 0 \end{gathered} \tag{3.2.12a}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是 S-L 型算子

$$\boldsymbol{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] + q(x) \tag{3.2.12b}$$

实函数 $p(x)>0$ 和 $q(x)\geqslant 0$, 以及 $\alpha_\nu\beta_\nu>0$ 和 $\alpha_\nu+\beta_\nu>0$, $(\nu=1,\ 2)$. 由于上述问题的方程非齐次, 但边界条件齐次, 故称为半齐次 S-L 边值问题.

定义 Green 函数 $G(x,\xi)$ 满足

$$\begin{gathered} \boldsymbol{L}G = \delta(x-\xi),\ x,\xi\in(a,b) \\ \left.\left(\alpha_1 G - \beta_1\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a} = 0;\quad \left.\left(\alpha_2 G + \beta_2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b} = 0 \end{gathered} \tag{3.2.13a}$$

同 3.2.1 小节的讨论一样, 方程 (3.2.12a) 的解可表示为

$$\psi(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.2.13b}$$

由于 $G(x,\xi)$ 满足齐次边界条件, 故 $\psi(x)$ 也满足. 因此上式是方程 (3.2.12a) 的解, 但此解是否唯一? 显然, 如果齐次方程有非零解 (即 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的本征值), 上式不是方程 (3.2.12a) 的唯一解, 因为假定 $\psi_0(x)$ 满足 $\boldsymbol{L}\psi_0(x)=0$ 及齐次边界条件, 则 $\psi(x)$

$$\psi(x) = A\psi_0(x) + \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.2.14a}$$

其中 $A$ 是常数, 也是方程 (3.2.12a) 的解. 此时, 并不是对任何 $f(x)$, 边值问题 (3.2.12a) 都有解. 事实上, 由 Lagrange 恒等式 (2.3.2b)

$$\int_a^b (\psi_0^* \boldsymbol{L}\psi - \psi \boldsymbol{L}\psi_0^*)\mathrm{d}x = p(x)\left(\psi\frac{\mathrm{d}\psi_0^*}{\mathrm{d}x} - \psi_0^*\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b \tag{3.2.14b}$$

因 $\boldsymbol{L}\psi = f(x)$ 和 $\boldsymbol{L}\psi_0 = 0$, 故有

$$\int_a^b \psi_0^*(x) f(x)\mathrm{d}x = p(x)\left(\psi\frac{\mathrm{d}\psi_0^*}{\mathrm{d}x} - \psi_0^*\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b \tag{3.2.14c}$$

又因 $\psi_0$ 和 $\psi$ 满足齐次边界条件, 上式右边为零. 因此得到相容性条件

$$\int_a^b \psi_0^*(x) f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{3.2.14d}$$

即 $f(x)$ 必须与 $\psi_0^*(x)$ 正交, 方程 (3.2.12a) 才有解. 与 Cauchy 问题的 Green 函数作一比较: 在 Cauchy 问题中, 齐次方程满足 Cauchy 数据的非零解总存在, 但在边值问题中, 齐次方程满足齐次边界条件的非零解不一定存在. 本小节下面假定 $\psi_0^*(x) \equiv 0$, 即 $\lambda = 0$ 不是 $\boldsymbol{L}$ 的本征值, 相反的情形在 3.2.3 小节讨论.

**Green 函数的唯一性**　可以证明 Green 函数存在且唯一. 设 $G_1(x,\xi)$ 与 $G_2(x,\xi)$ 是方程 (3.2.13a) 的二个解, 则 $G(x,\xi) = G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)$ 满足齐次边界及齐次方程, 故

$$\begin{aligned}0 \equiv \int_a^b G^*(x,\xi)\boldsymbol{L}G(x,\xi)\mathrm{d}x &= \left[-p(x)G^*(x,\xi)\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_a^b \\ &+ \int_a^b p(x)\left|\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right|^2\mathrm{d}x + \int_a^b q(x)|G(x,\xi)|^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.2.15a}$$

利用方程 (3.2.13a) 中的边界条件, 容易证明

$$\begin{aligned}-p(b)G^*(b,\xi)\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b} &= p(b)\frac{\alpha_2}{\beta_2}|G(b,\xi)|^2 > 0 \\ p(a)G^*(a,\xi)\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} &= p(a)\frac{\alpha_1}{\beta_1}|G(a,\xi)|^2 > 0\end{aligned} \tag{3.2.15b}$$

故恒有 $G(x,\xi) \equiv 0$, 亦即 $G_1(x,\xi) \equiv G_2(x,\xi)$.

**Green 函数的对称性**　Green 函数的一个重要性质是它的共轭对称性, 即

$$G(x,\xi) = G^*(\xi,x) \tag{3.2.16a}$$

证明: 令

$$\begin{aligned}\psi_i &= G(x,\xi_1);\ \boldsymbol{L}\psi_i = \delta(x-\xi_1) \\ \psi_j &= G(x,\xi_2);\ \boldsymbol{L}\psi_j = \delta(x-\xi_2)\end{aligned} \tag{3.2.16b}$$

由 Lagrange 恒等式 (2.3.2b) 和齐次边界条件

$$\begin{aligned}&\int_a^b (\psi_i^* \boldsymbol{L}\psi_j - \psi_j \boldsymbol{L}\psi_i^*)\mathrm{d}x = G^*(\xi_2,\xi_1) - G(\xi_1,\xi_2)\\ =&p(x)\left[G(x,\xi_2)\frac{\mathrm{d}G^*(x,\xi_1)}{\mathrm{d}x} - G^*(x,\xi_1)\frac{\mathrm{d}G(x,\xi_2)}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b} = 0\end{aligned} \tag{3.2.16c}$$

故有 $G^*(\xi_2,\xi_1) = G(\xi_1,\xi_2)$, 而 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 任意, 故 $G^*(x,\xi) = G(\xi,x)$. 对 Hermite 对称的一维 S-L 问题, Green 函数可以取实函数, $G(x,\xi) = G(\xi,x)$. Green 函数的对称性是线性系统互易原理的数学表达.

**构造法求 Green 函数** 下面用构造法求 $G(x,\xi)$, 设 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 分别是齐次方程 $\boldsymbol{L}\psi = 0$ 的两个解, 取 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 分别满足 $x = a$ 和 $x = b$ 处的齐次边界条件. 显然 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 线性独立, 因为如果 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 线性相关, 则 $\psi_1(x)=$ 常数 $\times\psi_2(x)$, 即 $\psi_1(x)$ 同时满足 $x = a$ 与 $x = a$ 两端边界条件, 故 $\psi_1(x)$ 是 $\lambda = 0$ 的本征函数, 根据假定 $\psi_1(x) \equiv 0$. Green 函数取形式

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c_1(\xi)\psi_1(x), & a < x \leqslant \xi < b \\ c_2(\xi)\psi_2(x), & a < \xi \leqslant x < b \end{cases} \tag{3.2.17a}$$

系数 $c_1(\xi)$ 和 $c_2(\xi)$ 由 $G(x,\xi)$ 的连续性和 $G_x$ 的跃变条件决定, 与式 (3.2.10a) 类似可以得到

$$\begin{aligned}&G(x,\xi)|_{x=\xi-0} = G(x,\xi)|_{x=\xi+0}\\ &\left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)}\end{aligned} \tag{3.2.17b}$$

把式 (3.2.17a) 代入得

$$\begin{aligned}&c_1(\xi)\psi_1(\xi) - c_2(\xi)\psi_2(\xi) = 0\\ &c_1(\xi)\frac{\mathrm{d}\psi_1(\xi)}{\mathrm{d}\xi} - c_2(\xi)\frac{\mathrm{d}\psi_2(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{p(\xi)}\end{aligned} \tag{3.2.17c}$$

上式的解为

$$c_1(\xi) = -\frac{\psi_2(\xi)}{p(\xi)W(\psi_1,\psi_2)};\ c_2(\xi) = -\frac{\psi_1(\xi)}{p(\xi)W(\psi_1,\psi_2)} \tag{3.2.17d}$$

其中 $W(\psi_1,\psi_2)$ 是 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 的 Wronskian 行列式. 于是, 我们求得 Green 函数的表达式

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{p(\xi)W(\psi_1,\psi_2)}\begin{cases} \psi_1(x)\psi_2(\xi), & a < x \leqslant \xi < b \\ \psi_2(x)\psi_1(\xi), & a < \xi \leqslant x < b \end{cases} \tag{3.2.18a}$$

注意：可以证明 $p(\xi)W(\psi_1,\psi_2)$ 为常数. 事实上由

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}\right)+q\psi_1=0;\quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}\right)+q\psi_2=0 \tag{3.2.18b}$$

以 $\psi_2$ 乘第一式, $\psi_1$ 乘第二式相减得

$$\psi_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}\right)-\psi_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}\right)=0 \tag{3.2.18c}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\left(\psi_1\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}-\psi_2\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}\right)\right]=0 \tag{3.2.18d}$$

故 $-p(\xi)W(\psi_1,\psi_2)=$ 常数 $C$.

**例 3.2.1**　求下列算子 $\boldsymbol{L}$ 在第一类边界条件下的 Green 函数

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}G\equiv-\frac{\mathrm{d}^2G(x,\xi)}{\mathrm{d}x^2}=\delta(x-\xi),\ x,\xi\in(0,l)\\ G(x,\xi)|_{x=a}=G(x,\xi)|_{x=b}=0\end{gathered} \tag{3.2.19a}$$

先求齐次方程的二个线性独立解

$$\boldsymbol{L}\psi=-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}=0,\ x\in(0,l) \tag{3.2.19b}$$

上式的通解为 $\psi(x)=c_1+c_2x$. 取 $\psi_1(x)=x$, 满足 $\psi_1|_{x=0}=0$; 取 $\psi_2(x)=(l-x)$, 满足 $\psi_2|_{x=l}=0$. 可求得 $p(\xi)W(\psi_1,\psi_2)=-l$, 故所求 Green 函数为

$$G(x,\xi)=\frac{1}{l}\begin{cases}x(l-\xi), & 0<x\leqslant\xi<l\\ (l-x)\xi, & 0<\xi\leqslant x<l\end{cases} \tag{3.2.19c}$$

**例 3.2.2**　求下列算子 $\boldsymbol{L}$ 在第一类边界条件下的 Green 函数

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}G\equiv-\frac{\mathrm{d}^2G(x,\xi)}{\mathrm{d}x^2}+\sigma^2G(x,\xi)=\delta(x-\xi),\ x,\xi\in(0,l)\\ G(x,\xi)|_{x=0}=G(x,\xi)|_{x=l}=0\end{gathered} \tag{3.2.20a}$$

其中常数 $\sigma>0$. 齐次方程

$$-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\sigma^2\psi=0,\ x\in(0,l) \tag{3.2.20b}$$

的通解为 $\psi=c_1\sinh\sigma x+c_2\cosh\sigma x$. 取 $\psi_1=\sinh\sigma x$, 则 $\psi_1|_{x=0}=0$; 取 $\psi_2=\sinh\sigma(l-x)$, 则 $\psi_2|_{x=l}=0$. 可求得 $-p(\xi)W(\psi_1,\psi_2)=\sigma\sinh\sigma l$, 于是 Green 函数为

$$G(x,\xi)=\frac{1}{\sigma\sinh(\sigma l)}\begin{cases}\sinh\sigma x\sinh\sigma(l-\xi), & 0<x\leqslant\xi<l\\ \sinh\sigma(l-x)\sinh\sigma\xi, & 0<\xi\leqslant x<l\end{cases} \tag{3.2.20c}$$

**本征函数展开法**　也可用本征函数法求方程 (3.2.13a) 的解. 设 Hermite 对称算子 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数 $\{\psi_n\}$ 构成正交、归一的完备系 (假定本征值是离散谱, 连续谱情况在 3.3.3 节中根据具体情况介绍), 满足

$$\boldsymbol{L}\psi_n(x)=\lambda_n\rho(x)\psi_n(x),\ x\in(a,b)$$
$$\left.\left(\alpha_1\psi_n-\beta_1\frac{\mathrm{d}\psi_n}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a}=0;\quad \left.\left(\alpha_2\psi_n+\beta_2\frac{\mathrm{d}\psi_n}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b}=0 \tag{3.2.21a}$$

注意: 本征函数 $\{\psi_n\}$ 与 Green 函数 $G(x,\xi)$ 满足同样的齐次边界条件. 令

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\psi_n(x) \tag{3.2.21b}$$

代入方程 (3.2.13a) 中第一式

$$\boldsymbol{L}G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\boldsymbol{L}\psi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\lambda_n\rho(x)\psi_n=\delta(x-\xi) \tag{3.2.21c}$$

两边乘 $\psi_m^*$ 并积分得到

$$\lambda_m c_m=\int_a^b\psi_m^*(x)\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=\psi_m^*(\xi) \tag{3.2.21d}$$

因假定 $\lambda_m\neq0$, 故有 $c_m=\psi_m^*(\xi)/\lambda_m$, 于是 Green 函数为

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\psi_n^*(\xi)\psi_n(x) \tag{3.2.21e}$$

**例 3.2.3**　考虑例 3.2.1 情况, 本征函数和相应的本征值 $\{\psi_n,\lambda_n\}$ 为

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right);\ \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\ (n=1,2,\cdots) \tag{3.2.22a}$$

于是

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi \tag{3.2.22b}$$

把式 (3.2.19c) 作 Fourier 级数展开, 可证明与上式完全一致.

**例 3.2.4**　考虑例 3.2.2 情况, 本征函数和相应的本征值为 $\{\psi_n,\lambda_n\}$ 为

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right);\ \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\sigma^2,\ (n=1,2,\cdots) \tag{3.2.23a}$$

可见本征值函数不变, 但本征值有个位移. 于是

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2+l^2\sigma^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi \tag{3.2.23b}$$

如果算子中 $\sigma^2<0$, 令 $\sigma^2=-\delta^2$, $(\delta>0)$, 则

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2-l^2\delta^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi \tag{3.2.24}$$

当 $\delta=m\pi/l$(其中 $m$ 是某个正整数) 时, $\lambda_m=m^2\pi^2/l^2-\delta^2=0$, 类似于零本征值情况, 将在 3.2.3 小节讨论.

**例 3.2.5** 求 Bessel 方程的 Green 函数

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{\nu^2}{x}G=\delta(x-\xi)\ x,\xi\in(0,1)\\ G(x,\xi)|_{x=0}<\infty;\ G(x,\xi)|_{x=1}=0\end{gathered} \tag{3.2.25a}$$

首先用构造法求 Green 函数 $G(x,\xi)$, 齐次方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{\nu^2}{x}G=0 \tag{3.2.25b}$$

的通解为

$$G=\begin{cases}c_1x^{\nu}+c_2x^{-\nu},\ \nu>0\\ c+\ln x,\ \nu=0\end{cases} \tag{3.2.25c}$$

因此, 满足条件 $G(x,\xi)|_{x=0}<\infty$ 和 $G(x,\xi)|_{x=1}=0$ 的 Green 函数可取为

$$G(x,\xi)=\begin{cases}c_1x^{\nu},\ 0<x\leqslant\xi<1\\ c_2(x^{\nu}-x^{-\nu}),\ 0<\xi\leqslant x<1\end{cases};\ (\nu>0) \tag{3.2.26a}$$

利用连接条件式 (3.2.17b), 可以求出常数 $c_1$ 和 $c_2$. 于是

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x^{\nu}}{2\nu}\left(\dfrac{1}{\xi^{\nu}}-\xi^{\nu}\right),\ 0<x\leqslant\xi<1\\ \dfrac{\xi^{\nu}}{2\nu}\left(\dfrac{1}{x^{\nu}}-x^{\nu}\right),\ 0<\xi\leqslant x<1\end{cases};\ (\nu>0) \tag{3.2.26b}$$

当 $\nu=0$ 时不难求出

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\ln\xi,\ 0<x\leqslant\xi<1\\ -\ln x,\ 0<\xi\leqslant x<1\end{cases};\ (\nu=0) \tag{3.2.26c}$$

其次, 用本征函数展开法. 显然

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{\nu^2}{x}\psi=\lambda\psi,\ x\in(0,1)$$
$$\psi(x)|_{x=0}<\infty;\ \psi(x)|_{x=1}=0 \tag{3.2.27a}$$

的正交的完备系为 $\{J_\nu(\mu_n^\nu x)\}$, 相应的本征值为 $\lambda_n^\nu=(\mu_n^\nu)^2,\ (n=1,2,\cdots)$, 其中 $\mu_n^\nu$ 是 $\nu$ 阶 Bessel 方程的零点, 即 $J_\nu(\mu_n^\nu)=0$. 于是, 由方程 (3.2.21e) 得到级数形式的 Green 函数

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(\mu_n^\nu)^2J_{\nu+1}^2(\mu_n^\nu)}J_\nu(\mu_n^\nu x)J_\nu(\mu_n^\nu\xi) \tag{3.2.27b}$$

其中利用了式 (2.3.17a) 给出的 Bessel 函数的模.

**例 3.2.6** 考虑例 3.2.5 中 Bessel 方程 $(\nu>0)$ 定义在区域 $x\in(a,b)$, 边界条件为

$$G(x,\xi)|_{x=a}=\ G(x,\xi)|_{x=b}=0 \tag{3.2.28a}$$

由方程 (3.2.25c), 取满足上式边界条件的解为

$$\psi_1(x)=\frac{x^\nu}{a^\nu}-\frac{a^\nu}{x^\nu};\ \psi_2(x)=\frac{x^\nu}{b^\nu}-\frac{b^\nu}{x^\nu} \tag{3.2.28b}$$

由方程 (3.2.18a) 可求得

$$G(x,\xi)=\frac{a^\nu b^\nu}{2\nu(b^{2\nu}-a^{2\nu})}\begin{cases}\left(\dfrac{x^\nu}{a^\nu}-\dfrac{a^\nu}{x^\nu}\right)\left(\dfrac{\xi^\nu}{b^\nu}-\dfrac{b^\nu}{\xi^\nu}\right), & x\leqslant\xi\\[2ex]\left(\dfrac{x^\nu}{b^\nu}-\dfrac{b^\nu}{x^\nu}\right)\left(\dfrac{\xi^\nu}{a^\nu}-\dfrac{a^\nu}{\xi^\nu}\right), & \xi\leqslant x\end{cases} \tag{3.2.28c}$$

如果用本征函数展开法, 则由式 (2.3.21a) 和 (2.3.21b), Green 函数为

$$G(x,\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_k^\nu)^2}\psi_k^\nu(\xi)\psi_k^\nu(x) \tag{3.2.29a}$$

其中本征函数为

$$\psi_k^\nu(x)=\frac{1}{||\psi_k^\nu||}\left[J_\nu(\mu_k^\nu x)-\frac{J_\nu(\mu_k^\nu a)}{N_\nu(\mu_k^\nu a)}N_\nu(\mu_k^\nu x)\right] \tag{3.2.29b}$$

本征值 $\mu_k^\nu$ 是方程 $J_\nu(\mu a)N_\nu(\mu b)-N_\nu(\mu a)J_\nu(\mu b)=0$ 的第 $k$ 个根, 模 $||\psi_k^\nu||$ 由式 (2.3.21b) 决定.

**微分方程化为积分方程** 利用 Green 函数, 可把 S–L 算子的本征值问题以及边值问题化为积分方程. 考虑本征值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi=\lambda\rho(x)\psi,\ x\in(a,b)\\ \left.\left(\alpha_1\psi-\beta_1\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a}=0;\quad \left.\left(\alpha_2\psi+\beta_2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b}=0\end{gathered}\tag{3.2.30a}$$

把 $\lambda\rho(x)\psi$ 看作非齐项, 则有

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\tag{3.2.30b}$$

上式称为积分方程, 可用积分方程理论 (见第五章) 来讨论本征值问题. 通过 Green 函数, 就把常微分算子的本征值问题转换成了积分算子的本征值问题. 函数 $G(x,\xi)\rho(\xi)$ 称为积分核, 如果 $\rho(x)=1$, 由 Green 函数的对称性 $G(x,\xi)=G(\xi,x)$, 称式 (3.2.30b) 是具有对称核的积分方程; 如果 $\rho(x)\neq 1$, 因为 $\rho(x)>0$, 可取变换 $\chi(x)=\sqrt{\rho(x)}\psi(x)$, 方程 (3.2.30b) 同样成为具有对称核函数 $k(x,\xi)=G(x,\xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}$ 的积分方程

$$\chi(x)=\lambda\int_a^b k(x,\xi)\chi(\xi)\mathrm{d}\xi\tag{3.2.30c}$$

对非齐次 S-L 方程的边界问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi=\beta\rho(x)\psi+f(x),\ x\in(a,b)\\ \left.\left(\alpha_1\psi-\beta_1\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a}=0;\quad \left.\left(\alpha_2\psi+\beta_2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b}=0\end{gathered}\tag{3.2.31a}$$

其中 $\beta$ 是给定常数 (不是本征值, 但有可能等于某一个本征值), 可化成

$$\begin{gathered}\psi(x)=g(x)+\beta\int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ g(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi\end{gathered}\tag{3.2.31b}$$

上式称为**第二类 Fredholm 积分方程**.

**非齐次边值问题** 当不仅方程, 而且边界条件也非齐次时, 称为非齐次 S–L 型边值问题

$$\boldsymbol{L}\psi=f(x),\ x\in(a,b)\tag{3.2.32a}$$

$$\left.\left(\alpha_1\psi-\beta_1\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a}=g_1;\quad \left.\left(\alpha_2\psi+\beta_2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b}=g_2\tag{3.2.32b}$$

对常微分方程, 因为 $g_1$ 和 $g_2$ 是具体的数值 (而非函数), 总可以把边界条件齐次化, 令 $\psi=\chi(x)+\gamma(x)$ 和 $\gamma(x)=A+Bx$, 代入式 (3.2.32b), 取 $A$ 和 $B$ 满足

$$\alpha_1(A+Ba)-\beta_1 B=g_1;\ \alpha_2(A+Bb)+\beta_2 B=g_2 \tag{3.2.32c}$$

例如, 对第一类边界条件, $\alpha_1=\alpha_2=1$ 和 $\beta_1=\beta_2=0$, 得到 $B=(g_2-g_1)/(b-a)$ 和 $A=[g_1 b-g_2 a]/(b-a)$; 但对第二类边界条件 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 和 $\beta_1=\beta_2=1$, 必须令 $\gamma(x)=Bx+Cx^2$. 通过变换, $\chi(x)$ 满足齐次边界条件

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\chi(x)=f(x)-\boldsymbol{L}\gamma(x),\ x\in(a,b)\\ \left.\left(\alpha_1\chi-\beta_1\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a}=0;\ \left.\left(\alpha_2\chi+\beta_2\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b}=0\end{gathered} \tag{3.2.32d}$$

尽管边界条件齐次化了, 但方程的非齐次项发生了变化. 为了分析非齐次边界条件的作用以及推广到高维情况 (在高维情况, 边界的非齐次项是函数, 除非特殊情况, 一般很难齐次化边界条件), 下面从另一个角度讨论问题.

设算子 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称的, 且无零本征值. 同样定义 Green 函数满足

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}G=\delta(x-\xi),\ x,\xi\in(a,b)\\ \left.\left(\alpha_1 G-\beta_1\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a}=0;\ \left.\left(\alpha_2 G+\beta_2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b}=0\end{gathered} \tag{3.2.33a}$$

注意：Green 函数满足的边界条件仍然是齐次的！由 Lagrange 恒等式 (2.3.2b)

$$\int_a^b(\psi\boldsymbol{L}G^*-G^*\boldsymbol{L}\psi)\mathrm{d}x=p(x)\left.\left(\psi\frac{\mathrm{d}G^*}{\mathrm{d}x}-G^*\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_a^b \tag{3.2.33b}$$

于是

$$\psi(\xi)=\int_a^b G^*(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x+p(x)\left(\psi\frac{\mathrm{d}G^*}{\mathrm{d}x}-G^*\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}^{x=b} \tag{3.2.33c}$$

另一方面, 由于

$$\left(\alpha_1\psi-\beta_1\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}=g_1;\quad\left(\alpha_1 G^*-\beta_1\frac{\mathrm{d}G^*}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}=0 \tag{3.2.34a}$$

于是有

$$\left(\psi\frac{\mathrm{d}G^*}{\mathrm{d}x}-G^*\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}=\begin{cases}\left.\dfrac{g_1}{\alpha_1}\cdot\dfrac{\mathrm{d}G^*(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a},\ \alpha_1\neq 0\\ -\dfrac{g_1}{\beta_1}\left.G^*(x,\xi)\right|_{x=a},\ \beta_1\neq 0\end{cases} \tag{3.2.34b}$$

对 $b$ 点同样有

$$\left(\psi\frac{\mathrm{d}G^*}{\mathrm{d}x}-G^*\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)_{x=b}=\begin{cases}\dfrac{g_2}{\alpha_2}\cdot\left.\dfrac{\mathrm{d}G^*(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b}, & \alpha_2\neq 0\\ -\dfrac{g_2}{\beta_2}\left.G^*(x,\xi)\right|_{x=b}, & \beta_2\neq 0\end{cases}\tag{3.2.34c}$$

把式 (3.2.34b) 和 (3.2.34c) 代入式 (3.2.33c) 得到

$$\psi(\xi)=\int_a^b G^*(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x+\frac{g_2}{\alpha_2}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}G^*(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b}-\frac{g_1}{\alpha_1}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}G^*(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}\tag{3.2.35a}$$

上式假定 $\alpha_1\neq 0$ 和 $\alpha_2\neq 0$, 否则根据式 (3.2.34b) 和 (3.2.34cs), 作一定的修改即可. 交换变量 $x$ 和 $\xi$ 并利用 $G(x,\xi)=G^*(\xi,x)$ 得到

$$\psi(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{g_2}{\alpha_2}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=b}-\frac{g_1}{\alpha_1}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=a}\tag{3.2.35b}$$

上式右边第二、三项就是非齐次边界的作用.

### 3.2.3 广义 Green 函数

当 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的本征值时, 由下式定义的 Green 函数不存在

$$\boldsymbol{L}G(x,\xi)=\delta(x,\xi),\ x,\xi\in(a,b)\tag{3.2.36a}$$

证明: 设 $\psi_0(x)\neq 0$ 是零本征值的本征函数 $\boldsymbol{L}\psi_0(x)=0$, $G(x,\xi)$ 是上式的解, $\psi_0(x)$ 和 $G(x,\xi)$ 都满足齐次边界条件, 那么

$$\int_a^b(\psi_0\boldsymbol{L}G-G\boldsymbol{L}\psi_0)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(\psi_0\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}-G\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x\tag{3.2.36b}$$

上式左边为 $\psi_0(\xi)$ 即有

$$\psi_0(\xi)=p(x)\left(\psi_0\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}-G\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b}\tag{3.2.36c}$$

而右边由齐次边界条件容易证明为零, 即 $\psi_0(x)=0$. 矛盾! 故由式 (3.2.36a) 定义的 Green 函数不存在. 为了看出问题所在, 仍然用本征函数展开方法求方程 (3.2.36a) 的解, 令 (注意: 此时求和必须从零开始, 只有包含了 $\psi_0(x)$, 函数系 $\{\psi_n\}$ 才能完备)

$$G(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\psi_n(x)\tag{3.2.37a}$$

代入方程 (3.2.36a), 两边乘 $\psi_m^*$ 并积分得到

$$\lambda_m c_m = \int_a^b \psi_m^*(x)\delta(x-\xi)\mathrm{d}x = \psi_m^*(\xi),\ (m=0,1,2,\cdots) \tag{3.2.37b}$$

当 $m \neq 0$ 时, $\lambda_m \neq 0$, 故有 $c_m = \psi_m^*(\xi)/\lambda_m$; 而当 $m = 0$ 时, $\lambda_0 = 0$, $c_0 \to \infty$, 故上式是矛盾的! 矛盾产生的原因是, 因为方程 (3.2.36a) 的右边 Dirac Delta 函数 $\delta(x-\xi)$ 中必须包含所有的本征函数, 即

$$\delta(x-\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(\xi)\psi_n(x) \tag{3.2.37c}$$

而方程 (3.2.36a) 的左边经过算子 $\boldsymbol{L}$ 的作用后, 零本征值的本征函数 $\psi_0(x)$ 已消失, 故左边不可能等于右边. 为了等式成立, 唯一的可能是方程 (3.2.36a) 右边减去 Dirac Delta 函数中的零本征值的本征函数 $\psi_0(x)$ 部分, 即

$$\delta(x-\xi) - \psi_0^*(\xi)\psi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(\xi)\psi_n(x) \tag{3.2.37d}$$

故我们定义 Green 函数满足的方程 (以及相应的齐次边界条件) 为

$$\boldsymbol{L}G(x,\xi) = \delta(x-\xi) - \psi_0^*(\xi)\psi_0(x),\ x,\xi \in (a,b) \tag{3.2.38a}$$

方程 (3.2.12a) 的解为

$$\psi(x) = A\psi_0(x) + \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.2.38b}$$

其中 $A$ 是任意常数, $f$ 满足相容性条件

$$\int_a^b f(\xi)\psi_0(\xi)\mathrm{d}\xi = 0 \tag{3.2.38c}$$

由方程 (3.2.38a) 定义的 Green 函数称为**广义 Green 函数**. 方程 (3.2.38a) 右边第二项有明显的物理意义: 如果 $\lambda = 0$ 是零本征值, 那么在等于零的 “频率” 时就有共振. 因此集中源 $\delta(x-\xi)$ 将使 Green 函数不为有限, 为了使 Green 函数有限, 必须外加分布源 $\psi_0^*(\xi)\psi_0(x)$ 来抵消这种发散.

我们用本征函数法求方程 (3.2.38a) 的解, 令本征函数展开解为式 (3.2.37a), 代入方程 (3.2.38a)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}G(x,\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \boldsymbol{L}\psi_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n \rho(x)\psi_n(x) \\ &= \delta(x-\xi) - \psi_0^*(\xi)\psi_0(x)\end{aligned} \tag{3.2.39a}$$

上式两边乘 $\psi_m^*(x)$ 并积分

$$\begin{aligned} c_m\lambda_m &= \int_a^b \delta(x-\xi)\psi_m^*(x)\mathrm{d}x - \psi_0^*(\xi)\int_a^b \psi_0(x)\psi_m^*(x)\mathrm{d}x \\ &= \psi_m^*(\xi) - \psi_0^*(\xi)\delta_{m0} \end{aligned} \tag{3.2.39b}$$

当 $m=0$ 时, $c_0\lambda_0=0$, 而 $\lambda_0=0$, 故 $c_0$ 任意；当 $m\neq 0$ 时 $c_m=\psi_m^*(\xi)/\lambda_m$, 于是

$$G(x,\xi) = c_0\psi_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m}\psi_m^*(\xi)\psi_m(x) \tag{3.2.40a}$$

常数 $c_0$ 由 Green 函数的对称性 $G(x,\xi)=G^*(\xi,x)$ 要求得到

$$c_0(\xi)\psi_0(x) = c_0^*(x)\psi_0^*(\xi) \tag{3.2.40b}$$

因此可以取 $c_0(\xi)=\psi_0^*(\xi)$. 于是

$$G(x,\xi) = \psi_0^*(\xi)\psi_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m}\psi_m^*(\xi)\psi_m(x) \tag{3.2.40c}$$

**例 3.2.7**　考虑第二类边值问题

$$\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = f(x),\ x\in(0,1) \\ &\left.\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = 0 \end{aligned} \tag{3.2.41a}$$

相应的本征值问题

$$\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \lambda\psi,\ x\in(0,1) \\ &\left.\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = 0 \end{aligned} \tag{3.2.41b}$$

有零本征值, 相应的本征函数为 $\psi_0(x)=1$, 故存在可解性条件

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{3.2.41c}$$

广义 Green 函数 $G(x,\xi)$ 满足

$$\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-\xi)-1,\ x,\ \xi\in(0,1) \\ &\left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = 0 \end{aligned} \tag{3.2.42a}$$

当 $x \neq \xi$ 时, 有解

$$G(x,\xi)=\begin{cases} A+Bx+\dfrac{x^2}{2}, & 0<x\leqslant\xi<1 \\ C+Dx+\dfrac{x^2}{2}, & 0<\xi\leqslant x<1 \end{cases} \tag{3.2.42b}$$

由边界条件得 $B=0$ 和 $D=-1$, 又由 $G(\xi-0,\xi)=G(\xi+0,\xi)$ 得 $A=C-\xi$, 因此

$$G(x,\xi)=\begin{cases} C-\xi+\dfrac{x^2}{2}, & 0<x\leqslant\xi<1 \\ C-x+\dfrac{x^2}{2}, & 0<\xi\leqslant x<1 \end{cases} \tag{3.2.42c}$$

显然上式自动满足方程 (3.2.17b) 的第二式. 取 $C$ 使 $G(x,\xi)$ 具有对称性 $G(x,\xi)=G(\xi,x)$, 于是 $C=\xi^2/2$, 因此

$$G(x,\xi)=\begin{cases} -\xi+\dfrac{x^2+\xi^2}{2}, & 0<x\leqslant\xi<1 \\ -x+\dfrac{x^2+\xi^2}{2}, & 0<\xi\leqslant x<1 \end{cases} \tag{3.2.42d}$$

另一方面, 本征值问题式 (3.2.41b) 的解为

$$\begin{gathered} \psi_0(x)=1;\ \psi_n(x)=\sqrt{2}\cos n\pi x \\ \lambda_n=n^2\pi^2,\ n=0,1,2,\cdots \end{gathered} \tag{3.2.43a}$$

因此, 由式 (3.2.40c) 得到

$$G(x,\xi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi\xi\cos n\pi x \tag{3.2.43b}$$

最后得到方程 (3.2.41a) 的级数形式的解为

$$\psi(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\left[\int_0^1 f(\xi)\cos n\pi\xi\mathrm{d}\xi\right]\cos n\pi x \tag{3.2.43c}$$

其中 $A$ 为任意实常数. 以上讨论限于非奇异的 S-L 型方程, 对奇异情形, 应视具体情况进行讨论, 下面举二例说明.

**例 3.2.8** 考虑零阶 Bessel 方程的非齐次方程

$$\begin{gathered} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right]=f(x)\ x\in(0,1) \\ \psi(x)|_{x=0}<\infty;\ \psi'(x)|_{x=1}=0 \end{gathered} \tag{3.2.43d}$$

相应的本征值问题为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right]=\lambda\psi(x)\ x\in(0,1)$$
$$\psi(x)|_{x=0}<\infty;\ \psi'(x)|_{x=1}=0 \tag{3.2.44a}$$

本征函数和相应的本征值为 $\{\psi_n(x)=J_0(\mu_n x);\lambda_n=\mu_n^2\}$, 其中 $\mu_n$ 是 1 阶 Bessel 函数 $J_1(x)$ 的第 $n$ 个零点, 故存在零本征值, 相应的本征函数为 $\psi_0(x)=1$. 广义 Green 函数满足

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)=\delta(x-\xi)-1\ x,\xi\in(0,1)$$
$$G(x,\xi)|_{x=0}<\infty;\ G'(x,\xi)|_{x=1}=0 \tag{3.2.44b}$$

当 $x\neq\xi$ 时, 有解

$$G(x,\xi)=\begin{cases}A+B\ln x+x, & 0<x\leqslant\xi<1\\ C+D\ln x+x, & 0<\xi\leqslant x<1\end{cases} \tag{3.2.44c}$$

由条件 $G(x,\xi)|_{x=0}<\infty$, $B=0$; 由条件 $G'(x,\xi)|_{x=1}=0$, $D=-1$, 故

$$G(x,\xi)=\begin{cases}A+x, & 0<x\leqslant\xi<1\\ C-\ln x+x, & 0<\xi\leqslant x<1\end{cases} \tag{3.2.44d}$$

由连接方程 (3.2.17b)(其中第二个方程自动满足) 得到 $A+\xi=C-\ln\xi+\xi$, 即 $A=C-\ln\xi$, 故

$$G(x,\xi)=\begin{cases}C-\ln\xi+x, & 0<x\leqslant\xi<1\\ C-\ln x+x, & 0<\xi\leqslant x<1\end{cases} \tag{3.2.45a}$$

为了满足对称性 $G(x,\xi)=G(\xi,x)$, 取 $C=\xi$. 于是

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\xi+x-\ln\xi, & 0<x\leqslant\xi<1\\ \xi+x-\ln x, & 0<\xi\leqslant x<1\end{cases} \tag{3.2.45b}$$

而本征函数展开解为

$$G(x,\xi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2 J_0^2(\mu_n)}J_0(\mu_n\xi)J_0(\mu_n x) \tag{3.2.45c}$$

其中利用了式 (2.3.18c) 中第二类边界条件下 Bessel 函数的模. 最后, 由式 (3.2.38b) 和 (3.2.43f), 不难得到方程 (3.2.43d) 的解及可解性条件.

**例 3.2.9** 考虑 Legendre 算子的非齐次方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right]=f(x),\ x\in(-1,+1)$$
$$\psi(x)|_{x=\pm 1}<\infty \tag{3.2.46a}$$

本征值问题为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right]=\lambda\psi,\ x\in(-1,+1)$$
$$\psi(x)|_{x=\pm 1}<\infty \tag{3.2.46b}$$

显然本征函数和相应的本征值为

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x);\ \lambda_n=n(n+1) \tag{3.2.46c}$$

$\lambda_0=0$ 是 Legendre 算子的零本征值, 相应的本征函数为 $\psi_0(x)=1/\sqrt{2}$. 故必须定义广义 Green 函数

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right]=\delta(x-\xi)-\frac{1}{2},\ x,\xi\in(-1,+1)$$
$$G(x,\xi)|_{x=\pm 1}<\infty \tag{3.2.47a}$$

当 $x\neq\xi$ 时, 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right]=\frac{1}{2},\ x,\xi\in(-1,+1) \tag{3.2.47b}$$

的通解为

$$G=c_1+c_2\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{4}\ln(1-x^2) \tag{3.2.47c}$$

分别取 $x=\pm 1$ 处有限的解为

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\alpha+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{4}\ln(1-x^2)=-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)+\alpha, & -1<x\leqslant\xi<+1\\[2ex] \beta-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{4}\ln(1-x^2)=-\dfrac{1}{2}\ln(1+x)+\beta, & -1<\xi\leqslant x<+1\end{cases}$$

由 $G(\xi-0,\xi)=G(\xi+0,\xi)$ 得到

$$-\frac{1}{2}\ln(1-\xi)+\alpha=-\frac{1}{2}\ln(1+\xi)+\beta \tag{3.2.48a}$$

因此可取

$$\alpha=-\frac{1}{2}\ln(1+\xi);\ \beta=-\frac{1}{2}\ln(1-\xi) \tag{3.2.48b}$$

于是

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\ln[(1-x)(1+\xi)], & -1<x\leqslant\xi<+1\\ -\dfrac{1}{2}\ln[(1+x)(1-\xi)], & -1<\xi\leqslant x<+1\end{cases}\tag{3.2.48c}$$

上式自动满足连接方程 (3.2.17b) 的第二式. 另一方面, 由式 (3.2.40c) 得到 Green 函数的级数展开形式

$$G(x,\xi)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{2n+1}{2}P_n(x)P_n(\xi)\tag{3.2.49a}$$

于是, 方程 (3.2.46a) 的解为

$$u(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{2n+1}{2}\left[\int_{-1}^{1}f(\xi)P_n(\xi)\mathrm{d}\xi\right]P_n(x)\\ x\in(-1,+1)\tag{3.2.49b}$$

其中 $A$ 为任意常数, 方程 (3.2.46a) 的可解性条件为 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(\xi)\mathrm{d}\xi=0$.

### 3.2.4 非 Hermite 对称算子的边值问题

对一般的二阶常微分方程边值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi\equiv\alpha(x)\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\beta(x)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}+\gamma(x)\psi=f(x)\\ \boldsymbol{P}\psi(x)|_{x=a}=\left(\alpha\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}+\chi\psi\right)_a=g_a\\ \boldsymbol{P}\psi(x)|_{x=b}=\left(\alpha\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}+\chi\psi\right)_b=g_b\end{gathered}\tag{3.2.50a}$$

算子 $\boldsymbol{L}$ 已不存在 Hermite 对称性, 代替 Lagrange 恒等式 (2.3.2b) 的是式 (2.2.35c). 令算子 $\boldsymbol{L}$ 和共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的 Green 函数分别为 $G(x,\xi)$ 和 $G^+(x,\xi)$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}G(x,\xi)=\delta(x,\xi),\ x,\xi\in(a,b)\\ \boldsymbol{P}G=\left(\alpha\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}+\chi\psi\right)_{x=a,b}=0\end{gathered}\tag{3.2.50b}$$

和

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}^+G^+(x,\xi)=\delta(x,\xi),\ x,\xi\in(a,b)\\ \boldsymbol{P}^+G^+\equiv\left[\frac{\mathrm{d}(\alpha^*G^+)}{\mathrm{d}x}-\beta^*G^++\chi^*G^+\right]_{x=a,b}=0\end{gathered}\tag{3.2.50c}$$

**Green 函数的对称性** 取 $\psi_i = G(x,\xi_1)$ 和 $\psi_j(x) = G^+(x,\xi_2)$, 由式 (2.2.35c)

$$\int_a^b [(\boldsymbol{L}G)^* G^+ - G^* \boldsymbol{L}^+ G^+]\mathrm{d}x = [G^+(\boldsymbol{P}G)^* - G^* \boldsymbol{P}^+ G^+]_a^b \tag{3.2.51a}$$

由方程 (3.2.50b) 和 (3.2.50c) 的齐次边界条件, 上式给出 $G^+(\xi_1,\xi_2) = G^*(\xi_2,\xi_1)$. 由 $\xi_2$ 和 $\xi_1$ 的任意性, Green 函数的对称性为

$$G^+(x,\xi) = G^*(\xi,x) \tag{3.2.51b}$$

取 $\psi_j(x) = G^+(x,\xi)$ 满足方程 (3.2.50c) 和 $\psi_i(x) = \psi(x)$ 满足方程 (3.2.50a), 由式 (2.2.35c)

$$\int_a^b [(\boldsymbol{L}\psi)^* G^+ - \psi^* \boldsymbol{L}^+ G^+]\mathrm{d}x = [G^+(\boldsymbol{P}\psi)^* - \psi^* \boldsymbol{P}^+ G^+]_a^b \tag{3.2.52a}$$

于是

$$\psi^*(\xi) = \int_a^b f^*(x) G^+(x,\xi)\mathrm{d}x + G^+(a,\xi)g_a^* - G^+(b,\xi)g_b^* \tag{3.2.52b}$$

二边求复共轭, 交换变量且利用 Green 函数的对称性 $[G^+(\xi,x)]^* = G(x,\xi)$ 得到

$$\psi(x) = \int_a^b f(x)G(x,\xi)\mathrm{d}x + G(x,a)g_a - G(x,b)g_b \tag{3.2.52c}$$

**相容性条件** 式 (2.2.35c) 中取 $\psi_i(x) = \psi(x)$ 和 $\psi_j(x) = \psi_0^+(x)$, 即

$$\int_a^b [(\boldsymbol{L}\psi)^* \psi_0^+ - \psi^* \boldsymbol{L}^+ \psi_0^+]\mathrm{d}x = [\psi_0^+(\boldsymbol{P}\psi)^* - \psi^* \boldsymbol{P}^+ \psi_0^+]_a^b \tag{3.2.53a}$$

其中 $\psi_0^+$ 是共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的零本征值的本征函数, 满足 $\boldsymbol{L}^+\psi_0^+ = 0$ 和边界条件 $\boldsymbol{P}^+\psi_0^+ = 0$. 由方程 (3.2.50a) 得到

$$\int_a^b f^*(x)\psi_0^+(x)\mathrm{d}x = \psi_0^+(b)g_b^* - \psi_0^+(a)g_a^* \tag{3.2.53b}$$

这就是非齐次方程的边值问题存在解的相容性条件, 对齐次方程的边值问题: $g_b^* = g_a^* = 0$, 方程 (3.2.53b) 简化为

$$\int_a^b f^*(x)\psi_0^+(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{3.2.53c}$$

即非齐次项与共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的零本征值的本征函数 $\psi_0^+$ 正交. 如果 $\psi_0^+(x) \equiv 0$, 相容性条件自动满足.

**本征函数展开法**　算子 $\boldsymbol{L}$ 和共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 本征值问题由方程 (2.2.37a) 给出, 设本征函数系 $\{\psi_i(x)\}$ 构成 $L^2[a,b]$ 的完备系, Green 函数 $G(x,\xi)$ 可以展开为

$$G(x,\xi)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i\psi_i(x) \tag{3.2.54a}$$

代入方程 (3.2.50b) 得

$$\sum_{i=0}^{\infty}c_i\lambda_i\rho(x)\psi_i(x)=\delta(x,\xi) \tag{3.2.54b}$$

两边乘共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的本征函数的复共轭 $[\psi_j^+(x)]^*$ 并积分得到 (利用正交性关系 (2.2.37b))

$$\lambda_jc_j=\frac{1}{N_j^2}\int_a^b[\psi_j^+(x)]^*\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=\frac{1}{N_j^2}[\psi_j^+(\xi)]^* \quad (j=0,1,2,\cdots) \tag{3.2.55a}$$

其中

$$N_j^2=\int_a^b\rho(x)\psi_j(x)[\psi_j^+(x)]^*\mathrm{d}x \tag{3.2.55b}$$

设 $\lambda_0=0$ 不是算子 $\boldsymbol{L}$ 的零本征值, 则由式 (3.2.55a) 可以得到 $c_j$, 然后代入式 (3.2.54a) 得到 Green 函数

$$G(x,\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{N_i^2\lambda_i}[\psi_i^+(\xi)]^*\psi_i(x) \tag{3.2.55c}$$

同理可以得到共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的 Green 函数

$$G^+(x,\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(M_j^2)\lambda_j^+}\psi_j^*(\xi)\psi_j^+(x) \tag{3.2.56a}$$

其中

$$M_j^2=\int_a^b\rho(x)\psi_j^*(x)\psi_j^+(x)\mathrm{d}x \tag{3.2.56b}$$

利用 $\lambda_j^+=\lambda_j^*$ 和 $M_j^2=(N_j^2)^*$, 不难证明 $G^+(x,\xi)=G^*(\xi,x)$.

**广义 Green 函数**　如果 $\lambda_0=0$ 是算子 $\boldsymbol{L}$ 的零本征值, 则 $\lambda_0^+=\lambda_0^*=0$ 也是共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的零本征值, 必须定义广义 Green 函数

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}G(x,\xi)=\delta(x,\xi)-[\psi_0^+(\xi)]^*\psi_0(x),\ x,\xi\in(a,b)\\&\boldsymbol{P}G\equiv\left(\alpha\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}+\chi\psi\right)_{x=a,b}=0\end{aligned} \tag{3.2.57a}$$

和

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}^{+}G^{+}(x,\xi)=\delta(x,\xi)-\psi_0^*(\xi)\psi_0^{+}(x),\ x,\xi\in(a,b)\\&\boldsymbol{P}^{+}G^{+}\equiv\left[\frac{\mathrm{d}(\alpha^*G^{+})}{\mathrm{d}x}-\beta^*G^{+}+\chi^*G^{+}\right]_{x=a,b}=0\end{aligned}\tag{3.2.57b}$$

其解为

$$\begin{aligned}G(x,\xi)&=[\psi_0^{+}(\xi)]^*\psi_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{N_i^2\lambda_i}[\psi_i^{+}(\xi)]^*\psi_i(x)\\G^{+}(x,\xi)&=\psi_0^*(\xi)\psi_0^{+}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{M_j^2\lambda_j^{+}}\psi_j^*(\xi)\psi_j^{+}(x)\end{aligned}\tag{3.2.57c}$$

方程 (3.2.50a) 的解为

$$\begin{aligned}\psi(x)=A\psi_0(x)+\int_a^b f(x)G(x,\xi)\mathrm{d}x\\+G(x,a)g_a-G(x,b)g_b\end{aligned}\tag{3.2.57d}$$

注意：上式中 $\psi_0(x)$ 是算子 $\boldsymbol{L}$ 的零本征值本征函数.

对复函数系数的 S.-L 型算子, 算子 $\boldsymbol{L}$ 和共轭算子 $\boldsymbol{L}^{+}$ 的本征值和本征函数存在关系 $\{\psi_j^{+},\lambda_j^{+}\}=\{\psi_j^*,\lambda_j^*\}$, 故式 (3.2.57c) 变成

$$\begin{aligned}G(x,\xi)&=\psi_0(\xi)\psi_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{N_i^2\lambda_i}\psi_i(\xi)\psi_i(x)\\G^{+}(x,\xi)&=\psi_0^*(\xi)\psi_0^*(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{M_j^2\lambda_j^*}\psi_j^*(\xi)\psi_j^*(x)\end{aligned}\tag{3.2.57e}$$

即共轭算子 $\boldsymbol{L}^{+}$ 的 Green 函数是算子 $\boldsymbol{L}$ 的 Green 函数的复共轭, 即 $G^{+}(x,\xi)=G^*(x,\xi)$.

注意：对一般形式的二阶常微分方程的边值问题式 (3.2.50a), 无论系数是实函数还是复函数, 通过变换式 (2.3.36b), 总可以把二阶常微分方程变成 S-L 型, 即

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)+q\psi=\tilde{f}(x)\tag{3.2.58a}$$

其中非齐次项转化成

$$\tilde{f}(x)=-\exp\left[\int\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\mathrm{d}x\right]\frac{f(x)}{\alpha(x)}\tag{3.2.58b}$$

注意：式 (3.2.50a) 中边界条件保持不变. 原则上, 我们只要讨论复系数的 S.–L 型方程就可以了, 但通过变换, 不仅微分算子变化了形式, 而且非齐次项复杂化了.

## 3.3 高维边值问题的 Green 函数

本节讨论 Hermite 对称的高维 S-L 型算子 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$(其中 $p(\boldsymbol{r})>0$ 和 $q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$) 边值问题的 Green 函数. 特别是 $p(\boldsymbol{r})\equiv 1$ 和 $q(\boldsymbol{r})=0$ 或 $q(\boldsymbol{r})=\lambda$(常数) 情况, 即 Laplace 算子及 Helmholtz 算子. 关于非 Hermite 对称算子 (包括复系数的 S-L 型算子) 的边值问题统一在 3.5 节中介绍. 另外, 本节主要介绍有限或无限区域的 Green 函数, 对半无限区域的各种情况, 在 2.6 节中已给出相应的 Green 函数, 故不再重复.

### 3.3.1 非齐次问题的积分公式

设 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$ 是 $G$ 上的 Hermite 对称算子, 非齐次边值问题为

$$\boldsymbol{L}u(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G \tag{3.3.1a}$$

$$\left[\alpha u(\boldsymbol{r})+\beta\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=B(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{3.3.1b}$$

定义非齐次问题的 Green 函数为下列边值问题的解

$$\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G \tag{3.3.2a}$$

$$\left[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=0,\ \boldsymbol{r}'\in G+\partial G \tag{3.3.2b}$$

注意:$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足齐次边界条件. 下面用 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 来表示方程 (3.3.1a) 和 (3.3.1b) 的解. 利用 Green 公式

$$\int_G(u^*\boldsymbol{L}v-v\boldsymbol{L}u^*)\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}p\left(v\frac{\partial u^*}{\partial n}-u^*\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{3.3.3a}$$

取 $v=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, $u(\boldsymbol{r})$ 满足方程 (3.3.1a) 和 (3.3.1b), 则

$$\begin{aligned}u^*(\boldsymbol{r}')=&\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\\&+\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u^*(\boldsymbol{r})}{\partial n}-u^*(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{3.3.3b}$$

上式右边面积分可用 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 表示. 事实上, 因

$$\left[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=0;\quad\left[\alpha u^*(\boldsymbol{r})+\beta\frac{\partial u^*(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=B^*(\boldsymbol{r})$$

于是有

$$\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u^*(\boldsymbol{r})}{\partial n}-u^*(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=\begin{cases}-\dfrac{B^*(\boldsymbol{r})}{\alpha}\cdot\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n},\ \alpha\neq 0\\[2ex]+\dfrac{B^*(\boldsymbol{r})}{\beta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\ \beta\neq 0\end{cases}$$

因此, 把上式代入式 (3.3.3b) 得

$$\begin{aligned}u^*(\boldsymbol{r}')=&\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\\&+\begin{cases}-\displaystyle\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left[\frac{B^*(\boldsymbol{r})}{\alpha}\cdot\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\mathrm{d}S\ ,\quad \alpha\neq 0\\+\displaystyle\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left[\frac{B^*(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\beta}\right]\mathrm{d}S,\ \beta\neq 0\end{cases}\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

形式上, 只要知道 Green 函数, 好象求得了方程 (3.3.1a) 和 (3.3.1b) 的解. 其实不然, 因为点 $\boldsymbol{r}'$ 在方程 (3.3.4) 中是常点. 利用 Green 函数的对称性, 即可解决这一问题.

**Green 的对称性** 令 $u^*=G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $v=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')$ 分别有: $\boldsymbol{L}G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')$, 由式 (3.3.3a)

$$G^*(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\frac{\partial G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}-G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$

由于 $G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')$ 都满足边界条件式 (3.3.2b), 故上式右边积分为零. 于是 $G^*(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')$, 由 $\boldsymbol{r}''$ 的任意性, 即得

$$G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\tag{3.3.5a}$$

因此, Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 对 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 交换**共轭对称**. 利用此结果, 对式 (3.3.4) 两边取复共轭, 并交换对 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 变量, 应有

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r})=&\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&+\begin{cases}-\displaystyle\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[\frac{B(\boldsymbol{r}')}{\alpha}\cdot\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S',\ \alpha\neq 0\\+\displaystyle\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[\frac{B(\boldsymbol{r}')}{\beta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S',\ \beta\neq 0\end{cases}\end{aligned}\tag{3.3.5b}$$

上式即为方程 (3.3.1a) 和 (3.3.1b) 的积分形式解. 因此, 一旦求得 Green 函数, 就能得到相应的非齐次问题的解.

**例 3.3.1** Laplace 方程的球内 (设半径为 $R$) 的第一类边值问题

$$\begin{gathered}-\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\ r,r' < R \\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=0} < \infty;\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=R} = 0,\ r' \leqslant R\end{gathered} \tag{3.3.6a}$$

利用球坐标系中 $\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的表达式

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\delta(r-r')\delta(\vartheta-\vartheta')\delta(\varphi-\varphi') \\ &= \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l} Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\end{aligned} \tag{3.3.6b}$$

首先把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 展开成

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} g_{lm}(r,r')Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi') \tag{3.3.6c}$$

代入方程 (3.3.6a) 应有

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)g_{lm}(r,r') + \frac{l(l+1)}{r^2}g_{lm}(r,r') = \frac{1}{r'^2}\delta(r-r') \tag{3.3.6d}$$

根据构造法, 取

$$g^1_{lm}(r) = r^l;\ g^2_{lm}(r) = \left(1-\frac{R^{2l+1}}{r^{2l+1}}\right)r^l \tag{3.3.7a}$$

故有

$$g_l(r,r') \equiv g_{lm}(r,r') = -\frac{r^l r'^l}{(2l+1)R^{2l+1}}\begin{cases}1-\left(\dfrac{R}{r'}\right)^{2l+1}, & r \leqslant r' \\ 1-\left(\dfrac{R}{r}\right)^{2l+1}, & r \geqslant r'\end{cases} \tag{3.3.7b}$$

注意:$g_{lm}$ 与 $m$ 无关. 于是求得 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} g_l(r,r')Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi') \tag{3.3.8a}$$

利用加法公式

$$P_l(\cos\Theta) = \sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{(2l+1)}Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{3.3.8b}$$

其中 $\Theta$ 为 $(r,\vartheta,\varphi)$ 和 $(r',\vartheta',\varphi')$ 之间的夹角, Green 函数可表示为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)g_l(r,r')P_l(\cos\Theta) \tag{3.3.8c}$$

对例 2.5.1 的球内边值问题 $\psi(r,\vartheta,\varphi)|_{r=R}=f(\vartheta,\varphi)$, 由方程 (3.3.5b) 得到

$$\psi(r,\vartheta,\varphi)=-\iint_{\partial G}\left[f(\vartheta',\varphi')\frac{\partial G(r,\vartheta,\varphi,r',\vartheta',\varphi')}{\partial r'}\right]_{r'=R}R^2\mathrm{d}\Omega' \tag{3.3.8d}$$

注意到 $r<r'$, 由式 (3.3.7b)

$$g_l(r,r')=-\frac{r^l r'^l}{(2l+1)a^{2l+1}}\left[1-\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\right];\quad \left.\frac{\partial g_l(r,r')}{\partial r'}\right|_{r'=R}=-\frac{r^l}{R^{l+2}} \tag{3.3.8e}$$

上式代入式 (3.3.8d) 得到

$$\psi(r,\vartheta,\varphi)=\iint_R f(\vartheta',\varphi')\tilde{G}(r,\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi')\mathrm{d}\Omega' \tag{3.3.8f}$$

其中

$$\tilde{G}(r,\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi')\equiv\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{r^l}{R^l}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi') \tag{3.3.8g}$$

上二式比较式 (2.5.7d) 和 (2.5.7e), 结果一致.

**本征函数展开法** 下面进一步讨论方程 (3.3.2a) 和 (3.3.2b), 分两种情况

(1) 零不是 $\boldsymbol{L}$ 的本征值: 设 $\{\psi_n(\boldsymbol{r})\}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的正交、归一的完备本征函数集, 相应的本征值为 $\lambda_n$, 则令

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.9a}$$

代入方程 (3.3.2a)

$$\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\boldsymbol{L}\psi_n(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.3.9b}$$

于是 $\lambda_n c_n=\psi_n(\boldsymbol{r}')$, 因 $\lambda_n\neq 0$, 故 $c_n=\psi^*_n(\boldsymbol{r}')/\lambda_n$. 因此, 求得 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\psi^*_n(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.9c}$$

因 $\lambda_n$ 是实数, 显然有对称性 $G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$;

(2) 当零是 $\boldsymbol{L}$ 的本征值时: 设 $\psi_0(\boldsymbol{r})\neq 0$ 是零本征函数 $\boldsymbol{L}\psi_0(\boldsymbol{r})=0$, 这时可证明方程 (3.3.2a) 和 (3.3.2b) 无解. 令式 (3.3.3a) 中 $v=\psi_0\ (\boldsymbol{r})$ 和 $u=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, 则应有 $\psi_0(\boldsymbol{r}')\equiv 0$, 故矛盾! 象一维情形, 必须引进广义 Green 函数

$$\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\psi^*_0(\boldsymbol{r}')\psi_0(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.10a}$$

这时仍令 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为式 (3.3.9a) 形式, 但求和从 $n=0$ 开始, 代入上式应有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \psi_0^*(\boldsymbol{r}')\psi_0(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.10b}$$

因此利用函数系 $\{\psi_n(\boldsymbol{r})\}$ 的正交和归一性

$$c_n\lambda_n = \psi_0^*(\boldsymbol{r}') - \psi_0^*(\boldsymbol{r}')\delta_{n0} \tag{3.3.10c}$$

当 $n=0$ 时, $\lambda_0=0$, 故 $c_0$ 可为任意常数; 当 $n\neq 0$ 时, $\lambda_n\neq 0$, 故 $c_n=\psi_0^*(\boldsymbol{r}')/\lambda_n$, 于是, 广义 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = c_0\psi_0(\boldsymbol{r}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\psi_m^*(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.10d}$$

为了保持 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的共轭对称性, 应取 $c_0=\psi_0^*(\boldsymbol{r}')$, 相应地 (3.3.5b) 应修改成

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}) = {} & A\psi_0(\boldsymbol{r}) + \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \\ & + \begin{cases} -\displaystyle\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}')\left[\frac{B(\boldsymbol{r}')}{\alpha}\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S', & \alpha\neq 0 \\ +\displaystyle\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}')\left[\frac{B(\boldsymbol{r}')}{\beta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S', & \beta\neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3.11a}$$

其中 $A$ 是常数. 式 (3.3.3a) 中令 $v=\psi_0(\boldsymbol{r})$, 因 $\boldsymbol{L}\psi_0(\boldsymbol{r})=0$, 故 $f$ 和 $B$ 满足相容性条件

$$-\int_G \psi_0(\boldsymbol{r})f^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = \begin{cases} -\displaystyle\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r})\left[\frac{B^*(\boldsymbol{r})}{\alpha}\frac{\partial\psi_0(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\mathrm{d}S, & \alpha\neq 0 \\ +\displaystyle\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r})\left[\frac{B^*(\boldsymbol{r})}{\beta}\psi_0(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}S, & \beta\neq 0 \end{cases} \tag{3.3.11b}$$

如果边界条件是齐次的, 即 $B(\boldsymbol{r})=0$, 上式变成

$$\int_G \psi_0(\boldsymbol{r})f^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = 0 \tag{3.3.11c}$$

式 (3.3.11b) 或 (3.3.11c) 是解存在的相容性条件.

如果 $\lambda=0$ 是 $p$ 重简并的, 则对应零本征值 $\lambda=0$, 存在 $p$ 个本征函数 $\psi_{0\nu}(\boldsymbol{r})$, $(\nu=1,2,\cdots,p)$ 满足 $\boldsymbol{L}\psi_{0\nu}(\boldsymbol{r})=0$, 式 (3.3.11a) 右边 $A\psi_0(\boldsymbol{r})$ 项应改为 $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{p}A_\nu\psi_{0\nu}(\boldsymbol{r})$, 而广义 Green 函数式 (3.3.10d) 应改为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{\nu=1}^{p}\psi_{0\nu}^*(\boldsymbol{r}')\psi_{0\nu}(\boldsymbol{r}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.12a}$$

相容性条件修改为

$$\int_G \psi_{0\nu}(\boldsymbol{r})f^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = 0,\ (\nu = 1, 2, \cdots, p) \tag{3.3.12b}$$

即非齐次项 $f(\boldsymbol{r})$ 与所有零本征值的本征函数正交.

**例 3.3.2** Laplace 方程的第二类边值问题是具有零本征值的简单例子

$$-\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}),\ (\boldsymbol{r} \in G)\ ;\ \left.\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0 \tag{3.3.13a}$$

显然 $\lambda = 0$ 是 $\boldsymbol{L} = -\nabla^2$ 的本征值, 相应的本征函数 $\psi_0 = 1/\sqrt{V}$, 其中 $V$ 是区域的体积. 由式 (3.3.11c) 得到相容条件为

$$\int_G f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = 0 \tag{3.3.13b}$$

上式的意义很明显: 因为方程 (3.3.13a) 中边界条件表示绝热, 没有热量能通过边界. 因此稳定分布的条件是区域中总热量的产生为零. 这时广义 Green 函数定义为

$$\begin{gathered}-\nabla^2 G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{V} + \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \in G \\ \left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0,\ \boldsymbol{r}' \in G + \partial G\end{gathered} \tag{3.3.13c}$$

一般解为

$$\psi(\boldsymbol{r}) = C + \int_G G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{3.3.13d}$$

其中 $C$ 为任意常数.

### 3.3.2 Helmholtz 方程的 Green 函数

考虑 $\boldsymbol{L} = -\nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r})$ 的特殊情况 $p(\boldsymbol{r}) = 1$ 和 $q(\boldsymbol{r}) = -\lambda$(其中 $\lambda$ 为实常数. 注意: 不能是复数, 否则就不是 Hermite 对称算子了).

$$\begin{gathered}-(\nabla^2 + \lambda)u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})\ ,\quad \boldsymbol{r} \in G \\ \left.\left[\alpha u(\boldsymbol{r}) + \beta\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\right|_{\partial G} = B(\boldsymbol{r})\ ,\quad \boldsymbol{r} \in \partial G\end{gathered} \tag{3.3.14a}$$

Green 函数满足

$$\begin{gathered}-(\nabla^2 + \lambda)G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \lambda) = \delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \in G \\ \left.\left[\alpha G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \lambda) + \beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \lambda)}{\partial n}\right]\right|_{\partial G} = 0,\ \boldsymbol{r}' \in G + \partial G\end{gathered} \tag{3.3.14b}$$

首先考虑有限区域情况, 用本征函数法求解上式, 令

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.15a}$$

其中 $\psi_n(\boldsymbol{r})$ 是 Laplace 算子的本征函数

$$\begin{gathered}-\nabla^2\psi_n(\boldsymbol{r})=\lambda_n\psi_n(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left[\alpha\psi_n(\boldsymbol{r})+\beta\frac{\partial\psi_n(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial G}=0\end{gathered} \tag{3.3.15b}$$

把式 (3.3.15a) 代入方程 (3.3.14b) 应有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\lambda_n-\lambda)\psi_n(\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{m=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.15c}$$

故有 $(\lambda_n-\lambda)c_n=\psi_n^*(\boldsymbol{r}')$. 分两种情况讨论

(1) $\lambda_n-\lambda\neq 0$, $c_m=\psi_m^*(\boldsymbol{r}')/(\lambda_m-\lambda)$, 于是 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.16}$$

显然亦有 $G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$.

**Green 函数与 Dirac Delta 函数的关系** 把式 (3.3.16) 的 $\lambda$ 延拓到整个复平面, 并积分得到

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\lambda)\mathrm{d}\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.17a}$$

其中 $C$ 是包括所有一阶奇点 $\lambda_n$, $(n=1,2,\cdots)$ 的积分围道. 利用关系

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.17b}$$

式 (3.3.17a) 可以改写成

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{3.3.17c}$$

尽管上式由分离谱情况得到, 但对连续谱或者混合谱情况也成立!

(2) $\lambda_p-\lambda=0(\lambda_p$ 是第 $p$ 个本征值): 因 $\psi_p^*(\boldsymbol{r}')$ 不可能恒为零, 故

$$c_p=\frac{\psi_p^*(\boldsymbol{r}')}{\lambda_p-\lambda}\to\infty \tag{3.3.18a}$$

必须推广 Green 函数的定义. 定义广义 Green 函数

$$\begin{aligned} &-(\nabla^2+\lambda)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\psi_p^*(\boldsymbol{r}')\psi_p(\boldsymbol{r})+\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G \\ &\left.\left[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\right|_{\partial G}=0,\ \boldsymbol{r}'\in G+\partial G \end{aligned} \tag{3.3.18b}$$

可求得, 当 $n\neq p$ 时

$$c_n=\frac{1}{\lambda_n-\lambda}\psi_n^*(\boldsymbol{r}') \tag{3.3.18c}$$

而 $c_p$ 为任意常数, 为了保持 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的共轭对称性, 应取 $c_m=\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')$, 得到

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\psi_p^*(\boldsymbol{r}')\psi_p(\boldsymbol{r})+\sum_{n\neq p}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.18d}$$

**例 3.3.3**　求半径为 $a$ 的圆内 Helmholtz 方程的 Green 函数

$$\begin{aligned} -(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\ \rho,\rho'<a \\ G(\rho,\varphi,\rho',\varphi')|_{\rho=0}<\infty;\ G(\rho,\varphi,\rho',\varphi')|_{\rho=a}=0 \end{aligned} \tag{3.3.19a}$$

利用极坐标中的 Dirac Delta 函数的表示

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi') \tag{3.3.19b}$$

首先把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 展开成

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{m=-\infty}^{\infty}G_m(\rho,\rho')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{3.3.19c}$$

上式代入方程 (3.3.19a) 的第一式得到

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}G_m}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(k^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)G_m=-\frac{1}{2\pi\rho}\delta(\rho-\rho')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'} \tag{3.3.19d}$$

令

$$G_m(\rho,\rho')=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}g_m(\rho,\rho') \tag{3.3.20a}$$

则

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\frac{\mathrm{d}g_m(\rho,\rho')}{\mathrm{d}\rho}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)g_m(\rho,\rho')=-\frac{1}{\rho}\delta(\rho,\rho')$$

上式是非齐次的 Bessel 方程, 可用构造法求 $g_m(\rho,\rho')$. 满足 $g_m(\rho,\rho')|_{\rho=0}<\infty$ 的解取为 $g_m^1(\rho)=J_m(k\rho)$; 满足 $g_m(\rho,\rho')|_{\rho=a}=0$ 的解取为

$$g_m^2(\rho)=N_m(ka)J_m(k\rho)-J_m(ka)N_m(k\rho) \tag{3.3.20b}$$

由方程 (3.2.18a)

$$g_m(\rho,\rho') = -\frac{1}{\rho' W(g_m^1, g_m^2)} \begin{cases} g_m^1(\rho) g_m^2(\rho'), & 0 < \rho \leqslant \xi < a \\ g_m^1(\rho') g_m^2(\rho), & 0 < \xi \leqslant x < a \end{cases} \tag{3.3.21a}$$

其中 Wronskian 行列式为

$$\begin{aligned} W(g_m^1, g_m^2) &= g_m^1(\rho')\frac{\mathrm{d}g_m^2(\rho')}{\mathrm{d}\rho'} - g_m^2(\rho')\frac{\mathrm{d}g_m^1(\rho')}{\mathrm{d}\rho'} \\ &= -J_m(ka)[J_m(k\rho')N_m'(k\rho') - J_m'(k\rho')N_m(k\rho')] \end{aligned} \tag{3.3.21b}$$

利用关系 $x[J_m(x)N_m'(x) - J_m'(x)N_m(x) = 2/\pi$, 得到 $\rho' W(g_m^1, g_m^2) = -2J_m(ka)/\pi$, 代入式 (3.2.19c), 最后构造出 Green 函数

$$\begin{aligned} G(\rho,\varphi,\rho',\varphi') = &\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')] \\ &\cdot \begin{cases} \dfrac{N_m(ka)J_m(k\rho') - J_m(ka)N_m(k\rho')}{2J_m(ka)} J_m(k\rho), & \rho < \rho' \\ \dfrac{N_m(ka)J_m(k\rho) - J_m(ka)N_m(k\rho)}{2J_m(ka)} J_m(k\rho'), & \rho' < \rho \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3.21c}$$

另一方面, 用本征函数法求解方程 (3.3.19a), 本征值问题

$$-\nabla^2 \psi_n(\boldsymbol{r}) = \lambda_n \psi_n(\boldsymbol{r}),\ \rho < a;\ \psi_n(\boldsymbol{r})|_{\rho=a} = 0 \tag{3.3.22a}$$

的解为

$$\begin{gathered} \{\psi_n^m(\rho,\varphi)\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{aJ_m'(\sqrt{\lambda_n^m}a)} J_m\left(\sqrt{\lambda_n^m}\rho\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \right\} \\ (n = 1, 2, \cdots;\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{gathered} \tag{3.3.22b}$$

其中 $\lambda_n^m$ 是 $m$ 阶 Bessel 方程的第 $n$ 个根 $J_m(\sqrt{\lambda}a) = 0$. 设 $J_m(x) = 0$ 的正根为 $(x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m, \cdots)$ 则 $\lambda_n^m = (x_n^m/a)^2$, 于是根据式 (3.3.16)

$$\begin{aligned} G(\rho,\varphi,\rho',\varphi') = &\frac{2}{a^2}\sum_{n,m}^{\infty} \frac{1}{J_m'^2(x_n^m)[(x_n^m/a)^2 - k^2]} \\ &\cdot J_m\left(x_n^m \frac{\rho}{a}\right) J_m\left(x_n^m \frac{\rho'}{a}\right) \exp[\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')] \end{aligned} \tag{3.3.22c}$$

当 $k = x_n^m/a$ 时, 必须引进广义 Green 函数. 由 Green 函数的唯一性, 上式应与式 (3.3.21c) 相同, 故右边应相等.

### 3.3.3 无界空间的 Green 函数和基本解

无界空间的 Green 函数称为**基本解**. 一般在有界空间问题中, 可令 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, 其中 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为基本解, 它满足方程

$$\boldsymbol{L}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.3.23a}$$

但不一定满足边界条件. 由于 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 含有奇点, 可望 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 在整个区域内正则且无奇点 (如果 $\boldsymbol{L}$ 是 Laplace 算子, 则 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是调和函数). 由 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足的边界条件

$$\left.\left[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\right|_{\partial G}=0 \tag{3.3.23b}$$

故 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 应满足

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G\\ \left.\left[\alpha G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\beta\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\right|_{\partial G}=-\left.\left[\alpha G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\beta\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\right|_{\partial G}\end{gathered} \tag{3.3.23c}$$

把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 分成 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的优点在于: $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 容易求解, 并包含了 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的奇性, 而 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 则可用级数法求得. 由于 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 无奇性, 它的级数表达式将有较好的收敛性.

下面考虑几个方程的基本解.

(1) Laplace 算子 $\boldsymbol{L}=-\nabla^2$

$$-\nabla^2G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3.3.24a}$$

在无界空间中 $-\nabla^2$ 的本征函数为

$$\psi_k(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{3.3.24b}$$

本征值为 $k^2$, 由于无边界条件约束, 本征值构成连续谱, 即 $k$ 可取任意值. 由式 (3.3.9c)

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_k\frac{\psi_k(\boldsymbol{r})\psi_k^*(\boldsymbol{r}')}{k^2}=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_k\frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2} \tag{3.3.24c}$$

积分代替求和应有

$$\begin{aligned}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2}k^2\sin\vartheta_k\mathrm{d}\vartheta_k\mathrm{d}\varphi_k\mathrm{d}k\end{aligned} \tag{3.3.25a}$$

由于在积分过程中 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 是常量, 可取 $\boldsymbol{k}$ 与 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 的夹角为 $\vartheta_k$, 即

$$\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\vartheta_k \tag{3.3.25b}$$

于是上式角度部分可简单积出

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^\infty \frac{\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{k}\mathrm{d}k = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.25c}$$

(2) Helmholtz 算子 $\boldsymbol{L} = -(\nabla^2+\lambda)$

$$-(\nabla^2+\lambda)G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3.3.26a}$$

用 Fourier 积分法求之, 设

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \int g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}')\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{3.3.26b}$$

代入方程 (3.3.26a) 可得

$$g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')}{k^2-\lambda} \tag{3.3.26c}$$

其中利用

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{3.3.27a}$$

因此

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2-\lambda}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{3.3.27b}$$

分两种情况讨论

(a) $\lambda<0(\lambda=0$ 即为上小节情形), 可令 $\lambda=-|\lambda|$

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2+|\lambda|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{3.3.28a}$$

角度部分积出后再利用围道积分, 可求得

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(-\sqrt{|\lambda|}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.28b}$$

(b) $\lambda>0$, 可令 $\lambda=q^2$, 代入式 (3.3.27b)

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2-q^2}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{3.3.29a}$$

对角度部分积分, 利用被积函数的奇偶性, 把对 $k$ 的积分扩展到负无限大得到

$$\begin{aligned}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\vartheta_k)}{k^2-q^2}\sin\vartheta_k\mathrm{d}\vartheta_k\mathrm{d}\varphi_k k^2\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_0^\pi\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\vartheta_k)}{k^2-q^2}\sin\vartheta_k\mathrm{d}\vartheta_k k^2\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{8\pi^2\mathrm{i}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^\infty\left[\frac{k\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{k^2-q^2}-\frac{k\exp(-\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{k^2-q^2}\right]\mathrm{d}k\end{aligned}\tag{3.3.29b}$$

当 $k=\pm q$ 时, 上式分母为零, 实轴上有二个一阶极点. 为了求积分, 引进虚数

$$\lambda=(q+\mathrm{i}\varepsilon)^2,\ \varepsilon>0,\ (\varepsilon\to 0)\tag{3.3.30a}$$

首先考虑积分

$$I_+=\int_{-\infty}^\infty\frac{k\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{[k-(q+\mathrm{i}\varepsilon)][(k+(q+\mathrm{i}\varepsilon)]}\mathrm{d}k\tag{3.3.30b}$$

有二个一阶极点 $k_1=q+\mathrm{i}\varepsilon$; $k_2=-q-\mathrm{i}\varepsilon$ 分别位于上、下半平面, 取上半平面围道 (如图 3.3.1(a)), 则在围道内有极点 $k_1^+=q+\mathrm{i}\varepsilon$, 于是

$$I_+=2\pi\mathrm{i}\frac{(q+\mathrm{i}\varepsilon)\exp[\mathrm{i}(q+\mathrm{i}\varepsilon)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]}{2(q+\mathrm{i}\varepsilon)]}=\mathrm{i}\pi\exp(\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\tag{3.3.30c}$$

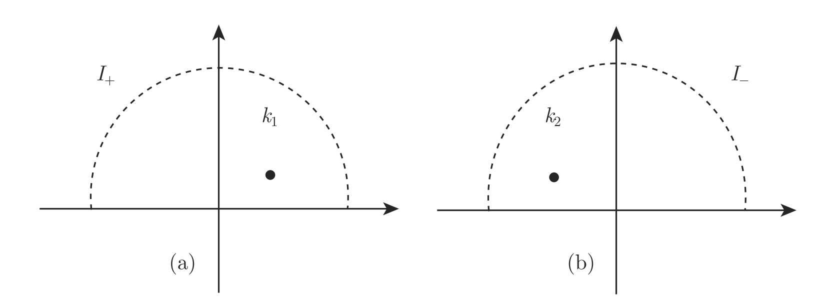



图 3.3.1 积分 $L_+$ 和 $L_-$ 的围道选择

其次考虑积分

$$K_+=\int_{-\infty}^\infty\frac{k\exp(-\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{[k-(q+\mathrm{i}\varepsilon)][(k+(q+\mathrm{i}\varepsilon)]}\mathrm{d}k\tag{3.3.31a}$$

必须取下半平面的围道 (围道方向相反, 故出现 "-"), 得到

$$K_+=-\mathrm{i}\pi\exp(\mathrm{i}kq|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)=-I_+\tag{3.3.31b}$$

把式 (3.3.30c) 和 (3.3.31b) 代入式 (3.3.29b) 得到

$$G_0^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\tag{3.3.31c}$$

不难表明上式满足 Sommerfeld 辐射条件式 (1.3.34b).

必须注意的是, 式 (3.3.30a) 中虚数 $\varepsilon$ 的符号是很重要的, 例如式 (3.3.30c) 中将出现因子 $\mathrm{e}^{-\varepsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$, 表明波随传播距离指数衰减, 这是符合物理要求的. 如果式 (3.3.30a) 取 $\lambda=(q-\mathrm{i}\varepsilon)^2$, $\varepsilon>0$, $(\varepsilon\to 0)$, 考虑积分

$$\begin{aligned} I_- &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{[k-(q-\mathrm{i}\varepsilon)][(k+(q-\mathrm{i}\varepsilon)]}\mathrm{d}k \\ K_- &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\exp(-\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{[k-(q-\mathrm{i}\varepsilon)][(k+(q-\mathrm{i}\varepsilon)]}\mathrm{d}k \end{aligned} \tag{3.3.32a}$$

显然, 对于积分 $I_-$, 位于上半平面的极点是 $k_2=-q+\mathrm{i}\varepsilon$(如图 3.3.1(b)); 而对于积分 $K_-$, 位于下半平面的极点是 $k_1=q-\mathrm{i}\varepsilon$, 故 $I_-=\mathrm{i}\pi\exp(-\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)=-K_-$, 代入式 (3.3.29b) 得到

$$G_0^-(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(-\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.32b}$$

显然, 上式满足 Sommerfeld 辐射条件式 (1.3.35a). 最后, 统一得到

$$G_0^{\pm}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\pm\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.32c}$$

上式中正负号有十分重要的意义: 物理上 $G_0^+$ 称为 “发射”Green 函数, 而 $G_0^-$ 称为 “接收”Green 函数.

对一维和二维 Helmholtz 方程

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+q^2\right)G_0(x,x') &= \delta(x-x') \\ -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+q^2\right)G_0(x,x') &= \delta(x-x')\delta(y-y') \end{aligned} \tag{3.3.33a}$$

其中 $q^2>0$, Green 函数分别为

$$G_0^{\pm}(x,x') = \pm\frac{\mathrm{i}}{2q}\exp(\pm\mathrm{i}q|x-x'|) \tag{3.3.33b}$$

$$G_0^{\pm}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \pm\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(\sigma)}(q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{3.3.33c}$$

上式中上标 “+” 和 “-” 分别对应于 $\sigma=1$ 和 2, $H_0^{(p)}(q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 为第 $p$ 类零级 Hankel 函数. 如果从式 (3.3.27b) 出发, 二维情况修正为

$$\begin{aligned} G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2-q^2}\mathrm{d}^2\boldsymbol{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}k\mathrm{d}k\int_0^{2\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\varphi_k)}{k^2-q^2}\mathrm{d}\varphi_k \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{k}{k^2-q^2}J_0(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}k \end{aligned} \tag{3.3.34a}$$

其中利用了零阶 Bessel 函数的积分形式

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(\mathrm{i}x\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi \tag{3.3.34b}$$

利用关系 $2J_0(x)=H_0^{(1)}(x)-H_0^{(1)}(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})$ 并把对 $k$ 的积分扩展到负无限大, 式 (3.3.34a) 变成

$$G_0^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{k^2-q^2}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}k \tag{3.3.34c}$$

引进虚数 $\lambda=(q+\mathrm{i}\varepsilon)^2$, $\varepsilon>0$, $(\varepsilon\to 0)$, 上式积分的二个一阶极点为: $k_1=q+\mathrm{i}\varepsilon$ 和 $k_2=-(q+\mathrm{i}\varepsilon)$. 取上半平面的围道, 只有 $k_1=q+\mathrm{i}\varepsilon$ 在围道内, 故得到

$$G_0^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{4}\frac{(q+\mathrm{i}\varepsilon)}{(q+\mathrm{i}\varepsilon)}H_0^{(1)}[(q+\mathrm{i}\varepsilon)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)]=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{3.3.34d}$$

注意: $k=0$ 是积分式 (3.3.34c) 的枝点, 但对积分的贡献为零.

如果利用关系 $2J_0(x)=H_0^{(2)}(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})-H_0^{(2)}(x)$, 并把对 $k$ 的积分扩展到负无限大, 式 (3.3.34a) 变成

$$\begin{aligned}G_0^-(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{k}{k^2-q^2}[H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})-H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)]\mathrm{d}k\\&=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{k^2-q^2}H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}k\end{aligned} \tag{3.3.35a}$$

引进虚数 $\lambda=(q-\mathrm{i}\varepsilon)^2$, $\varepsilon>0$, $(\varepsilon\to 0)$, 上式积分的二个一阶极点为: $k_1=q-\mathrm{i}\varepsilon$ 和 $k_2=-q+\mathrm{i}\varepsilon$. 取下半平面的围道, 只有极点 $k_1=q-\mathrm{i}\varepsilon$ 在围道内, 故得到

$$G_0^-(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(2)}(q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{3.3.35b}$$

显然, $G_0^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $G_0^-(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 分别满足 Sommerfeld 辐射条件式 (1.3.34b) 和 (1.3.35a), 前者为二维 “发射”Green 函数, 而后者为二维 “接收”Green 函数.

由上各式可看出 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 只与相对距离 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 有关, 这是容易理解的. 在无边界情况下, 方程 $\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的解应对称于矢量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$. 因此, 我们只要求其依赖于 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 的解即可. 当 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$ 时, 显然有 $\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0$, 取含有奇性 (在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 处) 的解就是我们要的基本解. 但仍可差一相乘常数, 这个常数由下法决定: 因 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足 $\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$, 对方程两边积分应有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau=1 \tag{3.3.36a}$$

其中 $\varepsilon$ 为包含 $\boldsymbol{r}'$ 点的小球. 下面分几种情况讨论

(1) 一维 $\boldsymbol{L}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)$, 式 (3.3.36a) 变成

$$\lim_{x\to x'} p(x)\ \frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}=-1 \tag{3.3.36b}$$

上式即为方程 (3.2.17b) 中第二式;

(2) 二维 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(x,y)\nabla]+q(x,y)$, 由式 (3.3.36a)

$$\begin{aligned}-1&=\int_{\varepsilon\to 0}[\nabla\cdot(p\nabla G)+qG]\mathrm{d}\tau=\int_{\varepsilon\to 0}\nabla\cdot(p\nabla G)\mathrm{d}\tau\\&=p(\boldsymbol{r}')\oint_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}L=p(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G}{\partial R}\cdot 2\pi\varepsilon\,|_{\varepsilon\to 0}\end{aligned} \tag{3.3.37a}$$

其中 $R\equiv|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$, $\mathrm{d}L$ 为积分线元. 当 $\varepsilon\to 0$ 时, $\varepsilon=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=R$, 取 $\boldsymbol{r}'=0$, 则

$$\lim_{r\to 0}\left(2\pi rp\frac{\partial G}{\partial r}\right)=-1 \tag{3.3.37b}$$

(3) 三维 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$, 由式 (3.3.36a)

$$-1=\int_{\varepsilon\to 0}\nabla\cdot p(\boldsymbol{r})\nabla G\mathrm{d}\tau=\iint_{\varepsilon\to 0}p\frac{\partial G}{\partial R}\mathrm{d}S=p(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G}{\partial R}\ 4\pi R^2\Big|_{\varepsilon\to 0} \tag{3.3.38a}$$

其中 $R\equiv|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$, 取 $\boldsymbol{r}'=0$, 则

$$\lim_{r\to 0}4\pi r^2p\frac{\partial G}{\partial r}=-1 \tag{3.3.38b}$$

由于 $p$ 在 $r\to 0$ 处无奇性, 上面各式中都可移出极限号. 由式 (3.3.36b)、(3.3.37b) 和 (3.3.38b) 可知, 当 $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'$ 时, $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的奇性分别如下

当 $n=1$ 时

$$\lim_{x\to x'}G(x,x')=-\frac{1}{2p(x')}|x-x'| \tag{3.3.39a}$$

当 $n=2$ 时

$$\lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{2\pi p(\boldsymbol{r}')}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \tag{3.3.39b}$$

当 $n=3$ 时

$$\lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi p(\boldsymbol{r}')}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.39c}$$

下面用上法来证明式 (3.3.32c)、(3.3.33b) 和 (3.3.33c). 考虑方程

$$-\nabla^2u+qu=0 \tag{3.3.40a}$$

仅仅依赖于 $r$ 的解 $u=u(r)$, 上式化成

$$\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial u(r)}{\partial r}-qu(r)=0 \tag{3.3.40b}$$

其中 $n=1,2,3$ 是空间的维数.

**Laplace 方程** $q=0$, 不同维数的 Green 函数讨论如下.

(1) 当 $n=1$ 时, $u(r)=c|x|$, 比较式 (3.3.39a) 得到 $c=-1/2$, 故

$$G_0(x,x_0)=-\frac{1}{2}|x-x_0| \tag{3.3.41a}$$

(2) 当 $n=2$ 时, $u(r)=c\ln r$, 比较式 (3.3.39b) 得到 $c=-1/2\pi$, 故

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.41b}$$

(3) 当 $n=3$ 时, $u(r)=c/r$, 比较式 (3.3.39c) 得到 $c=1/4\pi$, 故

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.41c}$$

**Helmholtz 方程** $q\neq 0$, 不同维数的 Green 函数讨论如下.

(1) 当 $n=1$ 时, 通解为

$$\begin{aligned} u(x)&=c_1\exp(\sqrt{q}x)+c_2\exp(-\sqrt{q}x),\ (q>0)\\ u(x)&=c_1\exp(\mathrm{i}\sqrt{|q|}x)+c_2\exp(-\mathrm{i}\sqrt{|q|}x),\ (q<0) \end{aligned} \tag{3.3.42a}$$

其中 $c_1$ 和 $c_2$ 由无限远点条件及式 (3.3.39a) 决定. 如果 $q>0$, 当 $x\to\infty$ 时, 要求 $u(x)|_{x\to\infty}\to 0$, 故 $c_1=0$；由

$$\lim_{x\to 0}u(x)\approx c_2(-\sqrt{q}|x|) \tag{3.3.42b}$$

比较式 (3.3.39a), 求得 $c_2=1/2\sqrt{q}$, 故

$$G_0(x,x')=\frac{1}{2\sqrt{q}}\exp(-\sqrt{q}|x-x'|) \tag{3.3.42c}$$

如果 $q<0$, 根据物理意义, 式 (3.3.42a) 的二个解中一个代表向左传播波, 另一个代表向右传播波, 两种情况可分别令

$$c_1=\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{|q|}},\quad c_2=0;\quad c_1=0,\quad c_2=-\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{|q|}} \tag{3.3.43a}$$

如令 $|q|=k$ 则有

$$G_0^{\pm}(x,x')=\pm\frac{\mathrm{i}}{2k}\exp(\pm\mathrm{i}k|x-x'|) \tag{3.3.43b}$$

上式即为式 (3.3.33b).

(2) 当 $n=2$ 时, 式 (3.3.40b) 在 $\rho=0$ 处有奇性的解是

$$\begin{aligned} u(r) &= c_0 K_0(\sqrt{q}\rho),\ (q>0) \\ u(r) &= c_1 H_0^{(\sigma)}(\sqrt{|q|}\rho),\ (q<0) \end{aligned} \tag{3.3.44a}$$

其中 $K_0$ 和 $H_0^{(\sigma)}$ 分别为第二类虚宗量 Bessel 函数和零级第 $\sigma$ 类 Hankel 函数. 当 $z\to 0$ 时有近似式

$$H_0^{(\sigma)}(z) \approx \pm\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\ln z\ ;\ K_0(z)\approx -\ln z,\ z\to 0 \tag{3.3.44b}$$

由式 (3.3.39b), $c_0=1/2\pi$ 和 $c_1=\pm\mathrm{i}/4$, 于是

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{2\pi}K_0(\sqrt{q}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|),\ (q>0) \tag{3.3.45a}$$

以及

$$G_0^{\pm}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \pm\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(\sigma)}(\sqrt{|q|}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|),\ (q<0) \tag{3.3.45b}$$

(3) 当 $n=3$ 时, 令 $u(r)=\chi(r)/r$ 代入方程 (3.3.40b) 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi(r)}{\mathrm{d}r^2} - q\chi(r) = 0 \tag{3.3.46a}$$

上式的解为

$$\begin{aligned} \chi(r) &= c_0\exp(-\sqrt{q}r),\ (q>0) \\ \chi(r) &= c_1\exp(\pm\mathrm{i}\sqrt{|q|}r),\ (q<0) \end{aligned} \tag{3.3.46b}$$

利用式 (3.3.39c), 容易求得 $c_0=c_1=1/4\pi$. 于是

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp(-\sqrt{q}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\ ,\ q>0 \\ \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp(\pm\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|),\ \ -q=k^2>0 \end{cases} \tag{3.3.46c}$$

### 3.3.4　镜像法求边值问题的 Green 函数

当所考虑问题的区域比较简单时, 可用镜像法求解 Green 法. 镜像法求解 Green 函数的基本思想是: 把有界空间的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 表示成基本解 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和某个函数 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 之和, 即 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$. 然后求出适当的 $G_1(\boldsymbol{r},r')$ 使 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 在边值上满足相应的齐次条件. 下面举几例说明之.

**例 3.3.4**　上半空间 Laplace 方程第一和第二类边值问题的 Green 函数. 首先考虑第一类边值问题

$$\begin{aligned} -\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\ z>0,\ x,y\in(-\infty,\infty) \\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{z=0} &= 0,\ x,y\in(-\infty,\infty) \end{aligned} \tag{3.3.47a}$$

Laplace 方程的基本解

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.47b}$$

其中 $\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$. 在边界上

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{z=0}=\frac{1}{4\pi\sqrt{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2+z'^2}} \tag{3.3.47c}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}=(x,y)$ 和 $\boldsymbol{\rho}'=(x',y')$. 为了在边界上满足 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0$, 须选择 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 使

$$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{z=0}=-G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{z=0} \tag{3.3.47d}$$

并且在上半空间内 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足 Laplace 方程. 于是, 如图 3.3.2, 可取 $P'$ 的镜像点 $P''$: $\boldsymbol{r}''=(x',y',-z')$($P''$ 是 $P'$ 关于平面 $z=0$ 的反演点), 在 $P''$ 点放一点源, 该点源产生的场和在边界上的值为

$$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|},\ G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{z=0}=-\frac{1}{4\pi\sqrt{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2+z'^2}} \tag{3.3.48a}$$

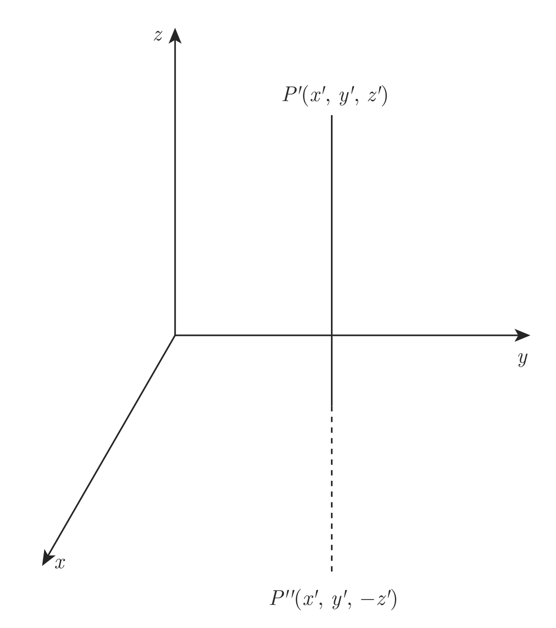



图 3.3.2 $P'$ 的镜像点 $P''$

显然取 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 能满足方程 (3.3.47a), 而且 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 在 $z>0$ 内满足 Laplace 方程. 因此, 求得了 Laplace 方程第一边值问题上半空间的 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|}\right) \tag{3.3.48b}$$

对第二类边值问题, 不难验证 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|}\right) \tag{3.3.48c}$$

取 $G$ 为以 $x-y$ 平面为底面、半径为 $R$ 的半球, $\partial G$ 为 $x-y$ 平面和半球球面, 当 $R\to\infty$ 时, 只要 $u\to 0$ 足够快, 半球面上的面积分为零, 方程 (3.3.5b) 仍成立. 因此, 第一类边值问题

$$\nabla^2 u(x,y,z)=0,\ z>0;\ u(x,y,z)\,|_{z=0}=f(x,y) \tag{3.3.49a}$$

的解为

$$u(x,y,z)=-\iint_{xy} f(x',y')\left.\frac{\partial G(x,y,z,x',y',z')}{\partial n'}\right|_{z'=0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{3.3.49b}$$

其中

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G(x,y,z,x',y',z')}{\partial n'}\right|_{z'=0}&=-\left.\frac{\partial G(x,y,z,x',y',z')}{\partial z'}\right|_{z'=0}\\&=-\frac{1}{2\pi}\frac{z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}\end{aligned} \tag{3.3.49c}$$

最后, 得到方程 (3.3.49a) 的解

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\iint_{xy}\frac{f(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}} \tag{3.3.49d}$$

对第二类边值问题, 不难得到类似形式的解. 对第三类边界条件, 单一的镜像点已不可能满足边界条件, 解决方法是, 设想在 $P'(x',y',z')$ 与 $P''(x',y',-z')$ 连线上, 从 $-z'$ 到 $-\infty$ 存在一系列强度连续分布的镜像点, 通过选择适当的强度分布来满足第三类边界条件.

**例 3.3.5** 求上半空间 Helmholtz 方程第一和二类边值问题的 Green 函数.

$$-(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\ z>0,\ x,y\in(-\infty,\infty) \tag{3.3.50a}$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{z=0}=0,\ \text{或者}\quad \left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\ x,y\in(-\infty,\infty) \tag{3.3.50b}$$

基本解为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{3.3.50c}$$

而

$$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|}\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|) \tag{3.3.50d}$$

其中 $\boldsymbol{r}''=(x',y',-z')$ 为镜象点的坐标. 于是, 对第一类边界条件

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'') \tag{3.3.51a}$$

对第二类边界条件

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'') \tag{3.3.51b}$$

因此, 第二类边值问题

$$-(\nabla^2+k^2)u(x,y,z)=0,\ z>0;\quad \left.\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0}=f(x,y) \tag{3.3.51c}$$

的解为

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\iint_{xy}f(x',y')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{z'=0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\\&=\frac{1}{2\pi}\iint_{xy}\frac{f(x',y')\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_1}}{R_1}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\end{aligned} \tag{3.3.51d}$$

其中

$$R_1\equiv\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2} \tag{3.3.51e}$$

是平面上一点 $(x',y',0)$ 到空间一点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 的距离.

**例 3.3.6** 考虑半径为 $a$ 球内 Laplace 方程的第一类边值问题

$$\begin{gathered}-\nabla^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\ (r,r')<a\\G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=0\end{gathered} \tag{3.3.52a}$$

基本解为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.52b}$$

现在来求 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 使 $[G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]|_{r=a}=0$. 为此作 $P'$ 的镜像点 $P_1$,$P_1$ 在 $\overline{OP'}$ 的延长线上且 $P_1$ 与原点的距离为: $\overline{OP_1}=a^2/r'$(其中 $r'=\overline{OP'}$ ), $P_1$ 的位置矢径写作 $\boldsymbol{r}_1=a^2\boldsymbol{r}'/|\boldsymbol{r}'|^2$. 于是, 取 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为 $P_1$ 处点源产生的场

$$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{c}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}=\frac{c}{4\pi\,|\boldsymbol{r}-a^2\boldsymbol{r}'/|\boldsymbol{r}'|^2|} \tag{3.3.52c}$$

式中常数 $c$ 是镜像点的强度, 可有 $[G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]|_{r=a}=0$ 决定

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=&\frac{1}{4\pi\sqrt{a^2+r'^2-2ar'\cos\Theta_P}}\\&+\frac{1}{4\pi\sqrt{a^2+a^4/r'^2-(2a^3/r')\cos\Theta_P}}\end{aligned} \tag{3.3.52d}$$

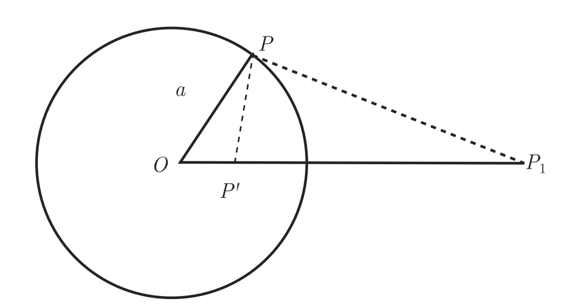



图 3.3.3 镜像法求球内第一边值问题 Green 函数

其中 $\Theta_P$ 为球面上任意一点 $P$ 的矢径与 $P'$ 点的矢径之间的夹角, 上式即为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{r=a} = \frac{1}{4\pi}\left(1+\frac{r'c}{a}\right)\frac{1}{\sqrt{r'^2+a^2-2ar'\cos\Theta_P}} \tag{3.3.53a}$$

显然, 只要取 $c=-a/r'$, 则 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=0$. 于是求得方程 (3.3.52a) 的解

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\frac{a}{r'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-a^2\boldsymbol{r}'/|\boldsymbol{r}'|^2|}\right) \tag{3.3.53b}$$

容易求得

$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right|_{r'=a} = \left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial r'}\right|_{r'=a} = \frac{1}{4\pi a}\frac{r^2-a^2}{(a^2+r^2-2ra\cos\Theta)^{3/2}}$$

其中 $\cos\Theta=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'/(|\boldsymbol{r}|\cdot|\boldsymbol{r}'|)$ 为矢径 $\boldsymbol{r}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}'$ 的夹角. 于是, 如果给定球面上

$$u(r,\vartheta,\varphi)|_{r=a} = f(\vartheta,\varphi) \tag{3.3.54a}$$

则球内 Laplace 方程的解为

$$u(r,\vartheta,\varphi) = -\iint_{r'=a} f(\vartheta',\varphi')\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_{r'=a}\mathrm{d}S' \tag{3.3.54b}$$

最后得到解为

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\vartheta',\varphi')\sin\vartheta'\mathrm{d}\vartheta'\mathrm{d}\varphi'}{(a^2+r^2-2ra\cos\Theta)^{3/2}} \tag{3.3.54c}$$

其中 $\cos\Theta=\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')+\cos\vartheta\cos\vartheta'$. 上式称为**球 Possion 公式**, 而分离变量解式 (2.5.7d) 是无穷级数形式, 不难证明两者的一致性. 注意：对第二、三类边界条件, 无法通过镜像法求 Green 函数.

**例 3.3.7** 求圆内二维 Laplace 方程第一类边值问题

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u(\rho,\varphi)=0,\quad \rho<a\ ,\ \varphi\in[0,2\pi]\\&u(\rho,\varphi)|_{r=a}=f(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi]\end{aligned} \tag{3.3.55a}$$

的解. 首先求 Green 函数, 仍参看球内问题, 如图 3.3.3 所示 (只要把它理解为平面即可), $P'$ 的镜像点为 $P_1$,$P_1$ 在 $\overline{OP'}$ 的延长线上, 且 $\overline{OP_1} \equiv \rho_1 = a^2/\rho'$. 于是

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|};\ G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} - \frac{c}{4\pi} \tag{3.3.55b}$$

其中 $\boldsymbol{r}_1$ 是 $P_1$ 点的矢径, 常数 $c$ 由 $[G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]_{\rho=a} = 0$ 决定

$$\begin{aligned}[G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]_{\rho=a} &= \frac{1}{4\pi}\left[\left(\ln\frac{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\Theta}{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\Theta}\right)\bigg|_{\rho=a} - c\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\ln\frac{\rho'^2}{a^2} - c\right) = 0\end{aligned}$$

于是 $c = -2\ln(a/\rho')$. 因此 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \ln\left(\frac{a}{\rho'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\right)\right] \tag{3.3.56a}$$

故有

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial G(\rho,\varphi,\rho',\varphi')}{\partial n'}\right]_{\rho'=a} &= \left[\frac{\partial G(\rho,\varphi,\rho',\varphi')}{\partial \rho'}\right]_{\rho'=a} \\ &= -\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2\rho a\cos\Theta}\end{aligned} \tag{3.3.56b}$$

而在平面极坐标系中 $\cos\Theta = \cos(\varphi-\varphi')$, 于是有

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi) &= -\int_{\rho'=a} f(\varphi')\left[\frac{\partial G(\rho,\varphi,\rho',\varphi')}{\partial n'}\right]_{\rho'=a}\mathrm{d}S' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-\rho^2)f(\varphi')}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\varphi')+\rho^2}\mathrm{d}\varphi'\end{aligned} \tag{3.3.56c}$$

上式就是 **Possion 公式**, 与式 (1.3.7b) 相同.

### 3.3.5 曲线坐标中的基本解

在研究波的散射等问题中, 把基本解展开成球函数或者柱函数是必要的. 我们在曲线坐标中求 Laplace 方程和 Helmholtz 方程的基本解, 然后由解的唯一性, 就得到了相应的展开式.

**Laplace 方程** 基本解由式 (3.3.25c) 表示, 另一方面, 它满足定解问题

$$-\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.3.57a}$$

首先考虑球坐标展开, 把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 写成

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} g_{lm}(r,r')Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi') \tag{3.3.57b}$$

代入方程 (3.3.57a) 应有

$$-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]g_{lm}(r,r')=\frac{1}{r^2}\delta(r-r') \tag{3.3.57c}$$

上式的齐次方程为 Euler 方程, 根据构造法, 取 $g_{lm}^1(r)=r^l$ 和 $g_{lm}^2(r)=r^{-(l+1)}$, 故

$$g_l(r,r')\equiv g_{lm}(r,r')=\frac{1}{2l+1}\begin{cases}\dfrac{1}{r'}\left(\dfrac{r}{r'}\right)^l, & r\leqslant r'\\[2ex] \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{r'}{r}\right)^l, & r\geqslant r'\end{cases} \tag{3.3.58a}$$

于是, 求得球坐标中的展开关系为

$$\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}g_l(r,r')Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi') \tag{3.3.58b}$$

其次, 考虑圆柱坐标展开, 把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 写成

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}g_m(\lambda,z)J_{|m|}(\lambda\rho)J_{|m|}(\lambda\rho')\mathrm{d}\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')} \tag{3.3.59a}$$

代入方程 (3.3.57a) 得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}-\lambda^2\right)g_m(\lambda,z)=-\frac{1}{2\pi}\delta(z-z') \tag{3.3.59b}$$

取构造解

$$g_m(\lambda,z)=\begin{cases}A\exp[-\lambda(z-z')], & z>z'\\ B\exp[-\lambda(z'-z)], & z<z'\end{cases} \tag{3.3.59c}$$

由连接条件得到 $A=B=1/(4\pi\lambda)$. 于是得到 $g_m(\lambda,z)=(4\pi\lambda)^{-1}\mathrm{e}^{-\lambda|z-z'|}$, 代入式 (3.3.59a) 得到柱坐标中的展开关系

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=&\frac{1}{4\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda}J_{|m|}(\lambda\rho')J_{|m|}(\lambda\rho)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda|z-z'|}\mathrm{d}\lambda\right]\\&\times\exp[\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')]\end{aligned} \tag{3.3.59d}$$

**Helmholtz 方程** 基本解由式 (3.3.32c) 表示, 另一方面, 它满足定解问题

$$-(\nabla^2+q^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.3.60a}$$

首先考虑球坐标展开, 把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 写成式 (3.3.57b), $g_{lm}(r,r')$ 满足的方程为

$$-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)+q^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]g_{lm}(r,r')=\frac{1}{r^2}\delta(r-r') \tag{3.3.60b}$$

齐次方程为球 Bessel 方程, 当 $r > r'$ 时, 取向外辐射形式的解, 而当 $r < r'$ 时, 取驻波形式的解 (注意：当 $r < r'$ 时, 包含原点, 故 $n_l(kr)$ 不能要), 即

$$g_{lm}(r) = \begin{cases} A_l h_l^{(1)}(qr), \ r > r' \\ B_l j_l(qr), \ r < r' \end{cases} \tag{3.3.60c}$$

其中系数由连接条件决定

$$\begin{aligned} g_{lm}(r)|_{r=r'-\varepsilon} &= g_{lm}(r)|_{r=r'+\varepsilon} \\ \left.\frac{\mathrm{d}g_{lm}(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r'-\varepsilon} - \left.\frac{\mathrm{d}g_{lm}(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r'+\varepsilon} &= -\frac{1}{r^2} \end{aligned} \tag{3.3.60d}$$

把式 (3.3.60c) 代入上式得到

$$\begin{aligned} A_l h_l^{(1)}(qr') &= B_l j_l(qr') \\ A_l h_l^{(1)'}(qr') - B_l j_l'(qr') &= \frac{1}{r'^2} \end{aligned} \tag{3.3.61a}$$

因此

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{j_l(qr')}{r'^2\left[j_l(qr')h'^{(1)}_l(qr') - h_l^{(1)}(qr')j'_l(qr')\right]} \\ B_l &= \frac{h_l^{(1)}(qr')}{r'^2\left[j_l(qr')h'^{(1)}_l(qr') - h_l^{(1)}(qr')j'_l(qr')\right]} \end{aligned} \tag{3.3.61b}$$

而球 Bessel 函数和球 Hankel 函数都是球 Bessel 方程的解, 不难证明

$$r'^2\left[j_l(qr')h'^{(1)}_l(qr') - h_l^{(1)}(qr')j'_l(qr')\right] = 常数\, C \tag{3.3.61c}$$

利用球 Bessel 函数和球 Hankel 函数的渐近展开不难得到 $C = \mathrm{i} \,/\, q$. 最后得到

$$g_{lm}(r) = -\mathrm{i}q \begin{cases} h_l^{(1)}(qr)j_l(qr'), \ r > r' \\ j_l(qr)h_l^{(1)}(qr'), \ r < r' \end{cases} \tag{3.3.62a}$$

代入方程 (3.3.57b) 得到球坐标中基本解的展开式

$$\begin{aligned} \frac{\exp(\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = &-\mathrm{i}q\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi') \\ &\times \begin{cases} h_l^{(1)}(qr)j_l(qr'), \ r > r' \\ j_l(qr)h_l^{(1)}(qr'), \ r < r' \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3.62b}$$

上式取复共轭就得到 “接收”Green 函数的展开, 或者在式 (3.3.60c) 中取 $h_l^{(2)}(qr)$.

其次，考虑圆柱坐标展开，把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 写成式 (3.3.59a) 的形式，代入方程 (3.3.60a) 得到

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+(q^2-\lambda^2)\right]g_m(\lambda,z)=-\frac{1}{2\pi}\delta(z-z') \tag{3.3.63a}$$

取构造解为

$$g_m(\lambda,z)=\begin{cases}A\exp[\mathrm{i}\sigma(z-z')],\ z>z'\\ B\exp[\mathrm{i}\sigma(z'-z)],\ z<z'\end{cases} \tag{3.3.63b}$$

式中 $\sigma=\sqrt{q^2-\lambda^2}$(当 $q>\lambda$ 时) 或者 $\sigma=\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2-q^2}$(当 $q<\lambda$ 时). 由连接条件得到 $A=B=A=-1/(4\pi\mathrm{i}\sigma)$, 于是 $g_m(\lambda,z)=-1/(4\pi\mathrm{i}\sigma)\exp(\mathrm{i}\sigma|z-z'|)$, 代入式 (3.3.59a) 得到柱坐标中的展开关系

$$\begin{aligned}\frac{\exp[\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}&\left[\int_0^\infty\frac{1}{\sigma}J_m(\lambda\rho')J_m(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma|z-z'|}\lambda\mathrm{d}\lambda\right]\\&\times\exp[\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')]\end{aligned} \tag{3.3.63c}$$

由于积分区间是无穷大, 当 $\lambda>q$ 时, $\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda^2-q^2}|z-z'|}$ 随 $|z-z'|$ 指数衰减! 上式取复共轭就得到 "接收"Green 函数的展开.

当 $\boldsymbol{r}'=(0,0,z')$, 即点源在 $z$ 轴上, $\rho'=0$, 上式简化成

$$\frac{\exp\left[\mathrm{i}q\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}\right]}{4\pi\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}=\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\sigma}J_0(\lambda\rho)\exp\left(\mathrm{i}\sigma|z-z'|\right)\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{3.3.64a}$$

其中 $\rho^2=x^2+y^2$. 利用函数关系 $2J_0(\lambda\rho)=H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_0^{(1)}(\lambda\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})$, 上式变成

$$\frac{\exp\left[\mathrm{i}q\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}\right]}{4\pi\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}=\frac{\mathrm{i}}{8\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{\sigma}H_0^{(1)}(\lambda\rho)\exp\left(\mathrm{i}\sigma|z-z'|\right)\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{3.3.64b}$$

注意：上式表示成向外辐射的行波叠加形式, 物理意义比式 (3.3.64a) 更清楚.

**二维空间** Green 函数满足方程

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]G+q^2G=-\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi') \tag{3.3.65a}$$

令

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}g_m(\rho)\exp(\mathrm{i}m\varphi) \tag{3.3.65b}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(\rho,\varphi)$ 和 $\boldsymbol{r}'=(\rho',\varphi')$ 是二维矢径. 代入方程 (3.3.65a)

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(q^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\right]g_m(\rho)=-\frac{1}{2\pi\rho}\delta(\rho-\rho')\exp(-\mathrm{i}m\varphi') \tag{3.3.65c}$$

取构造解为

$$g_m^1(\rho) = \begin{cases} A_m H_m^{(1)}(q\rho), \rho > \rho' \\ B_m J_m(q\rho), \rho < \rho' \end{cases} \tag{3.3.66a}$$

上式中 $\rho > \rho'$ 取向外辐射的解, 而 $\rho < \rho'$ 时取原点有限的解. 由方程 (3.2.17b) 得到

$$\begin{aligned} &A_m H_m^{(1)}(q\rho') - B_m J_m(q\rho') = 0 \\ &A_m H'^{(1)}_m(q\rho') - B_m J'_m(q\rho') = \frac{1}{2\pi\rho'} \exp(-\mathrm{i}m\varphi') \end{aligned} \tag{3.3.66b}$$

不难求得

$$A_m = -\frac{1}{2\pi\rho'} \cdot \frac{J_m(q\rho') \exp(-\mathrm{i}m\varphi')}{J_m(q\rho')H'^{(1)}_m(q\rho') - H_m^{(1)}(q\rho')J'_m(q\rho')} \tag{3.3.66c}$$

$$B_m = \frac{1}{2\pi\rho'} \cdot \frac{H_m^{(1)}(q\rho') \exp(-\mathrm{i}m\varphi')}{J_m(q\rho')H'^{(1)}_m(q\rho') - H_m^{(1)}(q\rho')J'_m(q\rho')} \tag{3.3.66d}$$

而 Bessel 函数和 Hankel 函数都是 Bessel 方程的解, 不难证明

$$\rho' \left[ J_m(q\rho')H'^{(1)}_m(q\rho') - H_m^{(1)}(q\rho')J'_m(q\rho') \right] = \text{常数}\, C \tag{3.3.67a}$$

利用 Bessel 函数和 Hankel 函数的渐近展开不难得到 $C = -2\mathrm{i} / \pi$. 因此, 我们得到展开关系

$$H_0^{(1)}(q|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')} \cdot \begin{cases} J_m(q\rho')H_m^{(1)}(q\rho), \ \ \rho > \rho' \\ H_m^{(1)}(q\rho')J_m(q\rho), \ \ \rho < \rho' \end{cases} \tag{3.3.67b}$$

**直角坐标**　在直角坐标中, Green 函数满足

$$-\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q^2 \right) G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \tag{3.3.68a}$$

设解为

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z(k_x, k_y, z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x(x-x')+k_y(y-y')]} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \tag{3.3.68b}$$

代入方程 (3.3.68a) 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} + [q^2 - (k_x^2 + k_y^2)]Z = -\frac{1}{(2\pi)^2}\delta(z - z') \tag{3.3.68c}$$

上式与方程 (3.3.63a) 类似, 故解为

$$Z(k_x, k_y, z) = -\frac{1}{2(2\pi)^2 \mathrm{i}\sigma} \begin{cases} \exp[\mathrm{i}\sigma(z - z')], z > z' \\ \exp[\mathrm{i}\sigma(z' - z)], z < z' \end{cases} \tag{3.3.68d}$$

其中 $\sigma=\sqrt{q^2-(k_x^2+k_y^2)}$. 代入式 (3.3.68b) 得到基本解的展开式

$$\frac{\exp[\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x(x-x')+k_y(y-y')]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma|z-z'|}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{3.3.68e}$$

上式把左边的球面波用平面波来展开, 称为 **Weyl 公式**.

### 3.3.6 运动介质中的基本解

在以上各小节中, 我们假定 Laplace 算子是各向同性的. 在实际问题中, 这种对称性往往由于外场的存在而破坏. 例如考虑运动介质中声传播, 设流体介质在 $z$ 方向有一个均匀流速 $\boldsymbol{U}_0=U_0\boldsymbol{e}_z$. 由式 (1.1.6e), 在实验室坐标系内, 波动方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}_0\cdot\nabla\right)^2u(\boldsymbol{r},t)-c_0^2\nabla^2u(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t) \tag{3.3.69a}$$

对上式作 Fourier 变换得到频域方程

$$(-\mathrm{i}\omega+\boldsymbol{U}_0\cdot\nabla)^2u(\boldsymbol{r},\omega)-c_0^2\nabla^2u(\boldsymbol{r},\omega)=f(\boldsymbol{r},\omega) \tag{3.3.69b}$$

即

$$\nabla^2u(\boldsymbol{r},\omega)+\frac{\omega^2}{c_0^2}\left(1+\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{U}_0}{\omega}\cdot\nabla\right)^2u(\boldsymbol{r},\omega)=-f(\boldsymbol{r},\omega)/c_0^2 \tag{3.3.69c}$$

故在无限空间中, 频域 Green 函数满足方程 (注意取 $\boldsymbol{U}_0=U_0\boldsymbol{e}_z$)

$$\nabla^2g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\frac{\omega^2}{c_0^2}\left(1+\frac{\mathrm{i}U_0}{\omega}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.3.70a}$$

其中 $\omega$ 为频率, $c_0$ 为声速. 在柱坐标内, 上式的解可表示为

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}Z_m(z,k_\rho)J_m(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho\exp(\mathrm{i}m\varphi) \tag{3.3.70b}$$

代入方程 (3.3.70a) 得到

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\omega^2}{c_0^2}\left(1+\frac{\mathrm{i}U_0}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^2-k_\rho^2\right]Z_m(z,k_\rho)J_m(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho\\&\quad=-\frac{1}{2\pi\rho}\delta(\rho,\rho')\delta(z,z')\exp(-\mathrm{i}m\varphi')\end{aligned} \tag{3.3.70c}$$

逆 Hankel 变换为

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\omega^2}{c_0^2}\left(1+\frac{\mathrm{i}U_0}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^2-k_\rho^2\right]Z_m(z,k_\rho)\\&\quad=-\frac{1}{2\pi}J_m(k_\rho\rho')\delta(z,z')\exp(-\mathrm{i}m\varphi')\end{aligned} \tag{3.3.70d}$$

首先分析方程 (3.3.70d) 相应的齐次方程, 即

$$\left[(1-M^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+2\mathrm{i}k_0M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+k_z^2\right]Z_m(z,k_\rho)=0 \tag{3.3.71a}$$

其中 $k_z^2=\omega^2/c_0^2-k_\rho^2$, $k_0=\omega/c_0$, $M=U_0/c_0$ 称为 Mach 数. 显然, 上式的解与 $M$ 的大小有关.

(1) 亚音速：即 $M<1$, 上式的二个基本解为 $\exp(\mathrm{i}\gamma_+z)$ 和 $\exp(\mathrm{i}\gamma_-z)$, 其中

$$\gamma_\pm=\frac{1}{(1-M^2)}\left[-k_0M\pm\sqrt{k_0^2-(1-M^2)k_\rho^2}\right]\equiv-\gamma_0\pm\gamma_\rho \tag{3.3.71b}$$

其中

$$\gamma_0\equiv\frac{k_0M}{1-M^2};\ \gamma_\rho=\frac{1}{1-M^2}\sqrt{k_0^2-(1-M^2)k_\rho^2} \tag{3.3.71c}$$

因此, 我们构造方程 (3.3.70d) 的解为

$$Z_m(z,k_\rho)=\begin{cases}A\exp[\mathrm{i}\gamma_+(z-z')],\ z>z'\\ B\exp[\mathrm{i}\gamma_-(z'-z)],\ z<z'\end{cases} \tag{3.3.72a}$$

上式中我们假定 $\gamma_+>0$, 因而 $A\exp[\mathrm{i}\gamma_+(z-z')]$ 代表 $+z$ 方向传播的波, 而 $\gamma_-<0$, 因而 $B\exp\left[\mathrm{i}\gamma_-(z'-z)\right]$ 代表 $-z$ 方向传播的波；如果反之, 则 $\gamma_+$ 与 $\gamma_-$ 交换位置. 方程 (3.3.72a) 中的系数由 $z=z'$ 的连接条件决定: $A=B$, 以及

$$(1-M^2)(\gamma_-B-\gamma_+A)=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}J_m(k_\rho\rho')\exp(-\mathrm{i}m\varphi') \tag{3.3.72b}$$

不难求得

$$\begin{aligned}A&=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{J_m(k_\rho\rho')}{(\gamma_--\gamma_+)(1-M^2)}\exp(-\mathrm{i}m\varphi')\\ B&=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{J_m(k_\rho\rho')}{(\gamma_--\gamma_+)(1-M^2)}\exp(-\mathrm{i}m\varphi')\end{aligned} \tag{3.3.72c}$$

上式代入方程 (3.3.72a) 和 (3.3.70b) 得到

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=&\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_0|z-z'|}}{4\pi\sqrt{1-M^2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\frac{J_m(k_\rho\rho')J_m(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho}{\sqrt{\tilde{k}_0^2-k_\rho^2}}\\ &\times\exp\left[\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')\right]\exp\left(\mathrm{i}\sqrt{\tilde{k}_0^2-k_\rho^2}\,|\tilde{z}-\tilde{z}'|\right)\end{aligned} \tag{3.3.73a}$$

其中 $\tilde{z}=z/\sqrt{1-M^2}$; $\tilde{z}'=z'/\sqrt{1-M^2}$ 以及 $\gamma_0\equiv k_0M/(1-M^2)$; $\tilde{k}_0^2=k_0^2/(1-M^2)$. 由展开式 (3.3.63c)

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_0|z-z'|}}{\sqrt{1-M^2}}\frac{\exp\left(\mathrm{i}k_0|\tilde{\boldsymbol{r}}-\tilde{\boldsymbol{r}'}|/\sqrt{1-M^2}\right)}{4\pi|\tilde{\boldsymbol{r}}-\tilde{\boldsymbol{r}'}|} \tag{3.3.73b}$$

其中

$$|\tilde{\boldsymbol{r}}-\tilde{\boldsymbol{r}'}|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\frac{(z-z')^2}{1-M^2}} \tag{3.3.73c}$$

或者把式 (3.3.73b) 写成

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\exp\left[\mathrm{i}k_0\left(\tilde{R}_1-M|z-z'|\right)/(1-M^2)\right]}{4\pi\tilde{R}_1} \tag{3.3.73d}$$

其中 $\tilde{R}_1\equiv\sqrt{(1-M^2)\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]+(z-z')^2}$.

(2) 超音速：即 $M>1$, 问题较为复杂. 方程 (3.3.71a) 的特征根为

$$\delta_\pm=\frac{1}{M^2-1}\left[k_0M\pm\sqrt{k_0^2+(M^2-1)k_\rho^2}\right]\equiv\delta_0\pm\delta_\rho \tag{3.3.74a}$$

其中

$$\delta_0\equiv\frac{k_0M}{M^2-1};\ \delta_\rho=\frac{1}{M^2-1}\sqrt{k_0^2+(M^2-1)k_\rho^2} \tag{3.3.74b}$$

分析 $k_\rho=0$ 情况：显然 $\delta_\pm=k_0(M\pm1)/(M^2-1)$ 恒大于零, 故基本解 $\exp[\mathrm{i}\delta_+(z-z')]$ 和 $\exp[\mathrm{i}\delta_-(z-z')]$ 都表示向 $z>z'$ 方向传播的平面波, 因而不存在向 $z<z'$ 方向传播波的基本解. 事实上, 当 $M>1$ 时, 由于流速大于声速, 声源发出的声波被流体携带而只能向流体流动方向 $(z>z')$ 传播. 为了满足这一因果关系, 必须取 $Z_m(z,k_\rho)\equiv0,\ (z<z')$, 即取

$$Z_m(z,k_\rho)=\begin{cases}A\exp[\mathrm{i}\delta_+(z-z')]+B\exp[\mathrm{i}\delta_-(z-z')], & z>z'\\ 0 & z<z'\end{cases} \tag{3.3.75a}$$

决定上式系数的连接方程修改为

$$\begin{gathered}Z_m(z,k_\rho)\big|_{z=z'-0}=0\\ \left.\frac{\mathrm{d}Z_m(z,k_\rho)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z'+0}=-\frac{1}{2\pi(M^2-1)}J_m(k_\rho\rho')\exp(-\mathrm{i}m\varphi')\end{gathered} \tag{3.3.75b}$$

于是, 容易得到

$$\begin{aligned}A&=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(\delta_+-\delta_-)(M^2-1)}J_m(k_\rho\rho')\exp(-\mathrm{i}m\varphi')\\ B&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(\delta_+-\delta_-)(M^2-1)}J_m(k_\rho,\rho')\exp(-\mathrm{i}m\varphi')\end{aligned} \tag{3.3.75c}$$

上式代入方程 (3.3.75a) 和 (3.3.70b) 得到

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=&\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0(z-z')}}{2\pi\sqrt{M^2-1}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\frac{J_m(k_\rho\rho')J_m(k_\rho\rho)}{\sqrt{\tilde{k}_0^2+k_\rho^2}}k_\rho\mathrm{d}k_\rho\\ &\times\exp[\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')]\sin\left[\sqrt{\tilde{k}_0^2+k_\rho^2}(\tilde{z}-z')\right]\end{aligned} \tag{3.3.76a}$$

其中 $\tilde{k}_0^2 = k_0^2/(M^2-1)$; $\delta_0 = k_0 M/(M^2-1)$, 以及 $\tilde{z} = z/\sqrt{M^2-1}$; $\tilde{z}' = z'/\sqrt{M^2-1}$. 为了求上式积分, 首先考虑 $\boldsymbol{r}'=0$ 情况, 即 $\rho'=0$, 于是方程 (3.3.76a) 简化成

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{r},0) = & \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0 z}}{2\pi\sqrt{M^2-1}} \int_0^{\infty} \frac{J_0(k_\rho\rho)k_\rho \mathrm{d}k_\rho}{\sqrt{k_0^2/(M^2-1)+k_\rho^2}} \\ & \times \sin\left[\sqrt{k_\rho^2+\frac{k_0^2}{M^2-1}}\cdot\frac{z}{\sqrt{M^2-1}}\right] \end{aligned} \tag{3.3.76b}$$

令积分变换 $\sigma = \rho\sqrt{k_0^2/(M^2-1)+k_\rho^2}$, 逆变换取 $k_\rho\rho = \sqrt{\sigma^2 - k_0^2\rho^2/(M^2-1)}$, 上式化成

$$g(\boldsymbol{r},0) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0 z}}{2\pi\rho\sqrt{M^2-1}} \int_a^{\infty} J_0\left(\sqrt{\sigma^2-a^2}\right)\sin(c\sigma)\mathrm{d}\sigma \tag{3.3.76c}$$

其中 $a = k_0\rho/\sqrt{M^2-1}$; $c = z\rho^{-1}/\sqrt{M^2-1}$. 利用积分关系

$$\int_a^{\infty} J_0\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)\sin(cx) = \begin{cases} 0, & c<1 \\ \dfrac{\cos\left(a\sqrt{c^2-1}\right)}{\sqrt{c^2-1}}, & c>1 \end{cases} \tag{3.3.77a}$$

方程 (3.3.76c) 给出

$$g(\boldsymbol{r},0) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0 z}}{2\pi\tilde{R}_2}\cdot\begin{cases} 0, & z<\rho\sqrt{M^2-1} \\ \cos\left(\dfrac{k_0\tilde{R}_2}{M^2-1}\right), & z>\rho\sqrt{M^2-1} \end{cases} \tag{3.3.77b}$$

其中 $\tilde{R}_2 \equiv \sqrt{z^2-(M^2-1)\rho^2}$. 可见, 在锥形区域外, 声压为零; 只有在圆锥区域内, 才存在声场, 圆锥面方程为 $z = \rho\sqrt{M^2-1}$, 故圆锥的半顶角为 $\vartheta_M = \sin^{-1}(1/M)$, 如图 3.3.4.

当 $\boldsymbol{r}' \neq 0$ 时, 显然只要把方程 (3.3.77b) 修改成

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0(z-z')}}{2\pi\tilde{R}_3}\cdot\begin{cases} 0, & \text{圆锥外} \\ \cos\left(\dfrac{k_0\tilde{R}_3}{M^2-1}\right), & \text{圆锥内} \end{cases} \tag{3.3.77c}$$

其中 $\tilde{R}_3 \equiv \sqrt{(z-z')^2-(M^2-1)[(x-x')^2+(y-y')^2]}$. 圆锥面方程为

$$(M^2-1)[(x-x')^2+(y-y')^2] = (z-z')^2 \tag{3.3.77d}$$

圆锥顶点在声源处. 必须注意的是, 在圆锥面上, $\tilde{R}_3=0$, 故声压无限大, 这是不可能的, 必须引进阻尼或者非线性效应.

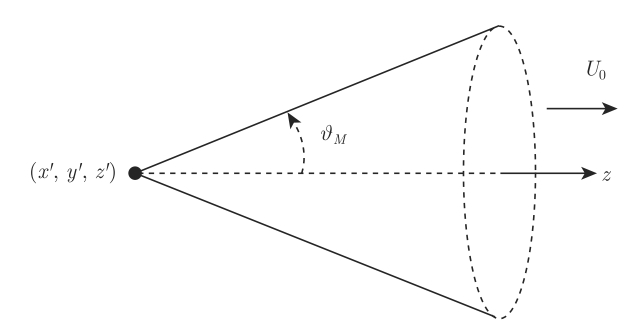



图 3.3.4 流体超音速运动时, 只有锥面内存在声场, 锥面外声场为零

(3) 等音速：即 $M=1$, 可以由方程 (3.3.77b) 取极限 $M\to 1^+$ 求得声场. 方程 (3.3.77b)(圆锥内部分) 改写成

$$g(\boldsymbol{r},0)=\frac{1}{4\pi\tilde{R}_2}\exp\left[\mathrm{i}\frac{k_0(Mz+\tilde{R}_2)}{M^2-1}\right]+\frac{1}{4\pi\tilde{R}_2}\exp\left[\mathrm{i}\frac{k_0(Mz-\tilde{R}_2)}{M^2-1}\right] \tag{3.3.78a}$$

引进小的阻尼：$\mathrm{Im}(k_0)>0$, 当 $M\to 1^+$ 时, 上式第一项中涉及到 $k_0$ 实部部分不大于 1, 而虚部部分由于 $\mathrm{Im}(k_0)>0$ 而趋向零；而上式第二项的极限容易求得

$$\frac{Mz-\tilde{R}_2}{M^2-1}=\frac{Mz-\sqrt{z^2-(M^2-1)\rho^2}}{M^2-1}\to\frac{0}{0}\to\frac{z^2+\rho^2}{2z} \tag{3.3.78b}$$

代入方程 (3.3.78a) 得到

$$g(\boldsymbol{r},0)=\frac{1}{4\pi z}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k_0}{2z}(z^2+x^2+y^2)\right] \tag{3.3.78c}$$

此时圆锥半顶角 $\vartheta_M\to\pi/2$(即 $\sin\vartheta_M=1$), 故 $z<z'$ 区域声场为零. 当 $\boldsymbol{r}'\neq 0$ 时, 方程 (3.3.78c) 修改成

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi(z-z')}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k_0}{2(z-z')}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right] \tag{3.3.78d}$$

其中 $z>z'$. 上式也可以由亚音速方程 (3.3.73d) 取极限而得到. 事实上, 利用极限关系

$$\lim_{M\to 1^-}\frac{\tilde{R}_1-M|z-z'|}{1-M^2}=\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}{2(z-z')} \tag{3.3.78e}$$

代入方程 (3.3.73d) 就得到方程 (3.3.78d).

如果不取极限过程, 直接由方程 (3.3.71a) 得到一阶方程

$$2\mathrm{i}k_0\frac{\mathrm{d}Z_m(z,k_\rho)}{\mathrm{d}z}+k_z^2 Z_m(z,k_\rho)=0 \tag{3.3.79a}$$

该方程只有一个特征根 $\delta = k_z^2/(2k_0)$, 相应的特征解为

$$Z_m(z,k_\rho) = A\exp[\mathrm{i}\delta(z-z')] \tag{3.3.79b}$$

为了满足方程 (3.3.70d), 即函数 $Z_m(z,k_\rho)$ 的一阶导数出现 Dirac Delta 函数, 显然要求函数 $Z_m(z,k_\rho)$ 在 $z=z'$ 处有跳跃: 在 $z<z'-0$ 区域, $Z_m(z,k_\rho)=0$(其物理意义与超音速情况类似), 而在 $z>z'+0$ 区域, $Z_m(z,k_\rho)=A\exp[\mathrm{i}\delta(z-z')]$. 连接条件可以由对方程 (3.3.70d) 在区域 $(z'-0,z'+0)$ 积分得到

$$Z_m(z,k_\rho)|_{z=z'+0} = -\frac{1}{4\pi\mathrm{i}k_0}J_m(k_\rho\rho')\exp(-\mathrm{i}m\varphi') \tag{3.3.79c}$$

不难得到

$$Z_m(z,k_\rho) = -\frac{1}{4\pi\mathrm{i}k_0}J_m(k_\rho\rho')\exp(-\mathrm{i}m\varphi')\exp\left[\mathrm{i}\frac{k_0^2-k_\rho^2}{2k_0}(z-z')\right] \tag{3.3.79d}$$

上式代入方程 (3.3.70b) 得到

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi\mathrm{i}k_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty \exp\left[\mathrm{i}\frac{k_0^2-k_\rho^2}{2k_0}(z-z')\right]J_m(k_\rho\rho')J_m(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho \times\exp[\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')] \tag{3.3.80a}$$

当 $\boldsymbol{r}'=0$ 时, 上式简化为

$$g(\boldsymbol{r},0) = -\frac{1}{4\pi\mathrm{i}k_0}\exp\left(\mathrm{i}\frac{k_0 z}{2}\right)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mathrm{i}z}{2k_0}k_\rho^2\right)J_0(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho \tag{3.3.80b}$$

上式积分后不难得到方程 (3.3.78c).

## 3.4 混合问题的含时 Green 函数

本节讨论波动方程及热传导方程混合问题的含时 Green 函数的定义、性质以及应用. 对混合问题, Green 函数的定义显然应与边值问题有较大区别, 我们从本征函数展开法着手, 来考察应如何定义混合问题的含时 Green 函数. 最后在 3.4.5 小节中, 介绍径向无限大区域的波动方程的含时 Green 函数.

### 3.4.1 热导方程的 Green 函数

考虑下列混合问题, $u(\boldsymbol{r},t)$ 满足

$$\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \boldsymbol{L}u(\boldsymbol{r},t) = 0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0$$

$$u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\phi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G$$
$$\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0 \tag{3.4.1a}$$

其中算子 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$ 在 $G$ 上是 Hermite 对称算子. 注意, 上式的方程和边界条件都是齐次的, 非齐次情况将在下节讨论. 设 $\boldsymbol{L}$ 在齐次边界条件下有完备的正交归一的本征函数 $\{\psi_n(\boldsymbol{r})\}$, 相应的本征值为 $\lambda_n$, 令

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.4.1b}$$

代入式 (3.4.1a) 可得

$$a_n(t)=a_n(0)\exp(-\lambda_n t) \tag{3.4.1c}$$

而

$$a_n(0)=\int_G\rho(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau \tag{3.4.1d}$$

把 (3.4.1c) 和 (3.4.1d) 代入 (3.4.1b) 得

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_G\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\phi(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\right]\exp(-\lambda_n t)\psi_n(\boldsymbol{r})\\&=\int_G\left[\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_n t)\right]\rho(\boldsymbol{r}')\phi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\end{aligned} \tag{3.4.2a}$$

令

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_n t) \tag{3.4.2b}$$

则

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\rho(\boldsymbol{r}')\phi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.2c}$$

由式 (3.4.2b) 定义的 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 称为混合问题式 (3.4.1a) 的**含时 Green 函数**. 下面讨论式 (3.4.2b) 的意义, 假如有一 Dirac Delta 函数型的初始分布 $u(\boldsymbol{r},0)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)/\rho(\boldsymbol{r})$, 由式 (3.4.2c), 问题的解为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\frac{\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)}{\rho(\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}\tau'=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0,t) \tag{3.4.2d}$$

因此, Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 实质上是 Dirac Delta 函数初始分布的解, 即 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$

满足

$$\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}+\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ t>0$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)|_{t=0}=\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r}')},\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G \tag{3.4.3a}$$

$$\left[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)+\beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=0,\ t>0$$

利用 $\{\psi_n(\boldsymbol{r})\}$ 的封闭性关系

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})=\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r}')} \tag{3.4.3b}$$

不难验证式 (3.4.2b) 满足方程 (3.4.3a), 故方程 (3.4.3a) 可作为一阶方程混合问题式 (3.4.1a) 的 Green 函数定义. 下面讨论 Green 函数的性质.

(1) $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 的传播特性: 假定初始分布取在 $t=t'$: $u(\boldsymbol{r},t)|_{t=t'}=u(\boldsymbol{r},t')$, 解应为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},t-t')\rho(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.4a}$$

其中

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\exp[-\lambda_m(t-t')],\ t>t' \tag{3.4.4b}$$

式 (3.4.4a) 解释为:$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$ 将函数 $u(\boldsymbol{r},t)$ 从 $t'$ 时刻传播到 $t>t'$ 时刻, 因此物理上常称 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 为**传播子**. 根据 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 的传播特性, 如果 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 把 $u(\boldsymbol{r},t)$ 从 $t_0$ 传播 $t_1$, 再传播到 $t_2$, 结果应同 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 把 $u(\boldsymbol{r},t)$ 从 $t_0$ 直接传播到 $t_2$ 一样, 如图 3.4.1. 结论证明如下: 由式 (3.4.4a)

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t_1)&=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_1-t_0)\rho(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}',t_0)\mathrm{d}\tau'\\u(\boldsymbol{r},t_2)&=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_1)\rho(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}',t_1)\mathrm{d}\tau'\end{aligned} \tag{3.4.5a}$$

第一式代入第二式得

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t_2)&=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_1)\rho(\boldsymbol{r}')\left[\int_G G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',t_1-t_0)\rho(\boldsymbol{r}'')u(\boldsymbol{r}'',t_0)\mathrm{d}\tau''\right]\mathrm{d}\tau'\\&=\int_G\left[\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_1)G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',t_1-t_0)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\right]\rho(\boldsymbol{r}'')u(\boldsymbol{r}'',t_0)\mathrm{d}\tau''\end{aligned}$$

$$u(\boldsymbol{r},\ t_0) \xrightarrow{G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_1-t_0)} u(\boldsymbol{r},\ t_1) \xrightarrow{G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_1)} u(\boldsymbol{r},\ t_2)$$

$$u(\boldsymbol{r},\ t_0) \xrightarrow{G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_0)} u(\boldsymbol{r},\ t_2)$$

图 3.4.1 Green 函数的传播特性

根据式 (3.4.4b), 上式中括号内的积分 $K$ 为

$$\begin{aligned} K &\equiv \sum_{m,n=1} \psi_n^*(\boldsymbol{r}'')\psi_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\lambda_m(t_2-t_0)} \int_G \rho(\boldsymbol{r}')\psi_m^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \\ &= \sum_{m,n=1} \psi_m(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r}'')\mathrm{e}^{-\lambda_m(t_2-t_0)}\delta_{mn} \\ &= \sum_{m=1} \psi_m(\boldsymbol{r})\psi_m^*(\boldsymbol{r}'')\mathrm{e}^{-\lambda_m(t_2-t_0)} = G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'',t_2-t_0) \end{aligned} \tag{3.4.5b}$$

其中已利用 $\psi_m(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi_n(\boldsymbol{r})$ 的正交、归一性. 因此

$$u(\boldsymbol{r},t_2) = \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_0)\rho(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}',t_0)\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.5c}$$

于是传播性得证;

(2) $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 的对称性: 由式 (3.4.4b), 如果 $t$ 是实数 (扩散和热导方程)

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = G^*(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},t) \tag{3.4.6a}$$

即 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 是关于 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 共轭对称; 若 $t$ 是虚数 (对含时 Schrödinger 方程), 则显然有

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',-t) = G^*(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},t) \tag{3.4.6b}$$

即 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 关于 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 交换、$t$ 反演是共轭对称的;

(3) $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$ 满足的共轭方程: $\boldsymbol{L}$ 对 $\boldsymbol{r}'$ 作用, 由式 (3.4.4b)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') &= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^*\rho(\boldsymbol{r}')\psi_m^*(\boldsymbol{r}')\psi_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\lambda_m(t-t')} \\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')}{\partial t'} &= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m\rho(\boldsymbol{r}')\psi_m^*(\boldsymbol{r}')\psi_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\lambda_m(t-t')} \end{aligned} \tag{3.4.7a}$$

利用 $\lambda_m$ 的实数性 $\lambda_m = \lambda_m^*$, 故对变数 $(\boldsymbol{r}',t')$ 有方程

$$-\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')}{\partial t'} + \boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') = 0 \tag{3.4.7b}$$

上式称为方程 (3.4.1a) 的**共轭方程** (见 3.5 节讨论).

**例 3.4.1** 求半径为 $a$ 的球内扩散问题的 Green 函数

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\nabla^2u(\boldsymbol{r},t)=0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\&u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ ;\ u(\boldsymbol{r},t)|_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{3.4.8a}$$

由 2.5.1 小节的式 (2.5.16a), 球坐标中 Laplace 算子在第一类边界条件下的本征函数为

$$\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)=\frac{1}{N_{nl}}j_l\left(\frac{\mu_n^l}{a}r\right)Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\tag{3.4.8b}$$

其中 $\mu_n^l$ 是 $l$ 阶球 Bessel 函数 $j_l(x)$ 的第 $n$ 个零点, 归一化系数 $N_{nl}$ 由式 (2.5.15b) 决定. 相应的本征值为 $\lambda_n^l=(\mu_n^l/a)^2$. 由式 (3.4.2b) 得到含时 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{nlm}^{\infty}\frac{1}{N_{nl}^2}j_l\left(\frac{\mu_n^l}{a}r\right)j_l\left(\frac{\mu_n^l}{a}r'\right)Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')\mathrm{e}^{-(\mu_n^l/a)^2t}\tag{3.4.8c}$$

**例 3.4.2** 求半径为 $R$、高为 $h$ 的圆柱体内扩散问题的 Green 函数

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\nabla^2u(\boldsymbol{r},t)=0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\&u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ ;\ u(\boldsymbol{r},t)|_{z=0,h}=u(\boldsymbol{r},t)|_{\rho=R}=0\end{aligned}\tag{3.4.9a}$$

由 2.5.4 小节的式 (2.5.51b), 圆柱坐标中 Laplace 算子在第一类边界条件下的本征函数为

$$\psi_{lmn}(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{N_{lmn}}J_m\left(\frac{x_l^m}{R}\rho\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\tag{3.4.9b}$$

其中归一化系数 $N_{lmn}$ 由式 (2.5.51c) 决定, $x_l^m$ 是 $m$ 阶 Bessel 函数的第 $l$ 个零点, 即 $J_m(x_l^m)=0$). 相应的本征值为 $\lambda_{lmn}=(x_l^m\ /\ R)^2+(n\pi/h)^2$. 由式 (3.4.2b) 得到含时 Green 函数为

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=&\sum_{nlm}^{\infty}\frac{1}{N_{lmn}^2}J_m\left(\frac{x_l^m}{R}\rho'\right)J_m\left(\frac{x_l^m}{R}\rho\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\\&\times\sin\left(\frac{n\pi}{h}z'\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\mathrm{e}^{-[(x_l^m\ /\ R)^2+(n\pi/h)^2]t}\end{aligned}\tag{3.4.9c}$$

**非齐次方程** 对非齐次方程 (注意: 边界条件是齐次的)

$$\begin{aligned}&\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\boldsymbol{L}u(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t)\ ,\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\&u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=0;\ \ \left.\left[\alpha u(\boldsymbol{r},t)+\beta\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}\right]\right|_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{3.4.10a}$$

利用 Duhamel 齐次化原理, 设 $v(\boldsymbol{r},t,t')$ 是下列混合问题的解

$$\begin{aligned}&\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial v}{\partial t}+\boldsymbol{L}v=0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\&v|_{t=t'}=\frac{f(\boldsymbol{r},t')}{\rho(\boldsymbol{r})};\ \left(\alpha v+\beta\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{3.4.10b}$$

则式 (3.4.10a) 的解为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t v(\boldsymbol{r},t,t')\mathrm{d}t'\tag{3.4.10c}$$

利用 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$,$v(\boldsymbol{r},t)$ 可表示为

$$v(\boldsymbol{r},t,t')=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\tag{3.4.10d}$$

因此

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t'\tag{3.4.11a}$$

令 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$ 如下

$$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')H(t-t')\tag{3.4.11b}$$

于是式 (3.4.11a) 可写成

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_0^\infty\int_G G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t'\tag{3.4.11c}$$

上式代入方程 (3.4.10a) 的第一式应该有

$$\int_0^\infty\int_G\left[\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')}{\partial t}+\boldsymbol{L}G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\right]f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t'=f(\boldsymbol{r},t)$$

因此, 要求 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$ 满足

$$\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_1}{\partial t}+\boldsymbol{L}G_1=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(t-t')\tag{3.4.11d}$$

证明:

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_1}{\partial t}+\boldsymbol{L}G_1&=H(t-t')\boldsymbol{L}G+\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial t}[GH(t-t')]\\&=H(t-t')\boldsymbol{L}G+H(t-t')\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G}{\partial t}+G\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial H(t-t')}{\partial t}\\&=H(t-t')\left[\boldsymbol{L}G+\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G}{\partial t}\right]+G\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial H(t-t')}{\partial t}\end{aligned}\tag{3.4.12a}$$

因 $\boldsymbol{L}G+\rho G_t=0$ 和 $H_t(t-t')=\delta(t-t')$, 因此有

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_1}{\partial t}+\boldsymbol{L}G_1&=\rho(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\delta(t-t')\\&=\rho(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t'-t')\delta(t-t')\end{aligned}\tag{3.4.12b}$$

注意到

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t'-t')=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})=\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r})}\tag{3.4.12c}$$

故式 (3.4.11d) 得证. 上述过程表明式 (3.4.11c) 确是方程 (3.4.10a) 的解. 由于 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$ 满足式 (3.4.11d) 以及零初始条件, 故可定义方程 (3.4.10a) 的 Green 函数为下列定解问题的解

$$\begin{aligned}&\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_1}{\partial t}+\boldsymbol{L}G_1=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ t>0\\&G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')|_{t=0}=0;\ \left.\left(\alpha G_1+\beta\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{3.4.12d}$$

**非齐次问题** 如果方程 (3.4.10a) 中初值也是非齐次的, 可令

$$u(\boldsymbol{r},t)=w(\boldsymbol{r},t)+v(\boldsymbol{r},t)\tag{3.4.13a}$$

而 $w(\boldsymbol{r},t)$ 满足齐次方程和非齐次初值, 而 $v(\boldsymbol{r},t)$ 满足非齐次方程和齐次初值, 于是解为

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)=&\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\rho(\boldsymbol{r}')\phi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&+\int_0^t\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t'\end{aligned}\tag{3.4.13b}$$

以上讨论中边界条件始终保持齐次, 对非齐次边界问题, 将在 3.5 节中讨论.

### 3.4.2 波动方程的 Green 函数

考虑定义在区域 $G$ 上的波动方程的混合问题 (注意: 满足齐次边界条件)

$$\begin{aligned}&\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}u(\boldsymbol{r},t)=0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\&u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\phi(\boldsymbol{r});\ \left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G\\&\left[\alpha u(\boldsymbol{r},t)+\beta\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}\right]_{\partial G}=0,\ t>0\end{aligned}\tag{3.4.14a}$$

其中算子 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$ 在 $G$ 上是 Hermite 对称算子. 仍用本征函数法求解, 令

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t)\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.4.14b}$$

代入方程 (3.4.14a) 的第一和二式得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2c_n(t)}{\mathrm{d}t^2}+\lambda_n c_n(t)=0,\ t>0\\&c_n(0)=a_n,\ \left.\frac{\mathrm{d}c_n(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=b_n\end{aligned} \tag{3.4.15a}$$

其中

$$a_n=\int_G\phi(\boldsymbol{r}')\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau';\quad b_n=\int_G\psi(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

该初值问题的解为

$$c_n(t)=a_n\cos\sqrt{\lambda_n}t+\frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}t \tag{3.4.15b}$$

分两种情况讨论:

(1) 首先, 假定 $\lambda_n\neq 0$, 即零不是 $\boldsymbol{L}$ 的本征值, 于是有解

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)=&\int_G G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\phi(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&+\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\psi(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\end{aligned} \tag{3.4.16a}$$

其中 $G_1\ (\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 和 $G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 为 Green 函数

$$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\cos\sqrt{\lambda_n}t \tag{3.4.16b}$$

$$G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\sin\sqrt{\lambda_n}t \tag{3.4.16c}$$

如果级数一致收敛, 显然有 $\partial G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)/\partial t=G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$, 故式 (3.4.16a) 可写成

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)=&\frac{\partial}{\partial t}\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\phi(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&+\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\psi(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\end{aligned} \tag{3.4.17a}$$

因此, 只要定义混合问题式 (3.4.14a) 的 Green 函数为 $G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 即可. 下面考察 $G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 满足的方程. 设初始分布

$$\phi(\boldsymbol{r})=0;\ \psi(\boldsymbol{r})=\frac{\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\rho(\boldsymbol{r})} \tag{3.4.17b}$$

显然有 $u(\boldsymbol{r},t)=G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0,t)$. 因此, Green 函数 $G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 是定解问题的解

$$\rho(r)\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}G_2=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ t>0$$

$$G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\,|_{t=0}=0;\quad \left.\frac{\partial G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r})} \tag{3.4.17c}$$

$$\left.\left(\alpha G_2+\beta\frac{\partial G_2}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0$$

(2) 其次, 如果 $\lambda_0=0$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的零本征值, 存在非零本征函数 $\psi_0(\boldsymbol{r})\neq 0$, 对 $n=0$ 的项, 方程 (3.4.15a) 简化为: $c_0''(t)=0$ 以及初始条件 $c_0(0)=a_0$ 和 $c_0'(t)|_{t=0}=b_0$, 其解为 $c_0(t)=a_0+b_0t$. 为了保证式 (3.4.15b) 有限, 必须满足 $b_0=0$, 即要求 $\dot u(\boldsymbol{r},0)$ 满足相容性条件

$$\int_G \dot u(\boldsymbol{r},0)\psi_0^*(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'=0 \tag{3.4.18a}$$

此时, 方程 (3.4.14a) 的解为

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)=&a_0\psi_0(\boldsymbol{r})+\int_G G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\phi(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&+\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\psi(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\end{aligned} \tag{3.4.18b}$$

其中 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 和 $G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 仍然由方程 (3.4.16b) 和 (3.4.16c) 决定.

**非齐次方程** 对非齐次方程和齐次初值问题 (注意: 满足齐次边界条件)

$$\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}u(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t)\ ,\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0$$

$$u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=0;\quad \left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G \tag{3.4.19a}$$

$$\left.\left[\alpha u(\boldsymbol{r},t)+\beta\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}\right]\right|_{\partial G}=0,\ t>0$$

令上式的解具有形式

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_0^\infty\int_G G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t'\ ,\ t>0 \tag{3.4.19b}$$

为满足方程 (3.4.19a) 中的初值, 要求

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')|_{t=0}=\left.\frac{\partial G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{3.4.19c}$$

代入方程 (3.4.19a) 第一式, 要求

$$\rho\frac{\partial^2 G_R}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}G_R=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{3.4.20a}$$

$G_R$ 称为定解问题式 (3.4.19a) 的含时 Green 函数. 下面我们来构成 $G_R$. 为了在上式右边产生一个 $\delta(t-t')$ 函数, 故令

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t')H(t-t') \tag{3.4.20b}$$

其中 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t')$ 满足齐次方程

$$\rho\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}g=0 \tag{3.4.20c}$$

则

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 G_R}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}G_R&=H(t-t')\boldsymbol{L}g+\rho\frac{\partial^2[gH(t-t')]}{\partial t^2}\\&=H(t-t')\boldsymbol{L}g+\rho\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}+\rho\left[2\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\mathrm{d}H(t-t')}{\mathrm{d}t}+g\frac{\mathrm{d}^2H(t-t')}{\mathrm{d}t^2}\right]\\&=\rho\left[2\delta(t-t')\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}\delta(t-t')}{\mathrm{d}t}g\right]\end{aligned} \tag{3.4.21a}$$

根据 3.1.1 节的讨论, Dirac Delta 函数的导数相当于算子

$$\frac{\mathrm{d}\delta(t-t')}{\mathrm{d}t}=-\delta(t-t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{3.4.21b}$$

于是, 式 (3.4.21a) 式变成

$$\rho\frac{\partial^2 G_R}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}G_R=\delta(t-t')\rho\frac{\partial g}{\partial t} \tag{3.4.22a}$$

因此, 如果取 $g_t|_{t=t'}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/\rho(\boldsymbol{r})$, 则式 (3.4.20b) 满足方程 (3.4.20a). 考虑到初始条件式 (3.4.19c), 显然取

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t')=G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') \tag{3.4.22b}$$

能满足我们的要求, 故我们求得 $G_R$

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')H(t-t') \tag{3.4.22c}$$

于是, 式 (3.4.19b) 可变成

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau' dt' \tag{3.4.22d}$$

物理上, 式 (3.4.22c) 的 Green 函数称为**推迟 Green 函数**. 如果定义 $G_A$

$$G_A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=-H(t'-t)G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t'-t)$$
$$=\begin{cases} G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t'), & t<t' \\ 0, & t>t' \end{cases} \tag{3.4.22e}$$

$G_A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$ 称为**超前 Green 函数**. 由 $G_A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$ 得到的解相应于波动效应是向过去反过来传播的, 在一阶的热扩散方程中, 不存在超前 Green 函数, 故从现在的状态不能反演过去的状态, 而波动方程具有时间反演对称性.

当然, 也可以直接从解方程 (3.4.20a) 得到 Green 函数. 令

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.4.23a}$$

代入方程 (3.4.20a) 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}^2a_n(t)}{\mathrm{d}t^2}+\lambda_na_n(t)\right]\rho\psi_n(\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{3.4.23b}$$

二边乘 $\psi_m^*(\boldsymbol{r})$ 并且积分得到

$$\frac{\mathrm{d}^2a_m(t)}{\mathrm{d}t^2}+\lambda_ma_m(t)=\psi_m^*(\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{3.4.23c}$$

从方程 (3.4.19c) 和 (3.4.23a) 得到初始条件为 $a_m(0)=\dot{a}_m(0)=0$, 故上式的解为

$$a_m(t)=\frac{\psi_m^*(\boldsymbol{r}')}{\sqrt{\lambda_m}}\int_0^t\delta(\tau-t')\sin[\sqrt{\lambda_m}(t-\tau)]\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{\psi_m^*(\boldsymbol{r}')}{\sqrt{\lambda_m}}\begin{cases}\sin[\sqrt{\lambda_m}(t-t')],\ t>t' \\ 0,\ t<t'\end{cases} \tag{3.4.24a}$$

代入式 (3.4.23a)

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=H(t-t')\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}\sin[\sqrt{\lambda_m}(t-t')]\psi_m^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{3.4.24b}$$

比较方程 (3.4.16c), 显然存在关系 $G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')H(t-t')$, 即方程 (3.4.22c). 注意：求方程 (3.4.23c) 在 $t<t'$ 时刻的解就得到超前 Green 函数.

当 $\lambda_0=0$ 是算子 $\boldsymbol{L}$ 的零本征值, 存在非零本征函数 $\psi_0(\boldsymbol{r})\neq0$, Green 函数 $G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$ 随时间无限大. 由方程 (3.4.23b) 可见：方程右边是 Dirac Delta 函数,

而左边经算子 $\boldsymbol{L}$ 作用后出现 $\lambda_0 a_0(t)=0$. 为消除由此带来的发散, 定义广义 Green 函数

$$\rho\frac{\partial^2 G_R}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}G_R=[-\rho\psi_0^*(\boldsymbol{r})\psi_0(\boldsymbol{r})+\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\delta(t-t') \tag{3.4.25a}$$

于是, 对 $n>0$ 的项, 系数 $a_n(t)$ 不变; 而对 $n=0$ 的项: 满足 $a_0''(t)=0$ 且初始条件为 $a_0(0)=\dot{a}_0(0)=0$, 故 $a_0(t)\equiv 0$. 方程 (3.4.25a) 的解仍然由式 (3.4.24b) 表示. 同时, 式 (3.4.22d) 增加一项与时间无关的任意解: $A\psi_0(\boldsymbol{r})$. 非齐次方程 (3.4.19a) 存在解的相容性条件为

$$\int_G \psi_0^*(\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'=0 \tag{3.4.25b}$$

**非齐次定解问题**　对方程和初值同时都是非齐次的定解问题 (但边界条件仍然是齐次的), 由叠加原理得到

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)=&\frac{\partial}{\partial t}\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\rho(\boldsymbol{r}')\phi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \ +\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\rho(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&+\int_0^t\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t',\quad t>0\end{aligned} \tag{3.4.25c}$$

**例 3.4.3**　求第一类边界条件下, 半径为 1 的圆内波动方程的 Green 函数 $G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=G_R(\rho,\varphi,\rho',\varphi',t-t')$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 G_R}{\partial t^2}-\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial G_R}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 G_R}{\partial\varphi^2}\right]=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')\\ G_R|_{t=0}=\left.\frac{\partial G_R}{\partial t}\right|_{t=0}=0\ ;\ G|_{\rho=1}=0\end{gathered} \tag{3.4.26a}$$

由 2.4.1 小节的例 2.4.1, 极坐标中 Laplace 算子在第一类边界条件下的本征函数为

$$\psi_{nm}(\rho,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}aJ_{|m|+1}(\mu_n^m)}J_{|m|}(\mu_n^m\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{3.4.26b}$$

其中 $\mu_n^m$ 是 $m$ 阶 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的第 $n$ 个零点. 相应的本征值为 $\lambda_n^m=(\mu_n^m/a)^2$. 由式 (3.4.24b) 得到含时 Green 函数为

$$\begin{aligned}G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=&\frac{H(t-t')}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^m J_{|m|+1}^2(\mu_n^m)}\sin[\mu_n^m(t-t')]\\&\times J_{|m|}(\mu_n^m\rho)J_{|m|}(\mu_n^m\rho')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\end{aligned} \tag{3.4.26c}$$

**例 3.4.4**　求第二类边界条件下, 矩形域 $G$:$(x,y)\in(0,l_x)\times(0,l_y)$ 内波动方程

的 Green 函数 $G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t') = G_R(x,y,x',y',t-t')$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 G_R}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 G_R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_R}{\partial y^2}\right) = [-(\psi_{00})^2 + \delta(x,x')\delta(y,y')]\delta(t-t') \\ \left.\frac{\partial G_R}{\partial x}\right|_{x=0,l_x} = \left.\frac{\partial G_R}{\partial y}\right|_{y=0,l_y} = 0\end{gathered} \tag{3.4.27a}$$

注意: 本例中要求 Green 函数满足第二类边界条件, 由 2.2.1 小节的例 2.2.1, Laplace 算子有零本征值, 相应的本征函数为 $\psi_{00} = 1/\sqrt{l_x l_y}$. 由式 (2.2.23c) 和 (2.2.23d), Laplace 算子的本征函数和相应的本征值为

$$\begin{gathered}\psi_{nm}(x,y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{l_x l_y}}\cos\frac{n\pi}{l_x}x\cos\frac{m\pi}{l_y}y \\ \lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2\end{gathered} \tag{3.4.27b}$$

由式 (3.4.24b) 得到广义 Green 函数为

$$\begin{aligned}G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t') = & H(t-t')\sum_{n,m}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_{nm}}}\sin[\sqrt{\lambda_{nm}}(t-t')] \\ & \times\psi_{nm}^*(x',y')\psi_{nm}(x,y)\end{aligned} \tag{3.4.27c}$$

注意: 上式求和中去掉 $n$ 和 $m$ 同时为零的项.

### 3.4.3 Cauchy 问题的基本解

当考虑无界区域时, 混合问题即为初值问题, 这时的 Green 函数称为 Cauchy 问题的**基本解**.

**热传导方程** 首先考虑热传导方程的基本解

$$\begin{gathered}\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial t} - \nabla^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = 0,\ t>0 \\ G_0|_{t=0} = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\end{gathered} \tag{3.4.28a}$$

从 1.4.1 小节, 上式的解为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^3 \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}{4t}\right) \tag{3.4.28b}$$

根据 3.1.1 小节的讨论

$$\lim_{t\to 0} G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.4.28c}$$

故满足初始条件. 方程 (3.4.28a) 也可用本征函数法求之. 在无限大空间, $\boldsymbol{L}=-\nabla^2$ 的本征函数为

$$\psi_k(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{3.4.29a}$$

本征值构成连续谱 $\lambda=k^2$, 这时式 (3.4.2b) 中求和变积分

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)&=\sum_k\psi_k(\boldsymbol{r})\psi_k^*(\boldsymbol{r}')\exp(-\lambda_k t)\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{k}-k^2t}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\equiv G_1\cdot G_2\cdot G_3\end{aligned} \tag{3.4.29b}$$

其中

$$\begin{aligned}G_i&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{i}(x_i-x_i')k_i-k_i^2t\right]\mathrm{d}k_i\\&=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[-\frac{(x_i-x_i')^2}{4t}\right],\ (i=1,2,3)\end{aligned} \tag{3.4.29c}$$

于是得到式 (3.4.28b).

在二维极坐标、轴对称情况下的 Green 函数满足

$$\begin{aligned}&\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial G}{\partial\rho}\right)=0,\ \rho\in(0,\infty)\ t>0\\&u|_{t=0}=\frac{\delta(\rho-\rho')}{2\pi\rho},\ \rho\in(0,\infty)\end{aligned} \tag{3.4.30a}$$

由方程 (2.6.31d)

$$G(\rho,\rho',t)=\frac{1}{2t}\exp\left(-\frac{\rho^2+\rho'^2}{4t}\right)I_0\left(\frac{\rho'\rho}{2t}\right) \tag{3.4.30b}$$

**波动方程**　下面考虑波动方程 Cauchy 问题的基本解

$$\frac{\partial^2G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial t^2}-\nabla^2G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=0 \tag{3.4.31a}$$

$$G_2|_{t=0}=0;\quad \left.\frac{\partial G_2}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.4.31b}$$

同样, 由式 (3.4.29a) 和 (3.4.16c) 得到

$$G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_n\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\sin kt}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

利用 2.6.1 小节的结果 (见式 (2.6.8c))

$$G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}[\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)-\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+t)] \tag{3.4.31c}$$

(1) 当 $t>0$ 时

$$G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t) \tag{3.4.32a}$$

由式 (3.4.22c)

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=\frac{H(t-t')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-(t-t')] \tag{3.4.32b}$$

(2) 当 $t<0$ 时

$$G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+t) \tag{3.4.33a}$$

由式 (3.4.22e), 超前 Green 函数为

$$G_A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=\frac{H(t'-t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+(t-t')] \tag{3.4.33b}$$

于是, 三维非齐次波动方程的初值问题解为

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)=&\frac{\partial}{\partial t}\int\phi(\boldsymbol{r}')G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau'+\int\psi(\boldsymbol{r}')G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau'\\&+\int_0^t\int f(\boldsymbol{r}',t')G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}\tau'dt'\end{aligned} \tag{3.4.34a}$$

其中 $G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 由式 (3.4.32a) 决定. 当 $f(\boldsymbol{r}',t')=0$ 时, 上式就是 Poisson 公式 (2.6.9a). 一般, 如果方程的非齐次项 $f(\boldsymbol{r}',t')$ 作用足够长时间后, 可假定是零初始条件, 即

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)=&\int_0^t\int f(\boldsymbol{r}',t')G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}\tau'dt'\\=&\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}f(\boldsymbol{r}',t')\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-(t-t')]\mathrm{d}\tau'dt'\end{aligned} \tag{3.4.34b}$$

上式对时间部分积分后得到

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}f(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.34c}$$

**二维波动方程** 对二维波动方程, 相当于三维情形中 $u(\boldsymbol{r},t)$ 与 $z$ 无关, 即

$$\phi(\boldsymbol{r})=\phi(x,y);\ \psi(\boldsymbol{r})=\psi(x,y) \tag{3.4.35a}$$

由式 (3.4.34a)(假定 $f(\boldsymbol{r}',t')=0$)

$$\begin{aligned}u(x,y,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\int\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\phi(x',y')\left[\int_{-\infty}^{\infty}G_2(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)\mathrm{d}z'\right]\\&+\int\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\psi(x',y')\left[\int_{-\infty}^{\infty}G_2(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)\mathrm{d}z'\right]\end{aligned} \tag{3.4.35b}$$

因此, 二维基本解为

$$G_2^{2D}(x,y,x',y',t)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}G_2(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)\mathrm{d}z' \tag{3.4.35c}$$

上式的物理意义是很明显的: 三维 Green 函数是点源产生的场, 而二维 Green 函数是 $z$ 方向无限长线源产生的场. 由迭加原理, 二维 Green 函数应该是三维 Green 函数的积分. 由式 (3.4.32a)

$$G_2^{2D}(x,y,x',y',t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}z' \tag{3.4.35d}$$

作变换 $s=z-z'$ 则

$$G_2^{2D}(x,y,x',y',t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}s$$

而 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')+s^2}$, 令 $\rho^2=(x-x')^2+(y-y')^2$, 则

$$\frac{\mathrm{d}s}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{s}=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{\sqrt{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2-\rho^2}} \tag{3.4.36a}$$

故

$$G_2^{2D}(x,y,x',y',t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\rho}^{\infty}\frac{\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)}{\sqrt{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2-\rho^2}}\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \tag{3.4.36b}$$

分析上式积分, 如果 $t<\rho$, 根据 Dirac Delta 函数性质, 积分为零; 如果 $t>\rho$, 应有

$$G_2^{2D}(x,y,x',y',t)=\frac{1}{2\pi}\frac{H(t-\rho)}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \tag{3.4.36c}$$

可见二维 Green 函数仅仅依赖于 $\rho$ .

注意: 时域 Green 函数式 (3.4.32a) 也可以由频域 Green 函数式 (3.3.31c) 通过 Fourier 变换得到. 事实上, 对 $G_0^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 作 Fourier 变换得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_0^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qt}\,\mathrm{d}q&=\frac{1}{8\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)}\,\mathrm{d}q\\&=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)=G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\end{aligned} \tag{3.4.36d}$$

对式 (3.3.32b) 的 $G_0^-(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 作 Fourier 变换得到超前 Green 函数.

### 3.4.4　运动电荷产生的场

作为波动方程含时 Green 函数的一个具体应用, 考虑运动电荷产生的场分布. 设电荷运动轨迹为 $\boldsymbol{x}(t)$, 如图 3.4.2 所示, 电量为 $q$, 标量势 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 满足方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}-\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)=q\delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t)] \tag{3.4.37a}$$

其中 $c$ 是介质中的光速.

**Lorentz 变换方法** 首先讨论简单情况, 电荷以常速度 $v < c$ 在 $z$ 方向作匀速运动, 方程 (3.4.37a) 简化为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} - \nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) = q\delta(z-vt)\delta(x)\delta(y) \tag{3.4.37b}$$

如果对上式作 Galileo 变换 (方程 (1.1.6b)), 在新的坐标系内, 电荷不动, 但波动方程改变形式, 这是我们不希望的 (事实上, 电动力学是相对论的, Galileo 变换不成立). 由 1.1.1 小节, 当 $\beta = v/c < 1$ 时, 可作 Lorentz 变换式 (1.1.7a), 这样并不改变波动方程的形式. 方程 (3.4.37b) 在新坐标系 $S'(x',y',z',t')$ 变成

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2} - \nabla'^2\psi &= q\delta(z'/\gamma)\delta(x')\delta(y') \\ &= \gamma q\delta(z')\delta(x')\delta(y')\end{aligned} \tag{3.4.37c}$$

其中 $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$. 得到上式, 已利用了关系 $\delta(z'/\gamma) = \gamma\delta(z')$. 因此, 在新的坐标系 $S'(x',y',z',t')$, 上式表示原点存在强度为 $\gamma q$ 的简单点源产生的场分布. 由方程 (3.4.34c)

$$\psi(\boldsymbol{r}',t') = \frac{\gamma q}{4\pi}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|}\delta(z_0)\delta(x_0)\delta(y_0)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_0 = \frac{\gamma q}{4\pi|\boldsymbol{r}'|} \tag{3.4.38a}$$

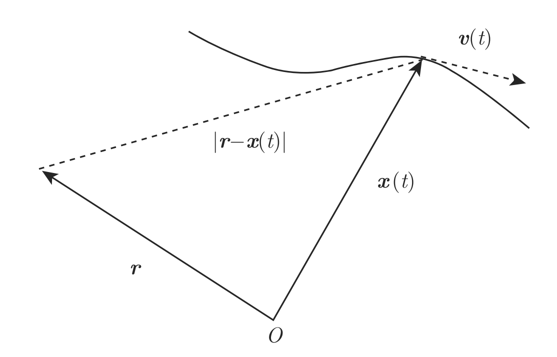



图 3.4.2 电荷运动轨迹为 $\boldsymbol{x}(t)$ 和场点 $\boldsymbol{r}$

其中 $|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$. 回到实验室坐标系 $S(x,y,z,t)$, 由 Lorentz 变换式 (1.1.7a) 得到

$$|\boldsymbol{r}'| = \gamma\sqrt{(1-\beta^2)(x^2+y^2)+(z-vt)^2} \tag{3.4.38b}$$

上式代入式 (3.4.38a) 得到场分布为

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{(z-vt)^2+(1-\beta^2)(x^2+y^2)}} \tag{3.4.38c}$$

当 $\beta = v/c << 1$ 时, $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ 就是静电势.

**直接积分法** 当电荷作非匀速运动时, 固定在电荷上的参考系不是惯性参考系, 不能用 Lorentz 变换, 必须直接用 Green 函数求积分. 利用式 (3.4.34b), 方程 (3.4.37a) 的解为

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \frac{q}{4\pi}\int \mathrm{d}\tau' \int_0^t \frac{\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c-(t-t')]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta[\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{x}(t')]\mathrm{d}t' \tag{3.4.39a}$$

直接对 $\boldsymbol{r}'$ 积分得 (注意：式 (3.4.34c) 是先对时间积分)

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{q}{4\pi}\int_0^t \frac{\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c-(t-t')]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}\mathrm{d}t' \\ &= \frac{q}{4\pi}\int_0^t \frac{\delta\{t'-[t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c]\}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}\mathrm{d}t' \end{aligned} \tag{3.4.39b}$$

显然上式积分决定于 $g(t') \equiv t' - [t - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c]$ 的零点, 即方程

$$g(t') \equiv t' - [t - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c] = 0 \tag{3.4.39c}$$

的解. 设上式的解有 $M$ 个：$t'_\mu$, $(\mu = 1, 2, \cdots, M)$, $t'_\mu$ 称为**推迟时间**, 如果不存在推迟时间, 则积分式 (3.4.39b) 为零. 显然, 只有当 $t'_\mu < t$ 时, 才在 Dirac Delta 函数积分范围内, 对积分有贡献. 假定只有 $P$ 个解满足 $t'_\mu < t$, $(\mu = 1, 2, \cdots, P)$, 式 (3.4.39b) 变成

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{q}{4\pi}\int_0^t \frac{\delta[g(t')]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}\mathrm{d}t' = \frac{q}{4\pi}\sum_{\mu=1}^{P}\int_0^t \frac{\delta(t'-t'_\mu)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|\cdot|g'(t')|}\mathrm{d}t' \\ &= \frac{q}{4\pi}\sum_{\mu=1}^{P}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t'_\mu)|\cdot|g'(t'_\mu)|} \end{aligned} \tag{3.4.39d}$$

其中 $g'(t') = \mathrm{d}g(t')/\mathrm{d}t'$. 下面考虑两种特殊情况, 设粒子在 $z$ 方向以恒速 $v$ 运动: $z(t) = vt$.

(1) $v < c$, 推迟时间 $t'$ 满足方程

$$g(t') = t' - t + \frac{1}{c}\sqrt{(z-vt')^2 + x^2 + y^2} = 0 \tag{3.4.40a}$$

上式的二个解为

$$t'_{0\pm} = \frac{1}{1-\beta^2}\left[t - \frac{v}{c^2}z \pm \frac{1}{c}\sqrt{(z-vt)^2 + (1-\beta^2)(x^2+y^2)}\right] \tag{3.4.40b}$$

其中 $\beta = v/c < 1$. 为了分析根的情况, 上式改变成

$$t'_{0\pm} - t = \frac{1}{c(1-\beta^2)}\left[-\beta(z-vt) \pm \sqrt{(z-vt)^2 + (1-\beta^2)(x^2+y^2)}\right] \tag{3.4.40c}$$

因为 $\beta<1$, 比较上式与式 (3.4.40a)(要求 $t'-t=-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c<0$) 知: 式中 "+" 为增根, 故方程 (3.4.40a) 只有一个根 $t'_{0-}$. 代入式 (3.4.39c) 得到

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{q}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t'_{0-})|\cdot|g'(t'_{0-})|} \tag{3.4.41a}$$

不难得到

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t'_{0-})|&=\sqrt{(z-vt'_{0-})^2+x^2+y^2}\\ g'(t'_{0-})&=1-\frac{v}{c}\frac{(z-vt'_{0-})}{\sqrt{(z-vt'_{0-})^2+x^2+y^2}}\end{aligned} \tag{3.4.41b}$$

代入式 (3.4.41a), 最后得到

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{q}{4\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{(z-vt)^2+(1-\beta^2)(x^2+y^2)}} \tag{3.4.41c}$$

上式与式 (3.4.38c) 的结果相同.

(2) $v>c$, 这是比较有趣的情况, 物理上相当于电荷在介质中作超光速运动. 由式 (3.4.40c)

$$t'_{0\pm}-t=\frac{1}{c(\beta^2-1)}\left[-\beta(vt-z)\mp\sqrt{(vt-z)^2-(\beta^2-1)(x^2+y^2)}\right] \tag{3.4.42a}$$

当 $\beta>1$ 时, 上式存在三种情况:

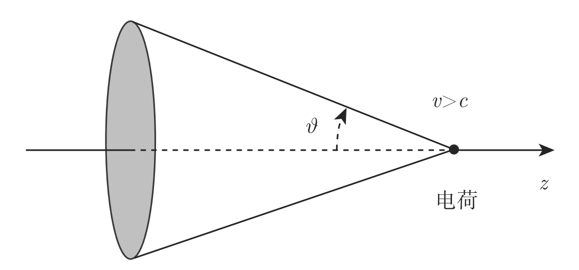



图 3.4.3 Cherenkov 辐射运动锥面

(a) 锥外:$(z-vt)^2-(\beta^2-1)(x^2+y^2)<0$, 显然 $(\beta^2-1)(x^2+y^2)=(z-vt)^2$ 是以速度 $v$ 运动的锥面. 因此, 不等式表示运动锥的外部, 锥的半顶角 $\vartheta$(如图 3.4.3 所示)$\sin\vartheta=c/v$. 由于锥外不存在推迟时间 $t'$, 故式 (3.4.39b) 中的积分应为零: $\psi(\boldsymbol{r},t)=0$;

(b) 锥内: $(vt-z)^2>(\beta^2-1)(x^2+y^2)$, 这时式 (3.4.42a) 中 "±" 都是推迟时间 (注意: 在锥内 $vt>z$), 式 (3.4.39c) 积分应有两项贡献

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t'_{0+})|\cdot|g'(t'_{0+})|}+\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t'_{0-})|\cdot|g'(t'_{0-})|} \tag{3.4.42b}$$

整理后得到

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{2q}{\sqrt{(vt-z)^2-(\beta^2-1)(x^2+y^2)}} \tag{3.4.42c}$$

(c) 锥面上: $(vt-x)^2=(\beta^2-1)(y^2+z^2)$, 由上式, $\psi(\boldsymbol{r},t)\to\infty$.

因此, 在锥面上产生奇性. 这时波动方程本身已不成立, 必须修正. 在电动力学里, 因为带电粒子在介质中运动, 须引进阻尼效应, 来抵消这种发散. 上述现象称为 **Cherenkov 辐射**, 利用此现象可测出带电粒子的运动速度.

### 3.4.5 径向无限大区域的含时 Green 函数

考虑径向无限情况, 圆柱坐标系中无限大圆盘 (厚为 $h$) 区域内波动方程的含时 Green 函数满足

$$\frac{\partial^2 G_R}{\partial t^2}-\nabla^2 G_R=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z')\delta(t-t') \tag{3.4.43a}$$

边界条件和初始条件分别为：$G_R|_{z=0}=G_R|_{z=h}=0$ 和 $G_R|_{t=0}=\partial G_R/\partial t|_{t=0}=0$.

(1) 由函数系 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\}$ 的完备性, 令上式的解为

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Theta_m(\rho,z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{3.4.43b}$$

代入方程 (3.4.43a) 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\Theta_m(\rho,z,t)}{\partial t^2}-\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Theta_m(\rho,z,t)\\&=\frac{1}{2\pi\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(z-z')\delta(t-t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}\end{aligned} \tag{3.4.44a}$$

(2) 由函数系 $\{\sin(n\pi z/h)\}$ 的完备性, 令上式的解为

$$\Theta_m(\rho,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}Z_m(\rho,t)\sin\frac{n\pi}{h}z \tag{3.4.44b}$$

代入方程 (3.4.44a)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 Z_m(\rho,t)}{\partial t^2}-\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right]Z_m(\rho,t)\\&=\frac{1}{\pi h\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(t-t')\sin\frac{n\pi}{h}z'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}\end{aligned} \tag{3.4.44c}$$

(3) 对上式作 $m$ 阶 Hankel 变换

$$Z_m(\rho,t)=\int_0^{\infty}R(k_\rho,t)J_{|m|}(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho \tag{3.4.45a}$$

代入方程 (3.4.44c) 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2R(k_\rho,t)}{\mathrm{d}t^2}+\left[k_\rho^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right]R(k_\rho,t)=\frac{1}{\pi h}\sin\frac{n\pi}{h}z'\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}J_{|m|}(k_\rho\rho')\delta(t-t') \tag{3.4.45b}$$

上式的零初始条件解为

$$\begin{aligned}R(k_\rho,t)&=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}J_{|m|}(k_\rho\rho')}{\pi h\sqrt{k_\rho^2+(n\pi/h)^2}}\sin\frac{n\pi}{h}z'\cdot\int_0^t\sin\left[\sqrt{k_\rho^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}(t-\tau)\right]\delta(\tau-t')\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}J_{|m|}(k_\rho\rho')}{\pi h\sqrt{k_\rho^2+(n\pi/h)^2}}\sin\frac{n\pi}{h}z'\cdot\sin\left[\sqrt{k_\rho^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}(t-t')\right]H(t-t')\end{aligned}$$

把上式和式 (3.4.45a), (3.4.44b) 代入式 (3.4.43b) 得到含时 Green 函数为

$$\begin{aligned}G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=&\frac{H(t-t')}{\pi h}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\sin\frac{n\pi}{h}z\sin\frac{n\pi}{h}z'\\&\times\int_0^\infty\frac{\cdot\sin\left[\sqrt{k_\rho^2+(n\pi/h)^2}(t-t')\right]}{\sqrt{k_\rho^2+(n\pi/h)^2}}J_{|m|}(k_\rho\rho')J_{|m|}(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho\end{aligned} \tag{3.4.46a}$$

如果点源位于 $z$ 轴, 则 $\rho'=0$, 由于 $J_{|m|}(0)=0$, $|m|>0$ 和 $J_0(0)=1$, 上式简化为

$$\begin{aligned}G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=&\frac{H(t-t')}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{h}z\sin\frac{n\pi}{h}z'\\&\times\int_0^\infty\frac{\cdot\sin\left[\sqrt{k_\rho^2+(n\pi/h)^2}(t-t')\right]}{\sqrt{k_\rho^2+(n\pi/h)^2}}J_0(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho\end{aligned} \tag{3.4.46b}$$

注意: 式 (3.4.46b) 可直接由频域 Green 函数 (式 (2.6.39f) 和 (2.6.39d)), 通过 Fourier 变换得到. 事实上, 我们也可以先对方程 (3.4.43a) 作 Fourier 变换, 令

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=\int_{-\infty}^{\infty}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{3.4.47a}$$

代入方程 (3.4.43a) 得到

$$\nabla^2g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)+\omega^2\mathrm{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}}{2\pi\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z') \tag{3.4.47b}$$

对上式作 $\rho$ 方向和 $\varphi$ 方向展开

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty Z_m(k_\rho,\omega,z)J_{|m|}(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{3.4.47c}$$

代入方程 (3.4.47b)

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z_m}{\mathrm{d}z^2}+(\omega^2-k_\rho^2)Z_m=-\frac{1}{(2\pi)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m\varphi'-\omega t')}J_{|m|}(k_\rho\rho')\delta(z-z') \tag{3.4.47d}$$

上式满足 $Z_m|_{z=0}=Z_m|_{z=h}=0$ 的解为

$$Z_m=-\frac{1}{2\pi^2 h}J_{|m|}(k_\rho\rho')\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m\varphi'-\omega t')}}{\omega^2-k_\rho^2-(n\pi/h)^2}\sin\frac{n\pi z}{h}\sin\frac{n\pi z'}{h} \tag{3.4.47e}$$

代入式 (3.4.47c) 和 (3.4.47a) 得到

$$\begin{aligned}G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=&-\frac{1}{2\pi^2 h}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\sin\frac{n\pi z}{h}\sin\frac{n\pi z'}{h}\\&\times\int_0^{\infty}T_n(k_\rho)J_{|m|}(k_\rho\rho')J_{|m|}(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho\end{aligned} \tag{3.4.48a}$$

其中积分 $T_n(k_\rho)$ 由围道积分得到

$$\begin{aligned}T_n(k_\rho)\equiv&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2-k_\rho^2-(n\pi/h)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega\\=&-\frac{2\pi\sin\sqrt{k_\rho^2+(n\pi/h)^2]}t}{\sqrt{k_\rho^2+(n\pi/h)^2}}H(t-t')\end{aligned} \tag{3.4.48b}$$

上式代入 (3.4.48a) 就得到式 (3.4.46a).

## 3.5 广义 Green 公式及非齐次问题的积分解

本节讨论一般形式的二阶线性偏微分算子的非齐次边值或混合问题

$$\boldsymbol{L}\psi\equiv\sum_{\mu,\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}+\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu(\boldsymbol{r})\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}+c(\boldsymbol{r})\psi=f(\boldsymbol{r}) \tag{3.5.1a}$$

如何引进 Green 函数求积分形式的解. 注意：对抛物型或双曲型方程, 变量 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 包含空间和时间变量. 由于 $\boldsymbol{L}$ 没有了 Hermite 对称性, 方程 (3.5.1a) 解的 Green 函数积分形式涉及共轭算子.

### 3.5.1 广义 Green 公式

由 2.2.4 小节, 二阶线性偏微分算子 $\boldsymbol{L}$ 的共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$

$$\boldsymbol{L}^+\psi^+\equiv\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2(a_{\mu\nu}^*\psi^+)}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial(b_\nu^*\psi^+)}{\partial x_\nu}+c^*\psi^+ \tag{3.5.1b}$$

满足广义 Green 公式

$$\int_{\Omega}[(\boldsymbol{L}\psi)^*\psi^+ - \psi^*\boldsymbol{L}^+\psi^+]\mathrm{d}\Omega = \iint_{\partial\Omega}[(\boldsymbol{P}\psi)^*\psi^+ - \psi^*\boldsymbol{P}^+\psi^+]\mathrm{d}\Sigma \tag{3.5.1c}$$

注意：式中把区域和边界分别改成 $\Omega$ 和 $\partial\Omega$, 如果包含时间, 则 $\Omega$ 为空间区域 $G$ 加时间区间 $[0,T]$, $\partial\Omega$ 包括空间的边界 $\partial G$ 加时间的二个端点 (起始点和结束点). 边界算子及共轭边界算子定义为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\psi &\equiv \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\cos(n_\nu, x_\nu) + \beta\psi \\
\boldsymbol{P}^+\psi^+ &\equiv \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a^*_{\mu\nu}\frac{\partial\psi^+}{\partial x_\nu}\cos(n_\nu, x_\nu) + (\beta^* - b)\psi^+ \\
b &\equiv \sum_{\mu=1}^{n}\left(b^*_\mu - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial a^*_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right)\cos(n_\mu, x_\mu)
\end{aligned} \tag{3.5.1d}$$

考虑边值问题

$$\boldsymbol{L}\psi = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\Omega;\ \boldsymbol{P}\psi|_{\partial\Omega} = B(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial\Omega \tag{3.5.2a}$$

分别定义算子 $\boldsymbol{L}$ 和共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in\Omega \\
&\boldsymbol{P}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{\partial\Omega} = 0,\ \boldsymbol{r}'\in\Omega+\partial\Omega
\end{aligned} \tag{3.5.2b}$$

和

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}^+G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in\Omega \\
&\boldsymbol{P}^+G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{\partial\Omega} = 0,\ \boldsymbol{r}'\in\Omega+\partial\Omega
\end{aligned} \tag{3.5.2c}$$

方程 (3.5.1c) 中取 $\psi^+ = G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, 而 $\psi(\boldsymbol{r})$ 满足方程 (3.5.2a), 则

$$\psi^*(\boldsymbol{r}') = \int_{\Omega} G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\Omega - \iint_{\partial\Omega} B^*(\boldsymbol{r})G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Sigma \tag{3.5.3a}$$

上式交换变量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 并且取复共轭

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \int_{\Omega}[G^+(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]^*f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Omega' - \iint_{\partial\Omega} B(\boldsymbol{r}')[G^+(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]^*\mathrm{d}\Sigma' \tag{3.5.3b}$$

利用 Green 函数的对称性

$$G^+(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) = G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.5.3c}$$

式 (3.5.3b) 可以改写成

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \int_{\Omega} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Omega' - \iint_{\partial\Omega} B(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Sigma' \tag{3.5.3d}$$

**Green 函数对称性证明** 取 $\psi^+ = G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'')$ 和 $\psi = G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 代入方程 (3.5.1c), 并且注意到方程 (3.5.2b), 显然 $G^+(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') = G^*(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}')$, 由点 $\boldsymbol{r}''$ 的任意性, 即得到式 (3.5.3c).

当变量 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 包含时间时, 积分解式 (3.5.3d) 不实用, 在时间端点需要特殊讨论. 下面我们分三种情况: $\boldsymbol{L}$ 在考虑的区域 $\Omega + \partial\Omega$ 上是椭圆、双曲和抛物型来讨论.

### 3.5.2 三维椭圆型方程的 Green 函数

不失一般性, 可认为 $\boldsymbol{L}$ 在区域内已标准化:$a_{\mu\nu} = 1(\mu = \nu)$ 和 $a_{\mu\nu} = 0(\mu \neq \nu)$, 设 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ 为三维空间的矢径 (不涉及时间变量), 算子和共轭算子简化为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}\psi &\equiv \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\nu^2} + \sum_{\nu=1}^{3} b_\nu(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + c(\boldsymbol{r})\psi \\ \boldsymbol{L}^+\psi^+ &\equiv \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x_\nu^2} - \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial [b_\nu^*(\boldsymbol{r})\psi^+]}{\partial x_\nu} + c^*(\boldsymbol{r})\psi^+ \end{aligned} \tag{3.5.4a}$$

以及

$$\begin{gathered} \boldsymbol{P}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} + \beta\psi;\ \boldsymbol{P}^+\psi^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial n} + (\beta^* - b)\psi^+ \\ b = \sum_{\nu=1}^{3} b_\nu^* \cos(n_\nu, x_\nu) \end{gathered} \tag{3.5.4b}$$

注意: 第一类边值对应于 $\beta \to \infty$, 而 $\beta = 0$ 对应于第二类边值问题. 式 (3.5.1c) 变成

$$\int_G [(\boldsymbol{L}\psi)^*\psi^+ - \psi^*\boldsymbol{L}^+\psi^+]\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} [(\boldsymbol{P}\psi)^*\psi^+ - \psi^*\boldsymbol{P}^+\psi^+]\mathrm{d}S \tag{3.5.4c}$$

或者 (下式对讨论第一类边值问题有意义, 事实上, 参数 $\beta$ 是人为引进的, 不出现在上式的面积分中, 当 $\beta \to \infty$ 时, 仅仅对边界算子有影响)

$$\int_G [(\boldsymbol{L}\psi)^*\psi^+ - \psi^*\boldsymbol{L}^+\psi^+]\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} \left[\left(\psi^+\frac{\partial \psi^*}{\partial n} - \psi^*\frac{\partial \psi^+}{\partial n}\right) + b\psi^*\psi^+\right]\mathrm{d}S \tag{3.5.4d}$$

注意, 现在 $\mathrm{d}\tau$ 是通常意义的三维体积元, 而 $\mathrm{d}S$ 是通常意义的面元. 考虑下列两个边值问题

$$\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G;\ \boldsymbol{P}\psi(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = B(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in \partial G \tag{3.5.5a}$$

和

$$\boldsymbol{L}^+\psi^+(\boldsymbol{r}) = g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G;\ \boldsymbol{P}^+\psi^+(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = C(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in \partial G \tag{3.5.5b}$$

当 $\boldsymbol{L}$ 是椭圆型时, 显然 $\boldsymbol{L}^+$ 也是椭圆型的. 方程 (3.5.5a) 和 (3.5.5b) 称为**共轭边值问题**. 由式 (3.5.4c) 或者 (3.5.4d) 可推出方程 (3.5.5a) 和 (3.5.5b) 可解性之间的联系.

(1) 第一类边值问题: $\beta \to \infty$, 边界条件简化为 $\boldsymbol{P}\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = B(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{P}^+\psi^+(\boldsymbol{r}) = \psi^+(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = C(\boldsymbol{r})$. 设 $\phi^+(\boldsymbol{r})$ 是齐次共轭边值问题的非零解

$$\boldsymbol{L}^+\phi^+(\boldsymbol{r}) = 0;\ \phi^+(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = 0 \tag{3.5.6a}$$

取 $\psi(\boldsymbol{r})$ 是方程 (3.5.5a) 的解以及 $\psi^+ = \phi^+(\boldsymbol{r})$, 由式 (3.5.4d)

$$\int_G f^*(\boldsymbol{r})\phi^+(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} B^*(\boldsymbol{r})\frac{\partial \phi^+(\boldsymbol{r})}{\partial n}\mathrm{d}S = 0 \tag{3.5.6b}$$

上式就是方程 (3.5.5a) 可解的相容性条件. 当方程 (3.5.6a) 只有零解时, 上式自动满足. 这时对 $B(\boldsymbol{r})$ 和 $f(\boldsymbol{r})$ 不必附加条件. 因此, 当方程 (3.5.5a) 的齐次共轭边值问题只有零解时, 方程 (3.5.5a) 总有解 (对边界 $\partial G$ 有一定光滑性要求);

反之, 设 $\phi(\boldsymbol{r})$ 是齐次边值问题的非零解 $\boldsymbol{L}\phi(\boldsymbol{r}) = 0;\ \phi(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = 0$, 取 $\psi^+(\boldsymbol{r})$ 是方程 (3.5.5b) 的解以及 $\psi = \phi(\boldsymbol{r})$, 由式 (3.5.4d) 得到共轭边值问题式 (3.5.5b) 的相容性条件 (取复共轭)

$$\int_G g^*(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} C^*(\boldsymbol{r})\frac{\partial \phi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\mathrm{d}S = 0 \tag{3.5.6c}$$

(2) 第二、三类边值问题, 由式 (3.5.4c) 得到方程 (3.5.5a) 有解的必要条件为

$$\int_G f^*(\boldsymbol{r})\phi^+(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G} B^*(\boldsymbol{r})\phi^+(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S = 0 \tag{3.5.6d}$$

其中 $\phi^+(\boldsymbol{r})$ 是齐次共轭边值问题 $\boldsymbol{L}^+\phi^+(\boldsymbol{r}) = 0;\ \boldsymbol{P}^+\phi^+(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = 0$ 的非零解. 反之, 由式 (3.5.4c) 得到共轭边值问题方程 (3.5.5b) 有解的必要条件为

$$\int_G g^*(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G} C^*(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S = 0 \tag{3.5.6e}$$

其中 $\phi(\boldsymbol{r})$ 是齐次边值问题 $\boldsymbol{L}\phi(\boldsymbol{r}) = 0;\ \boldsymbol{P}\phi(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = 0$ 的非零解.

下面考虑边值问题式 (3.5.5a) 的 Green 函数及积分解.

(1) 第一类边值问题：算子 $\boldsymbol{L}$ 和共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 定义为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in G \\ &G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{\partial G}\, = 0,\ \boldsymbol{r}' \in G + \partial G \end{aligned} \tag{3.5.7a}$$

和

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}^+G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in G \\ &G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{\partial G}\, = 0,\ \boldsymbol{r}' \in G + \partial G \end{aligned} \tag{3.5.7b}$$

由式 (3.5.4d) 得

$$\psi^*(\boldsymbol{r}') = \int_G f^*(\boldsymbol{r}) G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} B^*(\boldsymbol{r}) \frac{\partial G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{3.5.7c}$$

上式交换变量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 并利用 Green 函数的对称性 $G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = G^*(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$ 得到方程 (3.5.5a) 的积分解

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \int_G f(\boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau' + \iint_{\partial G} B(\boldsymbol{r}') \frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} \mathrm{d}S' \tag{3.5.7d}$$

注意：上式与式 (3.5.3d) 的区别.

(2) 第二类边值问题：边界算子和共轭边界算子分别为

$$\boldsymbol{P}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n};\ \boldsymbol{P}^+\psi^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial n} - b\psi^+ \tag{3.5.8a}$$

算子 $\boldsymbol{L}$ 和共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 和 $G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 分别定义为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \in G \\ &\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0,\ \boldsymbol{r}' \in G + \partial G \end{aligned} \tag{3.5.8b}$$

和

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}^+G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \in G \\ &\left[\frac{\partial G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n} - bG^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right]_{\partial G} = 0,\ \boldsymbol{r}' \in G + \partial G \end{aligned} \tag{3.5.8c}$$

由式 (3.5.4d), 得到方程 (3.5.5a) 的积分解

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \int_G f(\boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau' - \iint_{\partial G} B(\boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}S' \tag{3.5.8d}$$

(3) 第三类边值问题：边界算子和共轭边界算子由式 (3.5.4b) 表示, 不难得到方程 (3.5.5a) 的积分解

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \int_G f(\boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau' - \iint_{\partial G} B(\boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}S' \tag{3.5.9a}$$

注意：上式与式 (3.5.8d) 形式相同, 但 Green 函数不同, $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 满足

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \in G \\ &\left[\frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n} + \beta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right]_{\partial G} = 0,\ \boldsymbol{r}' \in G + \partial G \end{aligned} \tag{3.5.9b}$$

**Green 函数的构造法** 我们可用构造法来求算子 $\boldsymbol{L}$ 在椭圆型情况下的基本解. 基本解 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足的方程

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial^2 G_0}{\partial x_\nu^2}+\sum_{\nu=1}^{3}b_\nu\frac{\partial G_0}{\partial x_\nu}+cG_0=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3.5.10a}$$

根据 3.3.3 小节, 主部的基本解已知, 设为 $G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$. 把上式改写成

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial^2 G_0}{\partial x_\nu^2}=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\sum_{\nu=1}^{3}b_\nu\frac{\partial G_0}{\partial x_\nu}-cG_0 \tag{3.5.10b}$$

于是有积分方程

$$\begin{aligned}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=&\int_G G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau''\\&-\int_G\left[\sum_{\nu=1}^{3}b_\nu\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')}{\partial x_\nu}+cG_0(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')\right]G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\mathrm{d}\tau''\end{aligned} \tag{3.5.10c}$$

故可设式 (3.5.10a) 的解有形式

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\int_G G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\rho(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'' \tag{3.5.11a}$$

利用

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial^2 G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_\nu^2}=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3.5.11b}$$

把式 (3.5.11a) 代入式 (3.5.10b) 可得

$$\begin{aligned}&-\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\sum_{\nu=1}^{3}b_\nu\frac{\partial G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_\nu}+cG_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\\&+\int_G\rho(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')\left[\sum_{\nu=1}^{3}b_\nu\frac{\partial G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial x_\nu}+cG_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\right]\mathrm{d}\tau''=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\end{aligned}$$

故 $\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足积分方程

$$\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\int_G k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\rho(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'' \tag{3.5.11c}$$

其中非齐次项和积分核为

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\equiv\sum_{\nu=1}^{3}b_\nu(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_\nu}+cG_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\\k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\equiv\sum_{\nu=1}^{3}b_\nu(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial x_\nu}+cG_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\end{aligned} \tag{3.5.11d}$$

式 (3.5.11c) 是第二类 Fredholm 积分方程, 可用积分方程理论来讨论, 见第五章.

**本征函数展开法**　算子 $\boldsymbol{L}$ 和共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的本征值问题为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}\psi_i = \lambda_i\rho\psi_i,\ \boldsymbol{P}\psi_i = 0,\ (i = 0, 1, 2, \cdots)\\&\boldsymbol{L}^+\psi_j^+ = \lambda_j^+\rho\psi_j^+,\ \boldsymbol{P}^+\psi_j^+ = 0,\ (j = 0, 1, 2, \cdots)\end{aligned} \tag{3.5.12a}$$

设本征函数系 $\{\psi_i(\boldsymbol{r})\}$ 构成 $L^2[G]$ 的完备系, Green 函数 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 可以展开为

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\psi_i(\boldsymbol{r}) \tag{3.5.12b}$$

代入方程 (3.5.9b) 得

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i\lambda_i\rho(\boldsymbol{r})\psi_i(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.5.13}$$

两边乘共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的本征函数的复共轭 $[\psi_j^+(\boldsymbol{r})]^*$ 并积分得到 (利用正交性关系 (2.2.37b), 把该式推广到三维情况)

$$\lambda_j c_j = \frac{1}{N_j^2}\int_G [\psi_j^+(\boldsymbol{r})]^*\delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau = \frac{1}{N_j^2}[\psi_j^+(\boldsymbol{r}')]^* \quad (j = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.5.14a}$$

其中

$$N_j^2 = \int_G \rho(\boldsymbol{r})\psi_j(\boldsymbol{r})[\psi_j^+(\boldsymbol{r})]^*\mathrm{d}\tau \tag{3.5.14b}$$

设 $\lambda_0 = 0$ 不是算子 $\boldsymbol{L}$ 的零本征值, 则由式 (3.5.14a) 可以得到 $c_j$, 然后代入式 (3.5.12b) 得到 Green 函数

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^2\lambda_i}[\psi_i^+(\boldsymbol{r}')]^*\psi_i(\boldsymbol{r}) \tag{3.5.14c}$$

同理, 可以得到共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的 Green 函数

$$G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(M_j^2)\lambda_j^+}\psi_j^*(\boldsymbol{r}')\psi_j^+(\boldsymbol{r}) \tag{3.5.15a}$$

其中

$$M_j^2 = \int_G \rho(\boldsymbol{r})\psi_j^*(\boldsymbol{r})\psi_j^+(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau \tag{3.5.15b}$$

利用 $\lambda_j^+ = \lambda_j^*$ 和 $M_j^2 = (N_j^2)^*$, 不难证明 $G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = G^*(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$. 与 3.2.4 小节的一维情况类似, 当 $\lambda_0 = 0$ 是算子 $\boldsymbol{L}$ 的零本征值时, 可以定义广义 Green 函数.

**例 3.5.1** 对 Helmhotz 算子的非齐次方程 (注意: $k(\boldsymbol{r})$ 和 $\beta(\boldsymbol{r})$ 是复函数; 反之, 算子 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称的算子)

$$\begin{aligned} &[-\nabla^2 + k^2(\boldsymbol{r})]\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G \\ &\left[\frac{\partial \psi}{\partial n} + \beta(\boldsymbol{r})\psi\right]_{\partial G} = b(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in \partial G \end{aligned} \tag{3.5.16a}$$

由 2.2.4 小节讨论, $\psi_i^+(\boldsymbol{r}) = \psi_i^*(\boldsymbol{r})$, 故得到 (利用一般关系 $\lambda^+ = \lambda^*$)

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^2 \lambda_i} \psi_i(\boldsymbol{r}')\psi_i(\boldsymbol{r}) \\ G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(M_j^2)\lambda_j^*} \psi_j^*(\boldsymbol{r}')\psi_j^*(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{3.5.16b}$$

其中 $N_j^2 = \displaystyle\int_G \rho(\boldsymbol{r})\psi_j^2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = (M_j^2)^*$.

### 3.5.3 抛物型方程的 Green 函数

考虑简单的热传导方程

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla u] + q(\boldsymbol{r})u = f(\boldsymbol{r}, t) \tag{3.5.17a}$$

上式中把没有二阶导数的时间变量用 $t$ 来表示, 而 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ 表示三维空间变量. 注意: 一般来说, 对含时的热传导和波动问题, 物理上要求方程及边界条件中出现的系数和非齐次项都是实函数. 显然, 只要 $p(\boldsymbol{r}) > 0$, 整个算子

$$\boldsymbol{\Pi} = \rho\frac{\partial}{\partial t} - \nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q = \rho\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{L} \tag{3.5.17b}$$

是抛物型的. 共轭算子也是抛物型的

$$\boldsymbol{\Pi}^+ = -\rho\frac{\partial}{\partial t} - \nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q = -\rho\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{L} \tag{3.5.17c}$$

注意: 为了突出由时间变量引起的非 Hermite 对称性, 我们假定空间部分是实系数的 S–L 型算子 $\boldsymbol{L} = -\nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q$. 这时, 广义 Green 公式 (3.5.1c) 中的积分应在时 - 空四维空间 $\Omega$ 上进行. 时 – 空体积元 $\mathrm{d}\Omega$ 等于空间体积元 $\mathrm{d}\tau$ 与时间元 $\mathrm{d}t$ 之积: $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$. 设 $R$ 是 $\boldsymbol{r} - t$ 空间中长为 $T$ 的圆柱, 圆柱的下底为 $t = 0$, 上底为 $t = T$, 如图 3.5.1, 仍然用 $G$ 表示三维空间中的区域, $\partial G$ 为其边界. 这时广义 Green 公式 (3.5.1c) 为

$$\int_R [(\boldsymbol{\Pi}\psi)^*\psi^+ - \psi^*\boldsymbol{\Pi}^+\psi^+]\mathrm{d}\Omega = \int_R \tilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{Q}\mathrm{d}\Omega = \iint_{\partial R} \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma \tag{3.5.18a}$$

其中: $\tilde{\nabla}=(\nabla,\partial/\partial t)$ 表示空 − 时四维梯度算子, 四维矢量 $\boldsymbol{Q}$ 定义为

$$\boldsymbol{Q}\equiv[p(-\psi^{+}\nabla\psi^{*}+\psi^{*}\nabla\psi^{+}),\rho\psi^{*}\psi^{+}] \tag{3.5.18b}$$

界面 $\partial R$ 有三部分组成 $\partial R=\partial R_x+\partial R_T+\partial R_0$, 其中 $\partial R_x$ 为圆柱侧面, 法向矢量 $\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{n}_x,0]$ (其中 $\boldsymbol{n}_x$ 是三维空间区域 $G$ 之边界 $\partial G$ 上的法向矢量); $\partial R_0$ 为下底面, 法向矢量 $\boldsymbol{n}=[0,-1]$; $\partial R_T$ 为上底面, 法向矢量 $\boldsymbol{n}=[0,1]$. $\mathrm{d}\Sigma$ 是四维面积元: 在 $\partial R_x$ 上,$\mathrm{d}\Sigma$ 等于空间边界 $\partial G$ 上的面积元 $\mathrm{d}S$ 乘以 $\mathrm{d}t$, 而在 $\partial R_0$ 和 $\partial R_T$ 上, $\mathrm{d}\Sigma$ 等于空间区域 $G$ 的体积元 $\mathrm{d}\tau$(可以想象二维情况, $G$ 是由曲线 $l$ 围成的平面区域, $\partial R_0$ 和 $\partial R_T$ 分别是 $t=0$ 和 $T$ 时刻的 $G$, $\partial R_x$ 上的面积元等于曲线 $l$ 上的线元 $\mathrm{d}l$ 乘以 $\mathrm{d}t$). 式 (3.5.18a) 的四维面积分分开后得到

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_G[(\boldsymbol{\Pi}\psi)^{*}\psi^{+}-\psi^{*}\boldsymbol{\Pi}^{+}\psi^{+}]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t&=\int_{\partial R_T}\rho\psi^{*}\psi^{+}\mathrm{d}\tau-\int_{\partial R_0}\rho\psi^{*}\psi^{+}\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^T\iint_{\partial G}p\left(-\psi^{+}\frac{\partial\psi^{*}}{\partial n}+\psi^{*}\frac{\partial\psi^{+}}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.5.18c}$$

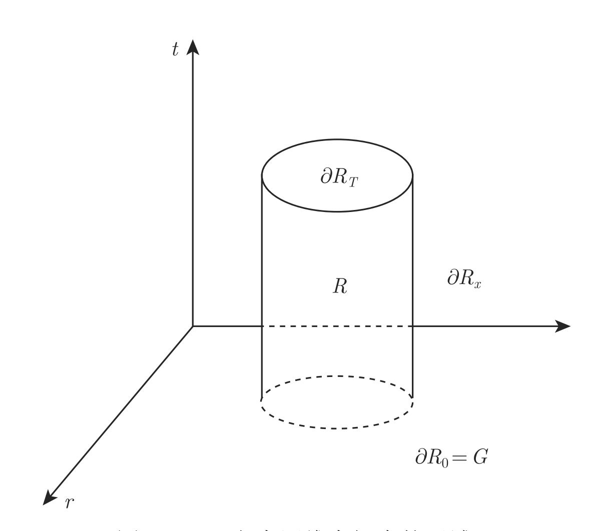



图 3.5.1　时-空四维空间中的区域 $R$

下面利用上式求热传导方程的定解问题

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}\psi=f(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G,t>0\\&\psi(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r},0);\quad\left.\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=B(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{3.5.19a}$$

的积分解 (注意: 边界条件是非齐次的). 定义 $\boldsymbol{\Pi}$ 和 $\boldsymbol{\Pi}^{+}$ 的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$

和 $G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$ 分别满足

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ 0<t,t'<T\\&G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')|_{t=0}=0;\quad \left.\left(\alpha G+\beta\frac{\partial G}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{3.5.19b}$$

和

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}^+ G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ 0<t,t'<T\\&G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')|_{t=T}=0;\quad \left.\left(\alpha G^++\beta\frac{\partial G^+}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{3.5.19c}$$

注意: $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$ 的初始条件取在 $t=0$, 而 $G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$ 的初始条件取在 $t=T$. 利用本征函数方法, 不难得到

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')&=H(t-t')\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\exp[-\lambda_n(t-t')]\\&\qquad (0<t,t'<T)\\G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')&=H(t'-t)\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\exp[-\lambda_n(t'-t)]\\&\qquad (0<t,t'<T)\end{aligned}\tag{3.5.19d}$$

其中 $\{\psi_n(\boldsymbol{r}),\lambda_n\}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数集. 注意：二个 Green 函数满足的初始条件由阶跃函数保证. 由上式, 容易推出 Green 函数的对称性, 即

$$[G^+(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},t',t)]^*=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\tag{3.5.19e}$$

式 (3.5.18c) 中取 $\psi^+=G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$, 而 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 满足方程 (3.5.19a) 得到

$$\begin{aligned}\psi^*(\boldsymbol{r}',t')=&\int_0^T\int_G f^*(\boldsymbol{r},t)G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+\int_{\partial G}\rho\psi^*(\boldsymbol{r},0)G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0,t')\mathrm{d}\tau\\&+\begin{cases}-\displaystyle\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r})}{\alpha}B^*(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,\ \alpha\neq 0\\+\displaystyle\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r})}{\beta}B^*(\boldsymbol{r},t)G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\mathrm{d}S\mathrm{d}t,\ \beta\neq 0\end{cases}\end{aligned}\tag{3.5.20a}$$

上式取复共轭、交换变量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 以及 $t$ 和 $t'$, 且利用式 (3.5.19e)

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t\int_G f(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t'+\int_{\partial G}\rho\psi(\boldsymbol{r}',0)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,0)\mathrm{d}\tau'$$
$$+\begin{cases}-\displaystyle\int_0^t\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r}')}{\alpha}B(\boldsymbol{r}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')}{\partial n'}\mathrm{d}S'\mathrm{d}t',\ \alpha\neq 0\\ +\displaystyle\int_0^t\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r}')}{\beta}B(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t',\ \beta\neq 0\end{cases}\tag{3.5.20b}$$

上式就是方程 (3.5.19a) 的积分解. 注意: 上式与式 (2.4.34c) 完全相同.

如果我们定义 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 和 $G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 分别满足

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ 0<t<T\\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)|_{t=0}=\frac{\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r})};\ \ \left.\left(\alpha G+\beta\frac{\partial G}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered}\tag{3.5.21a}$$

和

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi}^+G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ 0<t<T\\ G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)|_{t=T}=\frac{\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r})};\ \ \left.\left(\alpha G^++\beta\frac{\partial G^+}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered}\tag{3.5.21b}$$

利用本征函数方法, 不难得到

$$\begin{gathered}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_n t),\ (0<t<T)\\ G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\exp[-\lambda_n(T-t)],\ (0<t<T)\end{gathered}\tag{3.5.21c}$$

由上式, 容易推出 Green 函数的对称性, 即

$$[G^+(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},t)]^*=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t)\tag{3.5.21d}$$

取式 (3.5.18c) 中 $\psi$ 满足方程 (3.5.19a), 而 $\psi^+=G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$, 利用初始条件

$$\int_{\partial R_T}\rho\psi^*\psi^+\mathrm{d}\tau=\int_{\partial R_T}\rho\psi^*G^+|_{t=T}\mathrm{d}\tau=\psi^*(\boldsymbol{r}',T)\tag{3.5.22a}$$

因此有

$$\psi^*(\boldsymbol{r}',T)=\int_0^T\int_G f^*(\boldsymbol{r},t)G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau \\ +\int_G \rho(\boldsymbol{r})\psi^*(\boldsymbol{r},0)G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)\mathrm{d}\tau \\ +\begin{cases}\displaystyle\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r})B^*(\boldsymbol{r},t)}{\alpha}\cdot\frac{\partial G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t, & \alpha\neq 0\\ \displaystyle -\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r})B^*(\boldsymbol{r},t)}{\beta}\cdot G^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}S\mathrm{d}t, & \beta\neq 0\end{cases} \tag{3.5.22b}$$

上式取复共轭、交换变量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$, 且利用式 (3.5.21d)

$$\psi(\boldsymbol{r},T)=\int_0^T\int_G f(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t' \\ +\int_G \rho(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}',0)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T)\mathrm{d}\tau' \\ +\begin{cases}\displaystyle\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r}')B(\boldsymbol{r}',t')}{\alpha}\cdot\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t')}{\partial n'}\mathrm{d}S'\mathrm{d}t', & \alpha\neq 0\\ \displaystyle -\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r}')B(\boldsymbol{r}',t')}{\beta}\cdot G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t', & \beta\neq 0\end{cases} \tag{3.5.22c}$$

由于 $T$ 的任意性, 上式可以看作方程 (3.5.19a) 的解.

下面作几点说明:

(1) 热传导的逆时间初值问题是不适定的, 但方程 (3.5.19c) 和 (3.5.21b) 是共轭方程的逆时间初值 (即给定 $t=T$, 求 $t<T$ 时间内的解), 它是适定的;

(2) 式 (3.5.22c) 中 $T$ 为任意选取, 故可视为问题的解, 由 Green 函数的表达式 (3.5.19d) 和 (3.5.21c), 比较式 (3.5.22c) 和 (3.5.20b), 两者是一致的;

(3) 与 2.4.4 小节用本征函数展开法得到的解相比, 解式完全一致.

(4) 式 (3.5.20b) 和 (3.5.22c) 可应用于 Cauchy 问题, 这时 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$ 或 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 为基本解, 要求在无穷远处很快趋于零. 以式 (3.5.22c) 为例, 面积分一项应为零, 故

$$\psi(\boldsymbol{r},T)=\int_0^T\int_G f(\boldsymbol{r}',t')G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t')\mathrm{d}t'\mathrm{d}\tau' \\ +\int_G \rho(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}',0)G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T)\mathrm{d}\tau' \tag{3.5.22d}$$

由式 (3.4.28b), 显然

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t)=\frac{1}{[4\pi(T-t)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}{4(T-t)}\right],\ (t<T) \tag{3.5.22e}$$

**一维问题**　对一维问题, 式 (3.5.18c) 中面积分 d$S$ 变成在边界点积分, 故需另外处理. 这时区域 $R$ 为 $t-x$ 平面中的矩形, 如图 3.5.2. 而 (3.5.18c) 变成

$$\begin{aligned}\int_R [(\boldsymbol{\Pi}\psi)^*\psi^+ - \psi^*\boldsymbol{\Pi}^+\psi^+]\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \iint_R \tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{Q}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \iint_{\partial R}[-p\psi^+\psi_x^* + p\psi^*\psi_x^+, \rho\psi^*\psi^+]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma\end{aligned} \tag{3.5.23a}$$

其中 $\boldsymbol{Q}=[-p\psi^+\psi_x^*+p\psi^*\psi_x^+,\rho\psi^*\psi^+]$. 在四条边上, 当 $t=0$ 和 $T$ 时, 法向单位矢量分别为 $\boldsymbol{n}=[0,-1]$ 和 $\boldsymbol{n}=[0,1]$; 当 $x=0$ 和 $l$ 时, 法向单位矢量分别为 $\boldsymbol{n}=[-1,0]$ 和 $\boldsymbol{n}=[1,0]$ (如图 3.5.2), 故上式变成

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^l [(\boldsymbol{\Pi}\psi)^*\psi^+ - \psi^*\boldsymbol{\Pi}^+\psi^+]\mathrm{d}x\mathrm{d}t =& -\int_0^l \rho\psi^*\psi^+|_{t=0}\mathrm{d}x \\ &+\int_0^l \rho\psi^*\psi^+|_{t=T}\mathrm{d}x + \int_0^T p\left(-\psi^+\frac{\partial\psi^*}{\partial x}+\psi^*\frac{\partial\psi^+}{\partial x}\right)_{x=l}\mathrm{d}t \\ &-\int_0^T p\left(-\psi^+\frac{\partial\psi^*}{\partial x}+\psi^*\frac{\partial\psi^+}{\partial x}\right)_{x=0}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.5.23b}$$

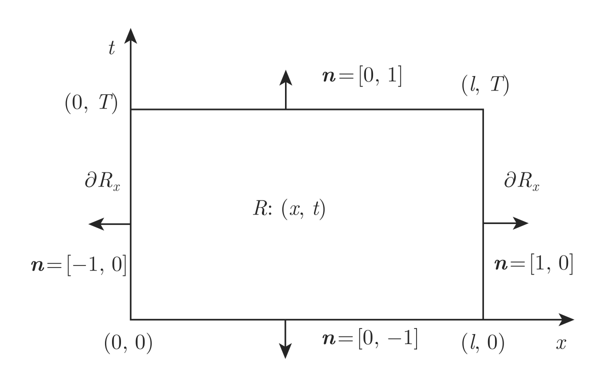



图 3.5.2　区域 $R$ 为 $t-x$ 平面中的矩形

对一维混合问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi}\psi \equiv \rho\frac{\partial\psi}{\partial t}+\boldsymbol{L}\psi = f(x,t),\ t>0,\ x\in(0,l) \\ \psi|_{t=0}=\psi(x,0),\ x\in[0,l] \\ \left.\left(\alpha_1\psi-\beta_1\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=g_1(t);\quad \left.\left(\alpha_2\psi+\beta_2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=g_2(t)\end{gathered} \tag{3.5.24a}$$

共轭算子 $\boldsymbol{\Pi}^+$ 为

$$\boldsymbol{\Pi}^+ = -\rho\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{L} = -\rho\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial}{\partial x}\right)+q \tag{3.5.24b}$$

定义 Green 函数 $G(x,x',t)$ 和 $G^+(x,x',t)$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi}G=0,\ (0<t<T);\ G|_{t=0}=\delta(x,x')/\rho(x)\\ \left.\left(\alpha_1 G-\beta_1\frac{\partial G}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=0;\ \ \left.\left(\alpha_2 G+\beta_2\frac{\partial G}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=0\end{gathered}\tag{3.5.24c}$$

和

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi}^+G^+=0,\ (0<t<T);\ G^+|_{t=T}=\delta(x,x')/\rho(x)\\ \left.\left(\alpha_1 G^+-\beta_1\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=0;\ \ \left.\left(\alpha_2 G^++\beta_2\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=0\end{gathered}\tag{3.5.24d}$$

由本征函数方法, 不难得到

$$\begin{gathered}G(x,x',t)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(x')\psi_n(x)\exp(-\lambda_n t),\ (0<t<T)\\ G^+(x,x',t)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-\lambda_n(T-t)]\psi_n^*(x')\psi_n(x),\ (0<t<T)\end{gathered}\tag{3.5.24e}$$

以及对称性关系 $[G^+(x',x,t)]^*=G(x,x',T-t)$. 取 $\psi^+=G^+(x,x',t)$ 和 $\psi$ 满足方程 (3.5.24a), 由式 (3.5.23b) 得到

$$\begin{aligned}\psi^*(x',T)=&\int_0^T\int_0^l f^*(x,t)G^+(x,x',t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^l\rho\psi_0^*(x,0)G^+(x,x',0)\mathrm{d}x\\ &+\int_0^T p\left(-G^+\frac{\partial\psi^*}{\partial x}+\psi^*\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)_{x=0}\mathrm{d}t\\ &-\int_0^T p\left(-G^+\frac{\partial\psi^*}{\partial x}+\psi^*\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)_{x=l}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{3.5.25a}$$

上式最后二项可用方程 (3.5.24a) 和 (3.5.24d) 中边界条件消去 $\psi^*$ 和 $\partial\psi^*/\partial x$. 设 $\alpha_1\neq 0$ 和 $\alpha_2\neq 0$, 对 $x$=0 和 $l$ 端点分别有

$$\begin{gathered}\left.\left(G^+\frac{\partial\psi^*}{\partial x}-\psi^*\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=-\frac{g_1^*(t)}{\alpha_1}\frac{\partial G^+}{\partial x},\ \alpha_1\neq 0\\ \left.\left(G^+\frac{\partial\psi^*}{\partial x}-\psi^*\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=-\frac{g_2^*(t)}{\alpha_2}\frac{\partial G^+}{\partial x},\ \alpha_2\neq 0\end{gathered}\tag{3.5.25b}$$

方程 (3.5.25a) 取复共轭和交换变量且利用关系 $[G^+(x',x,t)]^*=G(x,x',T-t)$, 于

是从式 (3.5.25a) 可得

$$\begin{aligned}\psi(x,T)=&\int_0^T\int_0^l f(x',t)G(x,x',T-t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t+\int_0^l \rho\psi_0(x',0)G(x,x',T)\mathrm{d}x'\\&+\int_0^T p\left[\frac{g_1(t)}{\alpha_1}\frac{\partial G(x,x',T-t)}{\partial x'}\right]_{x'=0}\mathrm{d}t\\&-\int_0^T p\left[\frac{g_2(t)}{\alpha_2}\frac{\partial G(x,x',T-t)}{\partial x'}\right]_{x'=l}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{3.5.25c}$$

对 $\beta_1\neq 0$ 和 $\beta_2\neq 0$ 可以得到类似的关系式. 由 $T$ 的任意性, 我们得到了方程 (3.5.24a) 的积分解.

### 3.5.4 双曲型方程的 Green 函数

考虑波动算子的混合问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi}\psi\equiv\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}\psi=f(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\ \psi(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r},0);\ \psi_t(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\dot{\psi}(\boldsymbol{r},0),\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G\\ \left.\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=B(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in\partial G,\ t\geqslant 0\end{gathered}\tag{3.5.26a}$$

其中波动算子 $\boldsymbol{\Pi}$ 与共轭算子 $\boldsymbol{\Pi}^+$ 相等

$$\boldsymbol{\Pi}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\Pi}^+\tag{3.5.26b}$$

定义柱形区域 $R$ 如图 3.5.1, 由广义 Green 公式 (3.5.1c)

$$\int_R[(\boldsymbol{\Pi}\psi)^*\psi^+-\psi^*\boldsymbol{\Pi}^+\psi^+]\mathrm{d}\Omega=\int_R\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{Q}\mathrm{d}\Omega=\iint_{\partial R}\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma\tag{3.5.27a}$$

其中 $\tilde{\nabla}=(\nabla,\partial/\partial t)$ 表示空–时四维梯度算子, 四维矢量 $\boldsymbol{Q}$ 定义为

$$\boldsymbol{Q}\equiv[p(-\psi^+\nabla\psi^*+\psi^*\nabla\psi^+),\rho(\psi^+\psi_t^*-\psi^*\psi_t^+)]\tag{3.5.27b}$$

式 (3.5.27a) 的四维面积分分开后得到

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_G[(\boldsymbol{\Pi}\psi)^*\psi^+-\psi^*\boldsymbol{\Pi}^+\psi^+)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=&\int_{\partial R_T}\rho(\psi^+\psi_t^*-\psi^*\psi_t^+)\mathrm{d}\tau\\&-\int_{\partial R_0}\rho(\psi^+\psi_t^*-\psi^*\psi_t^+)\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^T\iint_{\partial G}p\left(-\psi^+\frac{\partial\psi^*}{\partial n}+\psi^*\frac{\partial\psi^+}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{3.5.27c}$$

定义方程 (3.5.26a) 的 Green 函数 $G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},t)$ 和 $G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},t)$ 满足

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi} G_2=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ t<T\\ G_2|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial G_2}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r})};\quad \left.\left(\alpha G_2+\beta\frac{\partial G_2}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered}\tag{3.5.28a}$$

和

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi} G_2^+=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ t<T\\ G_2^+|_{t=T}=0,\quad \left.\frac{\partial G_2^+}{\partial t}\right|_{t=T}=\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r})};\quad \left.\left(\alpha G_2^++\beta\frac{\partial G_2^+}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered}\tag{3.5.28b}$$

利用本征函数方法, 不难得到

$$\begin{aligned}G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_m(\boldsymbol{r}),\ t>0\\ G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[\sqrt{\lambda_n}(t-T)]}{\sqrt{\lambda_n}}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}),\ t<T\end{aligned}\tag{3.5.28c}$$

故

$$[G_2^+(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},t)]^*=G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-T)=-G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t)\tag{3.5.28d}$$

取 $\psi^+=G_2^+$, 而 $\psi$ 满足方程 (3.5.26a), 则

$$\int_{\partial R_T}\rho(\psi^+\psi_t^*-\psi^*\psi_t^+)\mathrm{d}\tau=-\psi^*(\boldsymbol{r}',T)\tag{3.5.29a}$$

故

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_G f^*(\boldsymbol{r},t)G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=-\psi^*(\boldsymbol{r}',T)\\ &\quad-\int_G\rho\left[G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)\dot{\psi}^*(\boldsymbol{r},0)-\psi^*(\boldsymbol{r},0)\frac{\partial G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)}{\partial t}\right]\mathrm{d}\tau\\ &\quad+\int_0^T\iint_{\partial G}p\left(-G_2^+\frac{\partial\psi^*}{\partial n}+\psi^*\frac{\partial G_2^+}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{3.5.29b}$$

另一方面, 利用方程 (3.5.28b) 和 (3.5.26a) 中边界条件得到

$$p\left(-G_2^+\frac{\partial\psi^*}{\partial n}+\psi^*\frac{\partial G_2^+}{\partial n}\right)=\begin{cases}\dfrac{p(\boldsymbol{r})B^*(\boldsymbol{r},t)}{\alpha}\cdot\left[\dfrac{\partial G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial n}\right], & \alpha\neq0\\ -\dfrac{p(\boldsymbol{r})B^*(\boldsymbol{r},t)}{\beta}\cdot G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t), & \beta\neq0\end{cases}\tag{3.5.29c}$$

方程 (3.5.29b) 取复共轭和交换变量且利用关系式 (3.5.29c) 得到

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r},T)=&\frac{\partial}{\partial T}\int_G\rho\psi(\boldsymbol{r}',0)G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T)\mathrm{d}\tau'+\int_G\rho\dot{\psi}(\boldsymbol{r}',0)G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T)\mathrm{d}\tau'\\&+\int_0^T\int_G f(\boldsymbol{r}',t)G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t)\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t\\&+\begin{cases}-\displaystyle\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r}')B(\boldsymbol{r}',t)}{\alpha}\cdot\left[\frac{\partial G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t)}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'\mathrm{d}t,\ \alpha\neq 0\\ \displaystyle\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r}')B(\boldsymbol{r}',t)}{\beta}\cdot G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t)\mathrm{d}S'\mathrm{d}t,\ \beta\neq 0\end{cases}\end{aligned}\tag{3.5.29d}$$

由于 $T$ 的任意性, 上式就是方程 (3.5.26a) 的积分解, 上式与式 (2.4.35c) 是一致的. 注意: 当 $\lambda_0=0$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的本征值时, 必须引进广义 Green 函数, 要求 Green 函数满足的初始条件改成

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G_2}{\partial t}\right|_{t=0}&=\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r})}-\psi_0^*(\boldsymbol{r}')\psi_0(\boldsymbol{r})\\ \left.\frac{\partial G_2^+}{\partial t}\right|_{t=T}&=\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r})}-\psi_0^*(\boldsymbol{r}')\psi_0(\boldsymbol{r})\end{aligned}\tag{3.5.29e}$$

于是, 广义 Green 函数 $G_2$ 和 $G_2^+$ 仍然由式 (3.5.28c) 表示. 这时通解式 (3.5.29d) 中应增加一项 $A\psi_0(\boldsymbol{r})$, 其中 $A$ 为任意常数.

**一维问题**　一维情形与 3.5.3 小节同样处理, 设一维波动方程的混合问题为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}\psi\equiv\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}\psi=f(x,t),\ t>0,\ x\in(0,l)\\&\psi|_{t=0}=\psi(x,0),\ \psi_t|_{t=0}=\dot{\psi}(x,0),\ x\in[0,l]\\&\left.\left(\alpha_1\psi-\beta_1\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=g_1(t);\quad\left.\left(\alpha_2\psi+\beta_2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=g_2(t)\end{aligned}\tag{3.5.30a}$$

其中

$$\boldsymbol{\Pi}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial}{\partial x}\right)+q=\boldsymbol{\Pi}^+\tag{3.5.30b}$$

广义 Green 公式为

$$\begin{aligned}&\int_0^l\int_0^T[(\boldsymbol{\Pi}\psi)^*\psi^+-\psi^*\boldsymbol{\Pi}\psi^+]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_R\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{Q}\mathrm{d}\Sigma\\=&\int_0^l\rho(\psi^+\psi_t^*-\psi^*\psi_t^+)|_{t=T}\mathrm{d}x-\int_0^l\rho(\psi^+\psi_t^*-\psi^*\psi_t^+)|_{t=0}\mathrm{d}x\\&+\int_0^T p(-\psi^+\psi_x^*+\psi^*\psi_x^+)|_{x=l}\mathrm{d}t-\int_0^T p(-\psi^+\psi_x^*+\psi^*\psi_x^+)|_{x=0}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{3.5.30c}$$

其中 $\boldsymbol{Q} \equiv [p(-\psi^+\psi_x^* + \psi^*\psi_x^+), \rho(\psi^+\psi_t^* - \psi^*\psi_t^+)]$. 定义方程 (3.5.30a) 的 Green 函数 $G_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, t)$ 和 $G_2^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, t)$ 满足

$$\boldsymbol{\Pi} G_2 = 0,\ x,x' \in (0,l)\ t < T$$

$$G_2|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial G_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\delta(x - x')}{\rho(x)} \tag{3.5.31a}$$

$$\left.\left(\alpha_1 G_2 - \beta_1 \frac{\partial G_2}{\partial x}\right)\right|_{x=0} = 0;\quad \left.\left(\alpha_2 G_2 + \beta_2 \frac{\partial G_2}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = 0$$

和

$$\boldsymbol{\Pi} G_2^+ = 0,\ x,x' \in (0,l),\ t \in (0,T)$$

$$G_2^+|_{t=T} = 0,\quad \left.\frac{\partial G_2^+}{\partial t}\right|_{t=T} = \frac{\delta(x - x')}{\rho(x)}; \tag{3.5.31b}$$

$$\left.\left(\alpha_1 G_2^+ - \beta_1 \frac{\partial G_2^+}{\partial x}\right)\right|_{x=0} = 0;\quad \left.\left(\alpha_2 G_2^+ + \beta_2 \frac{\partial G_2^+}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = 0$$

利用本征函数方法, 不难得到

$$\begin{aligned} G_2(x, x', t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}} \psi_n^*(x')\psi_n(x),\ t > 0 \\ G_2^+(x, x', t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[\sqrt{\lambda_n}(t - T)]}{\sqrt{\lambda_n}} \psi_n^*(x')\psi_n(x),\ t < T \end{aligned} \tag{3.5.31c}$$

故

$$[G_2^+(x', x, t)]^* = G_2(x, x', t - T) = -G_2(x, x', T - t) \tag{3.5.31d}$$

取 $\psi^+ = G_2^+(x, x', t)$ 和 $\psi$ 满足方程 (3.5.30a), 由式 (3.5.30c), 当 $\alpha_1 \neq 0$ 和 $\alpha_2 \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} \psi(x, T) = &\frac{\partial}{\partial T} \int_0^l \rho\psi(x', 0) G_2(x, x', T) \mathrm{d}x' + \int_0^l \rho\dot{\psi}(x', 0) G_2(x, x', T) \mathrm{d}x' \\ &+ \int_0^T \int_0^l f(x', t) G_2(x, x', T - t) \mathrm{d}x' \mathrm{d}t \\ &- \int_0^T \frac{p(0) g_1(t)}{\alpha_1} \cdot \left.\frac{\partial G_2(x, x', T - t)}{\partial x'}\right|_{x'=0} \mathrm{d}t \\ &+ \int_0^T \frac{p(l) g_2(t)}{\alpha_2} \cdot \left.\frac{\partial G_2(x, x', T - t)}{\partial x'}\right|_{x'=l} \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.5.31e}$$

对 $\beta_1 \neq 0$ 和 $\beta_2 \neq 0$ 可以得到类似的关系式.

### 3.5.5　抛物近似的波动方程

在研究轴对称波束沿 $z$ 方向传播过程中, 经常遇到下列抛物型方程 (实际上为色散型方程) 的边值问题

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\mathrm{i}}{4k_0}\nabla_\perp^2+\alpha\right)\psi=f(\rho,z),\ z\in(0,\infty),\ \rho\in(0,\infty) \tag{3.5.32a}$$

边界条件为 $\psi(\rho,z)|_{z=0}=0$. 其中 $\alpha$ 和 $k_0$ 为实常数, $\nabla_\perp^2$ 为与传播方向垂直的平面内的 Laplace 算子, 在轴对称情况下为

$$\nabla_\perp^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} \tag{3.5.32b}$$

用 Green 函数方法求解方程 (3.5.32a), 微分算子以及共轭微分算子为

$$\boldsymbol{\Pi}\equiv\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\mathrm{i}}{4k_0}\nabla_\perp^2+\alpha;\ \boldsymbol{\Pi}^+\equiv-\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\mathrm{i}}{4k_0}\nabla_\perp^2+\alpha \tag{3.5.32c}$$

定义 Green 函数 $G(\rho,\rho',z)$ 和 $G^+(\rho,\rho',z)$ 满足

$$\boldsymbol{\Pi}G\equiv 0,(0<z<Z);G|_{z=0}=\frac{1}{2\pi\rho}\delta(\rho,\rho') \tag{3.5.33a}$$

和

$$\boldsymbol{\Pi}^+G^+\equiv 0,(0<z<Z);G^+|_{z=Z}=\frac{1}{2\pi\rho}\delta(\rho,\rho') \tag{3.5.33b}$$

其中 $Z$ 为引进的参数. 作 Hankel 变换

$$\begin{aligned}G(\rho,\rho',z)&=\int_0^\infty\tilde{G}(k_\rho,\rho',z)J_0(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho\\ G^+(\rho,\rho',z)&=\int_0^\infty\tilde{G}^+(k_\rho,\rho',z)J_0(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho\end{aligned} \tag{3.5.33c}$$

代入方程 (3.5.33a) 和 (3.5.33b) 得到

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{G}}{\mathrm{d}z}+\left(\frac{\mathrm{i}k_\rho^2}{4k_0}+\alpha\right)\tilde{G}=0;\quad \tilde{G}(k_\rho,z;\rho')\Big|_{z=0}=\frac{1}{2\pi}J_0(k_\rho\rho') \tag{3.5.34a}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{G}^+}{\mathrm{d}z}+\left(\frac{\mathrm{i}k_\rho^2}{4k_0}-\alpha\right)\tilde{G}^+=0;\quad \tilde{G}^+(k_\rho,z;\rho')\Big|_{z=Z}=\frac{1}{2\pi}J_0(k_\rho\rho') \tag{3.5.34b}$$

不难得到上二式的解

$$\begin{aligned}\tilde{G}(k_\rho,z;\rho')&=\frac{1}{2\pi}J_0(k_\rho\rho')\exp\left[-\left(\frac{\mathrm{i}k_\rho^2}{4k_0}+\alpha\right)z\right]\\ \tilde{G}^+(k_\rho,z;\rho')&=\frac{1}{2\pi}J_0(k_\rho\rho')\exp\left[\left(\frac{\mathrm{i}k_\rho^2}{4k_0}-\alpha\right)(Z-z)\right]\end{aligned} \tag{3.5.34c}$$

上二式代入式 (3.5.33c) 得到

$$
\begin{aligned}
G(\rho,\rho',z) &= \frac{1}{2\pi}e^{-\alpha z}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mathrm{i}k_\rho^2}{4k_0}z\right)J_0(k_\rho\rho') \\
&\quad \times J_0(k_\rho\rho)k_\rho \mathrm{d}k_\rho \\
G^+(\rho,z;\rho') &= \frac{1}{2\pi}e^{-\alpha(Z-z)}\int_0^\infty \exp\left[\frac{\mathrm{i}k_\rho^2}{4k_0}(Z-z)\right]J_0(k_\rho\rho') \\
&\quad \times J_0(k_\rho\rho)k_\rho \mathrm{d}k_\rho
\end{aligned}
\tag{3.5.34d}
$$

利用积分关系

$$
\int_0^\infty \exp(-p^2t^2)J_0(at)J_0(bt)t\mathrm{d}t = \frac{1}{2p^2}\exp\left(-\frac{a^2+b^2}{4p^2}\right)I_0\left(\frac{ab}{2p^2}\right) \tag{3.5.35a}
$$

式 (3.5.34d) 简化成

$$
\begin{aligned}
G(\rho,\rho',z) &= -\mathrm{i}\frac{k_0e^{-\alpha z}}{\pi z}\exp\left[\mathrm{i}\frac{k_0(\rho'^2+\rho^2)}{z}\right]J_0\left(\frac{2k_0\rho'\rho}{z}\right) \\
G^+(\rho,\rho',z) &= \mathrm{i}\frac{k_0e^{-\alpha(Z-z)}}{\pi(Z-z)}\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k_0(\rho'^2+\rho^2)}{(Z-z)}\right]J_0\left(\frac{2k_0\rho'\rho}{Z-z}\right)
\end{aligned}
\tag{3.5.35b}
$$

显然有对称性关系

$$
[G^+(\rho',\rho,z)]^* = G(\rho,\rho',Z-z) \tag{3.5.35c}
$$

作计算容易得到

$$
G^+(\boldsymbol{\Pi}\psi)^* - \psi^*\boldsymbol{\Pi}^+G^+ = \frac{\partial(G^+\psi^*)}{\partial z} + \frac{\mathrm{i}}{4k_0}\left(G^+\nabla_\perp^2\psi^* - \psi^*\nabla_\perp^2G^+\right) \tag{3.5.36a}
$$

取以原点为圆心, $x-y(z=0)$ 平面为下底面, $z=Z>0$ 为上底面, 半径为 $R\to\infty$ 的圆柱体 $G$(如图 3.5.3), $\partial G$ 由三部分组成: 圆柱面 $S$ 和上、下底面. 在 $G$ 内对上式积分

$$
\begin{aligned}
\int_G [G^+(\boldsymbol{\Pi}\psi)^* - \psi^*\boldsymbol{\Pi}^+G^+]d^3\boldsymbol{r} &= \int_G \frac{\partial(G^+\psi^*)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}}{4k_0}\int_G \left(G^+\nabla_\perp^2\psi^* - \psi^*\nabla_\perp^2G^+\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}
\tag{3.5.36b}
$$

在圆柱体上积分, 上式可以写成

$$
\begin{aligned}
\int_G [G^+(\boldsymbol{\Pi}\psi)^* - \psi^*\boldsymbol{\Pi}^+G^+]d^3\boldsymbol{r} &= \iint_\Sigma \left[\int_0^Z \frac{\partial(G^+\psi^*)}{\partial z}\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}}{4k_0}\int_0^Z \left[\iint_\Sigma \left(G^+\nabla_\perp^2\psi^* - \psi^*\nabla_\perp^2G^+\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z
\end{aligned}
\tag{3.5.36c}
$$

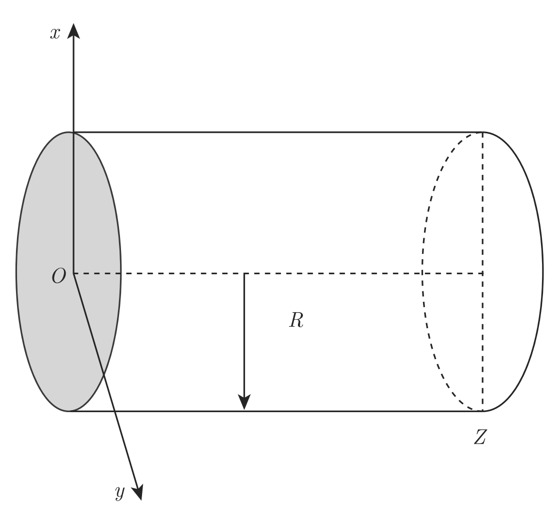



图 3.5.3 积分区域 $G$

其中 $\Sigma$ 是平行于 $x-y$ 平面的大圆内, $\Sigma: \rho \leqslant R$. 注意到波束是有限的且满足 Sommerfeld 辐射条件, 故当 $R \to \infty$ 时,

$$\iint_{\Sigma} \left(\psi^* \nabla_\perp^2 G^+ - G^+ \nabla_\perp^2 \psi^*\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Gamma} \left(\psi^* \frac{\partial G^+}{\partial n} - G^+ \frac{\partial \psi^*}{\partial n}\right) \mathrm{d}\Gamma \to 0 \tag{3.5.37a}$$

其中 $\Gamma$ 是大圆圆周, $\Gamma: \rho = R$. 另外

$$\int_0^Z \frac{\partial (G^+ \psi^*)}{\partial z} \mathrm{d}z = \psi^*(\rho, Z) G^+(\rho, \rho', Z) - \psi^*(\rho, 0) G^+(\rho, \rho', 0) \tag{3.5.37b}$$

利用上二式、方程 (3.5.33b) 以及边界条件 $\psi(\rho, z)|_{z=0} = 0$, 方程 (3.5.36c) 简化为

$$\psi^*(\rho', Z) = 2\pi \int_0^\infty \int_0^Z G^+(\rho, \rho', z) f^*(\rho, z) \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z \tag{3.5.38a}$$

上式取复共轭、交换变量 $\rho$ 和 $\rho'$, 且利用对称性关系式 (3.5.35c) 得到

$$\psi(\rho, Z) = 2\pi \int_0^\infty \int_0^Z G(\rho, \rho', Z - z) f(\rho,' z) \rho' \mathrm{d}\rho' \mathrm{d}z \tag{3.5.38b}$$

其中 $G(\rho, \rho', Z - z)$ 由式 (3.5.35b) 决定

$$G(\rho, \rho', Z - z) = -\mathrm{i} \frac{k_0 e^{-\alpha z}}{\pi z} \exp\left[\mathrm{i} \frac{k_0(\rho'^2 + \rho^2)}{Z - z}\right] J_0\left(\frac{2k_0 \rho' \rho}{Z - z}\right) \tag{3.5.38c}$$

由 $Z$ 的任意性, 式 (3.5.38b) 就是方程 (3.5.32a) 的积分解.

# 习 题 三

3.1 写出用 Dirac Delta 函数表示的电偶极矩表达式.

3.2 函数

$$\rho(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x^2-1)$$

表示一维电荷密度分布, 解释其物理意义.

3.3 证明

$$\delta(x+a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\delta^{(n)}(x)$$

3.4 证明

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}|x|=2\delta(x)$$

提示: 利用关系 $|x|=H(x)-xH(-x)$.

3.5 证明当 $x=x(\xi,\eta),\ y=y(\xi,\eta)$ 时, 有

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)=\frac{1}{|J|}\delta(\xi-\xi_0)\delta(\eta-\eta_0)$$

其中 $J$ 是变换 $x=x(\xi,\eta),\ y=y(\xi,\eta)$ 的 Jacobi 行列式, $(x_0,y_0)$ 是 $(\xi_0,\eta_0)$ 的对应点. 由此证明在极坐标下

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)=\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\vartheta-\vartheta_0)$$

3.6 计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\cos ax\cos bx\mathrm{d}x,\quad (a>0,\ b>0)$$

3.7 验证 Dirac Delta 函数的弱收敛公式

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin k(x-x')}{x-x'}=\delta(x-x')$;

(2) $\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}=\delta(\vartheta-\varphi)$

3.8 证明一维波动方程 Cauchy 问题的基本解

$$\frac{\partial^2 G(x,x',t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 G(x,x',t)}{\partial x^2},\ x,x'\in(-\infty,\infty),\ t>0$$

$$G|_{t=0}=0;\ G_t|_{t=0}=\delta(x-x')$$

为

$$G(x,x',t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a},|x-x'|\leqslant at\\[2ex] 0,|x-x'|\geqslant at\end{cases}$$

提示: 用 Fourier 积分法.

3.9 证明二维波动方程 Cauchy 问题的基本解

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right),\ (x,y,x',y') \in (-\infty,\infty),\ t>0$$

$$G|_{t=0}=0;\ G_t|_{t=0}=\delta(x-x')\delta(y-y')$$

为

$$G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(at)^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}};\ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\leqslant at\\[2mm] 0;\ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\geqslant at\end{cases}$$

其中 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$. 提示: 利用关系式

$$J_0(\lambda r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda r\cos\vartheta}\mathrm{d}\vartheta;\ \int_0^{\infty}J_0(\lambda r)\sin a\lambda t\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{(at)^2-r^2}};\ at>r\\ 0;\ at\leqslant r\end{cases}$$

3.10 在第一类边界条件下, 矩形区域 Laplace 算子的 Green 函数满足

$$-\nabla^2 G=\delta(x,x';y,y'),\ x\in(0,a),\ y\in(0,b)$$
$$G|_{x=0}=G|_{x=a}=G|_{y=0}=G|_{y=b}=0$$

证明 Green 函数为

$$G(x,y;x',y')=\frac{4}{ab\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^{-1}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x'}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y'}{b}$$

或

$$G(x,y;x',y')=\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\sinh\left(\dfrac{m\pi b}{a}\right)}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x'}{a}\sinh\frac{m\pi(b-y_>)}{a}\sinh\frac{m\pi y_<}{a}$$

其中

$$y_>=\begin{cases}y,\ y>y'\\ y',\ y'>y\end{cases};\quad y_<=\begin{cases}y,\ y<y'\\ y',\ y'<y\end{cases}$$

3.11 在第一类边界条件下, 柱内 Laplace 算子的 Green 函数满足

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial G}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}=-\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z')$$

$$\rho\in(0,a),\ \varphi\in[0,2\pi],\ z\in(0,L)$$
$$G|_{\rho=a}=G|_{z=0,L}=0$$

证明 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{2}{a^2L}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{x_m^n}{a}\right)^2\right]^{-1}\frac{\mathrm{e}^{im(\varphi-\varphi')}}{J_{m+1}^2(x_m^n)}\sin\frac{k\pi z}{L}\sin\frac{k\pi z'}{L}$$
$$\times J_m\left(\frac{x_m^n}{a}\rho\right)J_m\left(\frac{x_m^n}{a}\rho'\right)$$

其中 $x_m^n$ 是 $m$ 阶 Bessel 方程的第 $n$ 个根:$J_m(x_m^n)=0$, 或

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{L\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\sin\frac{k\pi z}{L}\sin\frac{k\pi z'}{L}$$
$$\times\left[I_m\left(\frac{k\pi}{L}\rho_<\right)K_m\left(\frac{k\pi}{L}\rho_>\right)-\frac{K_m(k\pi a/L)}{I_m(k\pi a/L)}I_m\left(\frac{k\pi}{L}\rho_<\right)I_m\left(\frac{k\pi}{L}\rho_>\right)\right]$$

3.12 用 Fourier 积分法求一维 Helmholtz 算子的基本解

$$\frac{\mathrm{d}^2G(x,x')}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2G(x,x')=-\delta(x,x'),\ \lambda^2>0$$

3.13 用 Fourier 积分法求二维 Helmholtz 算子的基本解

$$-\nabla^2G+\lambda^2G=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\ \lambda^2>0$$

3.14 求球形区域内波动方程的含时 Green 函数

$$G_{tt}=a^2\nabla^2G+\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(t,t'),\ (r<R)$$
$$G|_{r=R}=0;\ G|_{t<t'}=G_t|_{t<t'}=0$$

提示: 用球内 Laplace 算子的本征函数展开

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty}g_{nl}(t,t')\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)$$

而 $g_{ln}$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2g_{nl}(t,t')}{\mathrm{d}t^2}+(\lambda_n^l)^2g_{nl}(t,t')=\delta(t,t')$$

$$g_{nl}(t,t')|_{t<t'}=\left.\frac{\mathrm{d}g_{nl}(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t<t'}=0$$

然后用 Fourier 积分方法求解上述方程.

3.15 证明二维圆形区域内波动方程的含时 Green 函数

$$\frac{\partial^2G}{\partial t^2}=a^2\nabla^2G+\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(t,t'),\ (r<R)$$

$$G|_{r=R}=0;\ G|_{t<t'}=G_t|_{t<t'}=0$$

为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t')=\frac{1}{\pi aR}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x_m^nJ_{m+1}^2(x_m^n)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}J_m\left(\frac{x_m^n}{R}r\right)J\left(\frac{x_m^n}{R}r'\right)$$
$$\times\sin\left[\frac{ax_m^n}{R}(t-t')\right]H(t-t')$$

其中 $x_m^n$ 是 $m$ 阶 Bessel 方程的第 $n$ 个根:$J_m(x_m^n)=0$.

提示: 过程与上题类似.

3.16 利用镜像法求二维平面第一象限内的 Green 函数

$$-\nabla^2G=\delta(x,x')\delta(y,y'),\ x,x'>0,\ y,y'>0$$
$$G|_{x=y=0}=0$$

# 第 4 章　变分近似方法

本章介绍用变分法求本征值问题及边值问题的近似解, 该方法的基本思想是, 把求解微分方程的定解问题与求泛函极值问题等价起来, 通过用直接方法 (如 Ritz 法和 Galerkin 法) 求出泛函极值问题的解, 然后作为微分方程定解问题的近似解. 该方法是现代物理及工程技术中广泛应用的有限元计算的理论基础. 主要内容: 4.1 节介绍泛函和泛函极值的古典法, 是全章的基础; 4.2 节和 4.3 节分别讨论变分近似方法在边值问题和本征值问题中的应用; 4.4 节讨论基于 Ritz 法和 Galerkin 法的有限元近似; 最后, 4.5 节介绍几个有用的变分近似方法, 重点介绍矩量法.

## 4.1　变分问题和古典法

变分问题就是求一个泛函的极值, 古典法把变分问题归结为 Euler 方程的定解问题. Euler 方程是泛函极值的必要条件, 用古典法求泛函极值时, 通常不考虑充分条件, 而是结合实际问题, 直接用 Euler 方程来求解. 但是, 求解 Euler 方程本身也是十分困难的. 但古典法仍然是重要的方法, 它是建立微分方程的定解问题与泛函极值之间联系的较方便的手段. 我们首先介绍泛函和泛函极值的基本概念, 然后讨论各种情况下如何求泛函极值满足的必要条件, 即 Euler 方程.

### 4.1.1　泛函和泛函极值的基本概念

考虑著名的最速降线问题: 如图 4.1.1, 在垂直平面 $x-y$ 内给定两点 $A$ 和 $B$, 求通过 $A$、$B$ 两点的曲线 $y=y(x)$, 使一质点在重力 $g$ 作用下从 $A$ 滑到 $B$ 所需时间最短 (假定无摩擦). 显然, 连接 $A$、$B$ 两点的曲线有无数多条. 因此, 这是一个极值问题. 下面写出这个极值问题的数学表达式. 根据运动学, 质点的速率 $v$ 有下式决定

$$v=\sqrt{2gy(x)} \tag{4.1.1a}$$

故从 $A$ 点到 $B$ 点所需总时间为积分

$$T=\int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{v}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\mathrm{d}x \tag{4.1.1b}$$

其中 $\mathrm{d}s$ 为曲线的弧长

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x. \tag{4.1.1c}$$

于是, 我们的问题可归结为: 求通过两定点的曲线 $y(x)$ 使积分 $T$ 达到最小值. 极值问题式 (4.1.1b) 的特点是: 所求极值不是通常的函数极值, 而是定积分的极值. 这个定积分随着函数 $y=y(x)$ 的不同而取不同的数值, 称这种随给定函数取确定值的对应关系为**泛函**. 式 (4.1.1b) 中定积分 $T$ 就是一个泛函, 象这种求泛函的极值问题, 我们称之为**变分问题**.

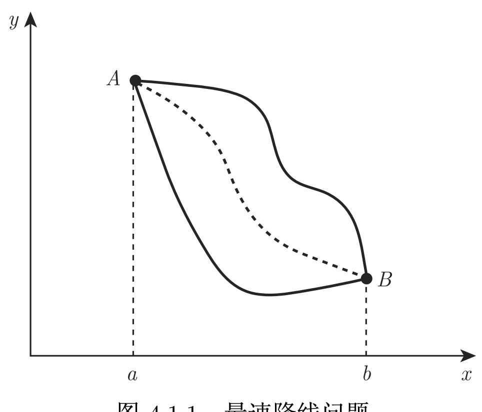



图 4.1.1 最速降线问题

必须指出: 正如函数的极值 (极大或极小) 是在极值点的邻域内比较而言, 泛函的极值也是相对于某函数的邻域而言的. 以式 (4.1.1b) 的泛函为例, 来说明函数邻域的概念. 显然, 要使式 (4.1.1b) 有意义, $y=y(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 至少必须要有连续的一阶导数, 即 $y$ 属于 $C^1(a,b)$.

设泛函 $T$ 在 $y=\xi(x)$ 处达到极值, 则 $y=\xi(x)$ 的**邻域**定义为: 对某一 $\varepsilon>0$, 满足条件

$$\begin{aligned}&|y(x)-\xi(x)|<\varepsilon, x\in(a,b)\\&|y'(x)-\xi'(x)|<\varepsilon, x\in(a,b)\end{aligned}\tag{4.1.2a}$$

的函数 $y(x)$ 称为属于 $\xi(x)$ 的**一阶$\varepsilon$邻域**, 其含义从图 4.1.2 可看出, 左图二条曲线属于一阶$\varepsilon$邻域, 而右图中尽管二条曲线的函数值相近, 但虚线的一阶导数可以相差很大.

于是泛函 $T$ 在 $y=\xi(x)$ 处达到极值的意义是指: 对某一阶 $\varepsilon$ 邻域中所有的 $y=y(x)$ 都使

$$T(\xi)\leqslant T(y)(\text{极小}) \quad 或 \quad T(\xi)\geqslant T(y)(\text{极大})\tag{4.1.2b}$$

使 $T$ 取极值的函数称为**极值函数**. 如果对全部可允许类函数恒有

$$T(\xi)\leqslant T(y) \quad 或 \quad T(\xi)\geqslant T(y)\tag{4.1.2c}$$

则称泛函 $T$ 在 $y=\xi(x)$ 处达到最小值或最大值.

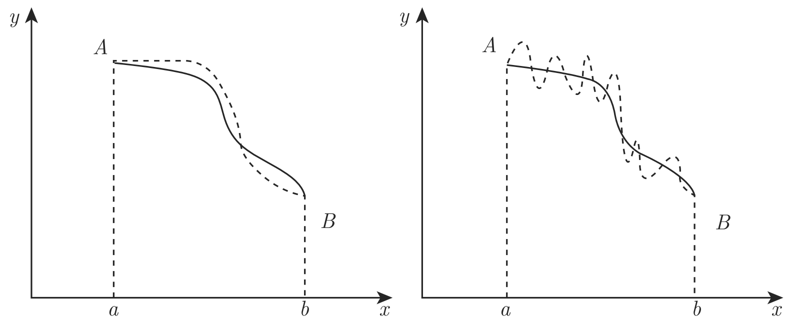



图 4.1.2　函数的一阶 $\varepsilon$ 邻域的几何意义

下面推出使式 (4.1.1b) 中 $T$ 取极小值的**必要条件**. 为一般, 把式 (4.1.1b) 写成

$$J(y)=\int_a^b f(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{4.1.3a}$$

其中 $f$ 是给定的函数. 设 $y=y(x)$ 使 $J$ 取极值, 则对 $y=y(x)$ 邻域内的函数 $y^*(x)$, 应有

$$J(y)\geqslant J(y^*)\quad 或者\quad J(y)\leqslant J(y^*) \tag{4.1.3b}$$

取 $y^*=y(x)+\alpha\eta(x)$, 因 $y(x)$ 及 $y^*(x)$ 都通过定点 $A$ 和 $B$, 故要求 $\eta(x)$ 满足端点条件 $\eta(a)=\eta(b)=0$. 当 $\alpha$ 足够小时 $y^*$ 属于 $y(x)$ 的邻域. 考虑 $J$ 在 $y^*$ 的值

$$J(y^*)=\int_a^b f[x,y+\alpha\eta,y'(x)+\alpha\eta'(x)]\mathrm{d}x\equiv J(\alpha) \tag{4.1.4a}$$

由于 $y(x)$ 及 $\eta(x)$ 给定后, $J$ 是参数 $\alpha$ 的函数, 在 $\alpha=0$ 点作 Taylor 展开得到

$$J(\alpha)=J(0)+\alpha J'(\alpha)|_{\alpha=0}+\frac{1}{2}\alpha^2J''(\alpha)|_{\alpha=0}+\cdots \tag{4.1.4b}$$

由假定 $J$ 在 $y$ 处取极值, 亦即 $\alpha=0$ 是 $J(\alpha)$ 的极值点, 根据函数极值的必要条件应有 $J'(\alpha)|_{\alpha=0}=0$. 由上式

$$\left.\frac{\mathrm{d}J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right]\mathrm{d}x=0 \tag{4.1.4c}$$

对第二项作分部积分

$$\left.\frac{\mathrm{d}J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}=\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right]\Bigg|_a^b+\int_a^b\eta(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x=0 \tag{4.1.4d}$$

由条件 $\eta(a)=\eta(b)=0$ 得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_a^b\eta(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x=0 \tag{4.1.4e}$$

因满足 $\eta(a)=\eta(b)=0$ 的函数 $\eta=\eta(x)$ 有无穷多, 故要求上式恒成立必有

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \tag{4.1.5a}$$

展开后即有

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0 \tag{4.1.5b}$$

由上式知, 要求 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可微, 且 $f$ 关于其变数有相应的一阶和二阶的连续偏导数. 显然, 积分式 (4.1.1b) 或 (4.1.3a) 有意义只要求 $y(x)$ 有连续的一阶导数就可以了. 因此, 方程 (4.1.5a) 仅仅是必要条件, 称为泛函式 (4.1.3a) 的**Euler 方程**. 因要求方程 (4.1.5a) 中函数 $y=y(x)$ 通过固定的端点 $A$ 和 $B$, 故上述变分问题亦称为**固定端点的变分问题**.

**一阶变分:** 令

$$\delta J(y,\delta y)\equiv\left.\frac{\mathrm{d}J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha=[f_{y'}\delta y]_a^b+\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x \tag{4.1.6a}$$

称 $\delta y\equiv\alpha\eta(x)$ 为 $y(x)$ 的一阶变分, 而 $\delta J$ 为泛函 $J(y)$ 的**一阶变分**. 注意: 微分号 $\delta y$ 和 $\mathrm{d}y$ 的区别, 前者表示整个函数的变化, 即 $\delta y=y^*(x)-y(x)$, 而后者是指同一个函数 $y(x)$ 由于 $x$ 的变化引起 $y$ 的变化, 即 $\mathrm{d}y=y(x+\mathrm{d}x)-y(x)$. 类似于函数的一阶微分在极值点为零, 泛函的一阶变分对极值函数也为零. 泛函的变分也有类似于微分运算规则, 即

$$\begin{aligned}\delta(J_1+J_2)&=\delta J_1+\delta J_2\\ \delta(J_1\cdot J_2)&=J_2\delta J_1+J_1\delta J_2\end{aligned} \tag{4.1.6b}$$

另外, 如果函数 $y(x)$ 和 $y_0(x)$ 属于 $n$ 阶可导, 则

$$(\delta y)^{(n)}=[y(x)-y_0(x)]^{(n)}=y^{(n)}(x)-y_0^{(n)}(x)=\delta y^{(n)}(x) \tag{4.1.6c}$$

特别是 $(\delta y)'=\delta y'$, 即变分的一阶导数等于一价导数的变分.

**二阶变分**: 令

$$\delta^2 J(y,\delta y)\equiv\left.\frac{\mathrm{d}^2 J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^2}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha^2 \tag{4.1.6d}$$

称为泛函 $J(y)$ 的二**阶变分**. 由式 (4.1.4a), 不难得到

$$\delta^2 J(y,\delta y)=\int_a^b\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\delta y)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(\delta y')^2\right]\mathrm{d}x \tag{4.1.6e}$$

利用上式和式 (4.1.6a), 式 (4.1.4b) 可以写成

$$J(y+\delta y)=J(y)+\delta J(y,\delta y)+\frac{1}{2}\delta^2 J(y,\delta y)+\cdots \tag{4.1.6f}$$

与函数的极值类似, 泛函 $J(y)$ 在 $y=y(x)$ 取局部极小的条件为：$\delta J=0$ 和 $\delta^2 J>0$(即要求泛函 $J(y)$ 的二阶变分正定); 如果 $\delta^2 J=0$, 必须 $\delta y=0$, 反之亦然.

对含多个函数或高阶导数的情形, 讨论完全相似. 例如对泛函

$$J(y,z)=\int_a^b f(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x \tag{4.1.7a}$$

设 $y(x)$ 和 $z(x)$ 使 $J(y,z)$ 取极值, 在相应的一阶 $\varepsilon$ 邻域中取 $y(x)+\alpha\eta(x)$ 和 $z(x)+\beta\xi(x)$, 可得

$$\begin{aligned}\delta J=&[f_{y'}\delta y]_a^b+\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x\\&+[f_y'\delta y]_a^b+\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\delta z\mathrm{d}x=0\end{aligned} \tag{4.1.7b}$$

因满足条件 $\eta(a)=\eta(b)=0$ 和 $\xi(a)=\xi(b)=0$ 的函数有无穷多, 故有

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}=0;\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial z'}=0 \tag{4.1.7c}$$

**变分基本引理** Euler 方程 (4.1.5a) 或 (4.1.7c) 可有变分基本引理引出. 设函数 $\eta(x)\in C^1[a,b]$ 并且满足边界条件 $\eta(a)=\eta(b)=0$, 如果对于任意 $y\in C^1[a,b]$, 都有

$$\int_a^b y(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0 \tag{4.1.8a}$$

则恒有 $y(x)\equiv 0$, $x\in(a,b)$. 用反证法证明: 假定存在某点 $\xi\in(a,b)$ 使 $y(\xi)\neq 0$, 不妨假定 $y(\xi)>0$, 由 $y$ 的连续性, 存在 $\xi$ 的某个 $\delta$ 邻域 $(\xi-\delta,\xi+\delta)$, 在该邻域有 $y(x)\geqslant C$($C$ 为常数), 其中 $0<C<y(\xi)$. 作函数

$$\eta(x)=\begin{cases}0, & a\leqslant x\leqslant \xi_1\\(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2, & \xi_1<x<\xi_2\\0, & \xi_2\leqslant x\leqslant b\end{cases} \tag{4.1.8b}$$

其中 $\xi_1=\xi-\delta$ 和 $\xi_2=\xi+\delta$, 于是

$$\int_a^b y(x)\eta(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi_1}^{\xi_2} y(x)\eta(x)\mathrm{d}x\geqslant C\int_{\xi_1}^{\xi_2}\eta(x)\mathrm{d}x>0 \tag{4.1.8c}$$

与式 (4.1.8a) 矛盾! 故在 $(a,b)$ 上恒有 $y(x)=0$.

对二元函数, 同样有变分基本引理: 设有限区域为 $G$, 边界 $\partial G$, 在 $G$ 内 $u(x,y)$ 连续, 如果对任何满足边界条件 $\eta(x,y)|_{\partial G}\in C^1$ 的函数 $\eta(x,y)$, 恒有

$$\iint_G u(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{4.1.9}$$

则在 $G$ 内 $u(x,y)\equiv 0$. 该引理的证明与一元情况类似.

Euler 方程的一个特殊情况是 $f$ 与 $x$ 无关, 即 $f(x,y,y')=f(y,y')$, 则方程 (4.1.5a) 可大大化简, 由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)&=y''\frac{\partial f}{\partial y'}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}-y'\frac{\partial f}{\partial y}-y''\frac{\partial f}{\partial y'}\\&=y'\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0\end{aligned}\tag{4.1.10a}$$

因此 ($C$ 为常数)

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=C\tag{4.1.10b}$$

**例 4.1.1**　最速降线问题: 由式 (4.1.1b) 得到 $f(x,y,y')=\sqrt{(1+y'^2)/y}$, 可见 $f$ 与 $x$ 无关, 由方程 (4.1.10b)

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=-\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C\tag{4.1.11a}$$

即 $y(1+y'^2)=C$, 令 $y'=\operatorname{arctan}t$ 代入得到 $y=C\sin^2 t$. 由

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=2C\frac{\sin t\cos t}{\operatorname{arctan}t}\mathrm{d}t=C(1+\cos 2t)\mathrm{d}t\tag{4.1.11b}$$

于是 $y(x)$ 的参数方程为

$$x=C\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C_1;y=\frac{C}{2}(1-\cos 2t)\tag{4.1.11c}$$

常数 $C$ 和 $C_1$ 由 $A$ 和 $B$ 二点决定. 这是经过 $A$ 和 $B$ 二点的摆线, 如图 4.1.3, 图中取 $C_1=2$, $C=1$, $t\in[0,2\pi]$, 注意: 虚线 $AB$ 或者 $ACB$ 都不是最速降线.

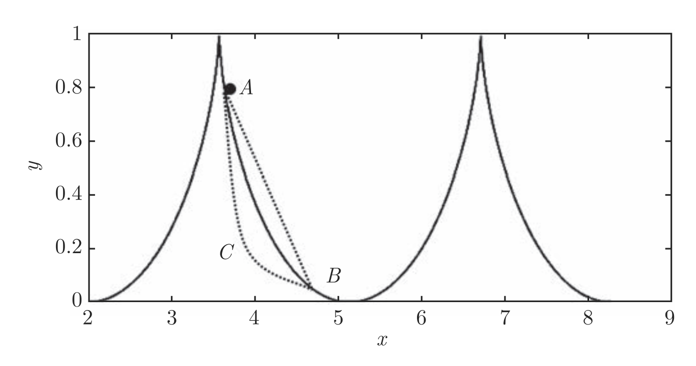



图 4.1.3　最速降线是摆线的一部分

**例 4.1.2**　求下列泛函的 Euler 方程, 并要求 $y(x)$ 在两点 $A$ 和 $B$ 值固定

$$J(y)=\frac{1}{2}\int_a^b\left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+q(x)y^2-2f(x)y\right]\mathrm{d}x \tag{4.1.12a}$$

泛函 $J(y)$ 的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta J(y)&=\int_a^b\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y\delta y-f(x)\delta y\right]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}+q(x)y\delta y-f(x)\delta y\right]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.1.12b}$$

对第一项分部积分

$$\delta J(y)=[p(x)y'(x)\delta y]_a^b+\int_a^b\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y-f(x)\right\}\delta y\mathrm{d}x$$

因端点固定 $\delta y(a)=\delta y(b)=0$, 故

$$\delta J(y)=\int_a^b\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y-f(x)\right\}\delta y\mathrm{d}x \tag{4.1.12c}$$

由 $\delta J=0$ 得 Euler 方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y(x)=f(x) \tag{4.1.12d}$$

显然上式是 S-L 型方程. 又因要求 $y(x)$ 在定点 $A$ 和 $B$ 值固定, 故还存在边界条件

$$y(x)|_{x=a}=y(a);\quad y(x)|_{x=b}=y(b) \tag{4.1.12e}$$

方程 (4.1.12d) 和 (4.1.12e) 构成第一类边界条件的 S-L 边值问题.

注意：由式 (4.1.6e), 泛函 $J(y)$ 的二阶变分为

$$\delta^2J(y)=\int_a^b[p(x)(\delta y')^2+q(x)(\delta y)^2]\mathrm{d}x \tag{4.1.12f}$$

在区间 $[a,b]$ 内, 当 $p(x)>0$ 和 $q(x)\geqslant 0$ 时, $\delta^2J(y)>0$, 故 Euler 方程 (4.1.12d) 使泛函 $J(y)$ 取极小.

### 4.1.2　多个变量的变分问题

考虑二元函数 $u(x,\,y)$ 的泛函

$$J(u)=\iint_G F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.1.13a}$$

其中 $F$ 是给定的函数. 假定有足够阶数的偏导 (关于变元 $x, y, u, u_x$ 和 $u_y$), 所谓足够阶偏导, 意义见下面的讨论. 设 $G$ 的边界为 $\partial G$, 在 $\partial G$ 上给定

$$u(x,y)|_{\partial G} = u_0(x,y) \tag{4.1.13b}$$

我们的问题是求满足上式的函数 $u(x,y)$, 使泛函 $J(u)$ 取极值. 设 $u(x,y)$ 使 $J(u)$ 取极值, 则在 $u(x,y)$ 的邻域内取比较函数 $u^*(x,y)$

$$u^*(x,y) = u(x,y) + \alpha\eta(x,y) \tag{4.1.13c}$$

其中 $\alpha$ 是小参数. 因 $u(x,y)$ 和 $u^*(x,y)$ 在 $\partial G$ 上满足式 (4.1.13b), 故要求 $\eta(x,y)|_{\partial G} = 0$. 对 $u^*$, 泛函 $J$ 的值为

$$\begin{aligned} J(u^*) &= \iint_G F(x,y,u^*,u_x^*,u_y^*)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_G F(x,y,u+\alpha\eta,u_x+\alpha\eta_x,u_y+\alpha\eta_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \equiv J(\alpha) \end{aligned} \tag{4.1.14a}$$

因 $J(u)$ 在 $u(x,y)$ 取极值, 亦即 $\alpha = 0$ 时 $J(\alpha)$ 取极值, 于是由极值条件得

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} &= \iint_G (F_u\eta + F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_G \left(F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial x}\right)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad + \iint_G \left[\frac{\partial(F_{u_x}\eta)}{\partial x} + \frac{\partial(F_{u_y}\eta)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{4.1.14b}$$

第二项可用平面 Green 公式化成 $\partial G$ 上的积分

$$\iint_G \left[\frac{\partial(F_{u_x}\eta)}{\partial x} + \frac{\partial(F_{u_y}\eta)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial G} \eta(F_{u_y}\mathrm{d}y - F_{u_x}\mathrm{d}x) \tag{4.1.14c}$$

利用边界条件 $\eta(x,y)|_{\partial G} = 0$, 上式积分为零. 于是有

$$\iint_G \left(F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \equiv 0 \tag{14.1.15a}$$

因 $\eta(x,y)$ 任意, 故上式恒成立要求

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0 \tag{14.1.15b}$$

上式即为泛函式 (4.1.13a) 取极值的**必要条件**. 由于上式是关于 $u(x,y)$ 的二阶偏微分方程, 故要求 $u(x,y) \in C^2(G)$, 又展开上式后知要求 $F$ 关于所有的变量具有连续

的二阶偏导数. 这些条件都是运算过程外加上去的. 事实上, 只要 $u(x,y)$ 具有连续的一阶导数, 泛函式 (4.1.13a) 就有意义了.

对 $n$ 个变量的情况, 不难作类似运算, 推出相应的 Euler 方程

$$J(u)=\iint_G F(x_1,\cdots,x_n;u,u_{x_1},\cdots,u_{x_n})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{4.1.16a}$$

一阶变分

$$\begin{aligned}\delta J(u)&=\iint_G\left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\frac{\partial F}{\partial u_{x_1}}\delta u_{x_1}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial u_{x_n}}\delta u_{x_n}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\&=\iint_G\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}\right)\right]\delta u+\iint_G\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}\delta u\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.1.16b}$$

利用 $n$ 维空间的 Green 公式

$$\iint_G\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(F_{u_{x_i}}\delta u)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\sum_{i=1}^n\int_{\partial G}F_{u_{x_i}}\cos\vartheta_i\delta u\mathrm{d}S \tag{4.1.16c}$$

又在边界上 $\delta u|_{\partial G}=0$, 上式代入式 (4.1.16b) 得到

$$\delta J(u)=\iint_G\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}\right)\right]\delta u\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\equiv 0 \tag{4.1.17a}$$

于是, Euler 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}\right)=0 \tag{4.1.17b}$$

**例 4.1.3**　求下列泛函的 Euler 方程

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+2f(x,y,z)u\right]\mathrm{d}\tau \tag{4.1.18a}$$

$u(x,y,z)$ 在边界 $\partial G$ 上给定

$$u(x,y,z)|_{\partial G}=u_0(x,y,z) \tag{4.1.18b}$$

由方程 (4.1.17b) 容易得 Euler 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z) \tag{4.1.18c}$$

上式是 Possion 方程. 因此, 求泛函式 (4.1.18a) 的极值问题化为求 Possion 方程的第一类边值问题.

**例 4.1.4** 求下列泛函的 Euler 方程:

$$J(u) = \int_G \left[ p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + p\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + (q - \lambda\rho)u^2 \right] \mathrm{d}\tau \tag{4.1.19a}$$

其中 $u(\boldsymbol{r})$ 在边界 $\partial G$ 上给定. 由方程 (4.1.17b) 得 Euler 方程为

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + qu = \lambda\rho u \tag{4.1.19b}$$

即方程 $-\nabla\cdot(p\nabla u) + qu = \lambda\rho u$.

如果泛函中含有高阶偏导数

$$J(u) = \iint_G F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.1.20a}$$

其中 $u$ 及其法向导数在 $G$ 的边界 $\partial G$ 上给定

$$u(x,y)|_{\partial G} = u_0(x,y); \quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{\partial G} = u_1(x,y) \tag{4.1.20b}$$

可以推出相应的 Euler 方程为

$$F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_{u_{xx}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{u_{xy}}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F_{u_{yy}}}{\partial y^2} = 0 \tag{4.1.20c}$$

**例 4.1.5** 求下列泛函的 Euler 方程

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.1.21a}$$

其中 $u(x,y)$ 及其法向导数在 $G$ 的边界 $\partial G$ 上给定. 由方程 (4.1.20c) 得 Euler 方程为

$$\begin{aligned} F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_{u_{xx}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{u_{xy}}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F_{u_{yy}}}{\partial y^2} \\ = \frac{\partial^2 u_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u_{yy}}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \tag{4.1.21b}$$

即得双调和方程

$$\nabla^2\nabla^2 u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \tag{4.1.21c}$$

**例 4.1.6** 求下列泛函的 Euler 方程

$$J(u) = \int_G \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + qu^2 - 2fu\right)\mathrm{d}\tau \tag{4.1.22a}$$

其中：(1) 函数 $u$ 满足第一类边界条件, 即 $u|_{\partial G}=\psi(\boldsymbol{r})$; (2) 系数实对称 $a_{ij}=a_{ji}$; (3) 对任意的实向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 存在正常数 $a$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant a\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \tag{4.1.22b}$$

泛函 $J(u)$ 的一价变分为

$$\delta J(u)=\int_G\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\delta u}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+2qu\delta u-2f\delta u\right]\mathrm{d}\tau \tag{4.1.22c}$$

利用对称性 $a_{ij}=a_{ji}$, 上式可以改写成

$$\delta J(u)=2\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\delta u}{\partial x_j}+qu\delta u-f\delta u\right)\mathrm{d}\tau \tag{4.1.22d}$$

另一方面, Green 公式 (1.2.39b) 中取 $U_j=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\delta u\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 得到

$$\int_G\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\delta u\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}n_i\frac{\partial u}{\partial x_j}\delta u\mathrm{d}S=0 \tag{4.1.23a}$$

得到上式利用了 $\delta u|_{\partial G}=0$. 由上式得到

$$\int_G\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\delta u}{\partial x_j}\mathrm{d}\tau=-\int_G\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\delta u\mathrm{d}\tau \tag{4.1.23b}$$

代入式 (4.1.22d)

$$\delta J(u)=2\int_G\left[-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+qu-f\right]\delta u\mathrm{d}\tau \tag{4.1.23c}$$

故相应的 Euler 方程为

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+qu=f \tag{4.1.23d}$$

根据式 (4.1.22b), 上式和边界条件 $u|_{\partial G}=\psi(\boldsymbol{r})$ 构成椭圆型算子的第一类边值问题. 方程 (4.1.18c) 是上式的特例. 注意：(1) 方程 (4.1.23d) 描写非均匀、各向异性介质

的平衡过程; (2) 根据 1.3.5 小节的讨论, 第二类边界条件由式 (1.3.41a) 表示, 如果函数 $u$ 满足第二类齐次边界条件

$$\left.\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} n_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|_{\partial G} = 0 \tag{4.1.23e}$$

式 (4.1.23a) 也成立, 故方程 (4.1.23d) 也成立! 注意：泛函 $J(u)$ 的二阶变分为

$$\delta^2 J(u) = 2\int_G \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \delta u}{\partial x_i}\frac{\partial \delta u}{\partial x_j} + q(\delta u)^2\right) \mathrm{d}\tau \tag{4.1.23f}$$

当 $a_{ij}$ 满足式 (4.1.22b) 时, 上式恒大于零, 即 $\delta^2 J(u) > 0$(除非 $\delta u = 0$).

**例 4.1.7** 求下列含时间 $t$ 积分泛函的 Euler 方程

$$J(u) = \int_0^t \int_G \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + qu^2 - 2fu\right] \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \tag{4.1.24a}$$

其中 $u$ 满足第一类边界条件 $u|_{\partial G} = 0$, 系数 $a_{ij}$ 与例 4.1.6 相同. 泛函 $J(u)$ 的一价变分为

$$\delta J(u) = 2\int_0^t \int_G \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \delta u}{\partial x_j} - \rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \delta u}{\partial t} + qu\delta u - f\delta u\right] \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \tag{4.1.24b}$$

积分号的第一项与例 4.1.6 类似处理, 第二项涉及时间导数项为

$$\int_G \int_0^t \rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \delta u}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau = \int_G \left[\left.\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\delta u\right)\right|_0^t - \int_0^t \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}\tau$$

对时间变量, 在等时变分法中恒为零, 即 $\delta u|_{t_1} = \delta u|_{t_2} \equiv 0$, 于是, 式 (4.1.24b) 变成

$$\delta J(u) = 2\int_0^t \int_G \left[\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + qu - f\right] \delta u\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \tag{4.1.24c}$$

故相应的 Euler 方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + qu = f \tag{4.1.24d}$$

上式可以描写非均匀、各向异性介质中的波动过程.

**例 4.1.8** 在复数域求下列含时间 $t$ 积分泛函的 Euler 方程

$$J(u) = \int_0^t \int_G \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u^*}{\partial x_j} - \rho u^*\frac{\partial u}{\partial t} + quu^* - (fu^* + f^*u)\right] \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

其中 $u$ 满足第一类边界条件 $u|_{\partial G}=\psi(\boldsymbol{r})$, 系数 $a_{ij}$ 与例 4.1.6 相同. 泛函 $J(u)$ 的一价变分为

$$\delta J(u)=\int_0^t\int_G\left[\sum_{i,j=1}^n\left(a_{ij}\frac{\partial\delta u}{\partial x_i}\frac{\partial u^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\delta u^*}{\partial x_j}\right)+q(u^*\delta u+u\delta u^*)\right.$$
$$\left.-(f\delta u^*+\delta uf^*)-\rho\left(\delta u^*\frac{\partial u}{\partial t}+u^*\frac{\partial\delta u}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \tag{4.1.25a}$$

上式的空间导数项与式 (4.1.23b) 类似, 存在关系

$$\begin{aligned}&\int_G\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\frac{\partial\delta u}{\partial x_j}\mathrm{d}\tau=-\int_G\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\right)\delta u\mathrm{d}\tau\\&\int_G\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\delta u^*}{\partial x_j}\mathrm{d}\tau=-\int_G\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\delta u^*\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{4.1.25b}$$

对时间导数项

$$\int_G\int_0^t\rho u^*\frac{\partial\delta u}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau=\int_G\left[(\rho u^*\delta u)|_0^t-\int_0^t\rho\frac{\partial u^*}{\partial t}\delta u\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau=-\int_0^t\int_G\rho\frac{\partial u^*}{\partial t}\delta u\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

把上式和式 (4.1.25b) 代入式 (4.1.25a) 得到

$$\delta J(u)=\int_0^t\int_G\sum_{i,j=1}^n\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\rho\frac{\partial u}{\partial t}+qu-f\right]^*\delta u\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^t\int_G\sum_{i,j=1}^n\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\rho\frac{\partial u}{\partial t}+qu-f\right]\delta u^*\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \tag{4.1.25c}$$

因为 $\delta u$ 与 $\delta u^*$ 是独立变分, 故得到 Euler 方程

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+qu=f \tag{4.1.26a}$$

和

$$-\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+qu=f \tag{4.1.26b}$$

显然, 方程 (4.1.26a) 是描写非均匀、各向异性介质中的扩散方程, 而方程 (4.1.26b) 是其共轭方程.

Green 公式 (1.2.39b) 中取

$$U_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}u\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{4.1.26c}$$

得到

$$\int_G \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} n_i \frac{\partial u}{\partial x_j} u \mathrm{d}S = 0 \tag{4.1.26d}$$

泛函 $J(u)$ 可以写成

$$J(u) = (u, \boldsymbol{L}^{+} u) - [(u, f) + (f, u)] \tag{4.1.26e}$$

其中共轭算子 $\boldsymbol{L}^{+}$ 为

$$\boldsymbol{L}^{+} u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - q \frac{\partial u}{\partial t} \tag{4.1.26f}$$

内积定义为时-空积分 $(u, v) = \int_0^t \int_G u^* v \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t$. 注意：不像例 4.1.7, 我们可以在实数域运算, 对抛物型算子, 由于它是非自共轭的, 只能在复数域运算.

对色散型的 Schrödinger 方程, 泛函 $J(\psi)$ 取为

$$J(\psi) = \int_0^t \int_G \left[\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i} + \mathrm{i}\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + q\psi\psi^*\right] \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \tag{4.1.26g}$$

由 $\delta J(\psi) = 0$ 不难得到 Euler 方程为一对共轭方程

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + q\psi \\ -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + q\psi^* \end{aligned} \tag{4.1.26h}$$

### 4.1.3 变端点问题, 自然边界条件和内部边界条件

以上考虑固定端点 (或者固定边界) 的变分问题, 本节讨论自由端点 (或边界) 问题. 这时存在所谓**自然边界条件**. 首先考虑泛函式 (4.1.3a)

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y') \mathrm{d}x \tag{4.1.27a}$$

假定 $y(x)$ 在端点 $A$ 和 $B$ 的值 $y(a)$ 和 $y(b)$ 不固定, 由式 (4.1.6a) 得一阶变分

$$\delta J(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y\right)\bigg|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial f}{\partial y'}\right) \delta y \mathrm{d}x \tag{4.1.27b}$$

此时, 由于 $\delta y(a)$、$\delta y(b)$ 及 $\delta y(x)$ 都是独立变分, 因此从 $\delta J = 0$ 可推得

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{4.1.27c}$$

以及在端点的边界条件

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\right|_a = 0; \left.\frac{\partial f}{\partial y'}\right|_b = 0 \tag{4.1.27d}$$

方程 (4.1.27c) 为 Euler 方程, 而上式则是要求满足的边界条件, 这样的边界条件称之为**自然边界条件**.

**例 4.1.9**　求下列泛函的 Euler 方程

$$J(y) = \frac{1}{2}\int_a^b \left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q(x)y^2 - 2f(x)y\right]\mathrm{d}x \tag{4.1.28a}$$

Euler 方程与式 (4.1.12d) 相同, 而自然边界条件为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b} = 0 \tag{4.1.28b}$$

即为第二类边界条件.

对二个变数的泛函式 (4.1.13a)

$$\begin{aligned}
\delta J(u) &= \iint_G \left(F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right)\delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + \iint_G \left[\frac{\partial(F_{u_x}\delta u)}{\partial x} - \frac{\partial(F_{u_y}\delta u)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_G \left(F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right)\delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{\partial G}\left[F_{u_x}\cos(n,x) + F_{u_y}\cos(n,y)\right]\delta u \mathrm{d}S
\end{aligned}$$

由于边界上 $u(x,y)$ 自由, 故边界上 $\delta u(x,y)$ 也是独立变分, 于是由 $\delta J = 0$ 推得

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0 \tag{4.1.29a}$$

及自然边界条件

$$\frac{\partial F}{\partial u_x}\cos(n,x) + \frac{\partial F}{\partial u_y}\cos(n,y) = 0 \tag{4.1.29b}$$

例如对泛函

$$J(u) = \int_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2fu\right]\mathrm{d}\tau \tag{4.1.29c}$$

可推得 Euler 方程为 Possion 方程 $\nabla^2 u = f$, 而自然边界条件则为第二类齐次边界条件.

**例 4.1.10**　求下面泛函的 Euler 方程及自然边界条件

$$J(u) = \int_G [p(\nabla u)^2 + qu^2 - 2fu]\mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G} p(2gu - hu^2)\mathrm{d}S \tag{4.1.30a}$$

其中 $G$ 为三维或二维区域, $\partial G$ 为其边界. 一阶变分为

$$\begin{aligned}
\delta J(u) &= 2\int_G [p(\nabla u)\cdot\nabla\delta u + qu\delta u - f\delta u]\mathrm{d}\tau - 2\iint_{\partial G} p(g-hu)\delta u\mathrm{d}S \\
&= 2\iint_{\partial G} p\frac{\partial u}{\partial n}\delta u\mathrm{d}S + 2\int_G [-\nabla\cdot(p\nabla u) + qu - f]\delta u\mathrm{d}\tau - 2\iint_{\partial G} p(g-hu)\delta u\mathrm{d}S \\
&= 2\int_G [-\nabla\cdot(p\nabla u) + qu - f]\delta u\mathrm{d}\tau + 2\iint_{\partial G}\left[p\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu - g\right)\right]\delta u\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

于是由 $\delta J = 0$ 得 Euler 方程

$$-\nabla\cdot(p\nabla u) + qu = f \tag{4.1.30b}$$

及自然边界条件

$$\left.\left(hu + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = g \tag{4.1.30c}$$

利用 Green 公式, 式 (4.1.30a) 可写成下列形式

$$J(u) = -\int_G [\nabla\cdot(p\nabla u) - qu + 2fu]\mathrm{d}\tau - 2\iint_{\partial G} pgu\mathrm{d}S \tag{4.1.31a}$$

其中已经利用式 (4.1.30c). 如令 $\boldsymbol{L} = -\nabla\cdot(p\nabla) + q$, 则上式可写成内积的形式

$$J(u) = (u, \boldsymbol{L}u) - 2(f, u) - 2\iint_{\partial G} pgu\mathrm{d}S \tag{4.1.31b}$$

从以上讨论可知, 第二、三类边界条件可以由变分自动给出, 也就是说, 求泛函的极值时, 第二、三类边界条件自动满足, 故称为**自然边界条件**; 而从 4.1.1 和 4.1.2 小节看出, 第一类边界条件是强制要求的, 故称为**本质边界条件**.

**内部边界条件**　　设 $G = G_1 + G_2$, 区域 $G_1$ 与 $G_2$ 的分界面为 $S$(如图 4.1.4), 在 $S$ 面上 $p(\boldsymbol{r})$ 不连续, 由方程 (4.1.30a)

$$\begin{aligned}
J(u) = &\int_{G_1} [p(\nabla u)^2 + qu^2 - 2fu]\mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G_1} p(2gu - hu^2)\mathrm{d}S \\
&+ \int_{G_2} [p(\nabla u)^2 + qu^2 - 2fu]\mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G_2} p(2gu - hu^2)\mathrm{d}S
\end{aligned} \tag{4.1.32a}$$

泛函 $J(u)$ 的一阶变分为

$$\begin{aligned}
\delta J(u) = &2\int_{G_1} [p(\nabla u)\cdot\nabla\delta u + qu\delta u - f\delta u]\mathrm{d}\tau - 2\iint_{\partial G_1} p(g-hu)\delta u\mathrm{d}S \\
&+ 2\int_{G_2} [p(\nabla u)\cdot\nabla\delta u + qu\delta u - f\delta u]\mathrm{d}\tau \\
&- 2\iint_{\partial G_2} p(g-hu)\delta u\mathrm{d}S
\end{aligned} \tag{4.1.32b}$$

在 $\partial G_1+S$ 和 $\partial G_2+S$ 分别包围的区域 $G_1$ 和 $G_2$, Gauss 公式成立, 故上式变成

$$\begin{aligned}\delta J(u)=&2\iint_{\partial G_1+S} p\frac{\partial u}{\partial n_1}\delta u\mathrm{d}S+2\int_{G_1}[-\nabla\cdot(p\nabla u)+qu-f]\delta u\mathrm{d}\tau\\&-2\iint_{\partial G_1} p(g-hu)\delta u\mathrm{d}S+2\iint_{\partial G_2+S} p\frac{\partial u}{\partial n_2}\delta u\mathrm{d}S\\&+2\int_{G_2}[-\nabla\cdot(p\nabla u)+qu-f]\delta u\mathrm{d}\tau-2\iint_{\partial G_2} p(g-hu)\delta u\mathrm{d}S\end{aligned}$$

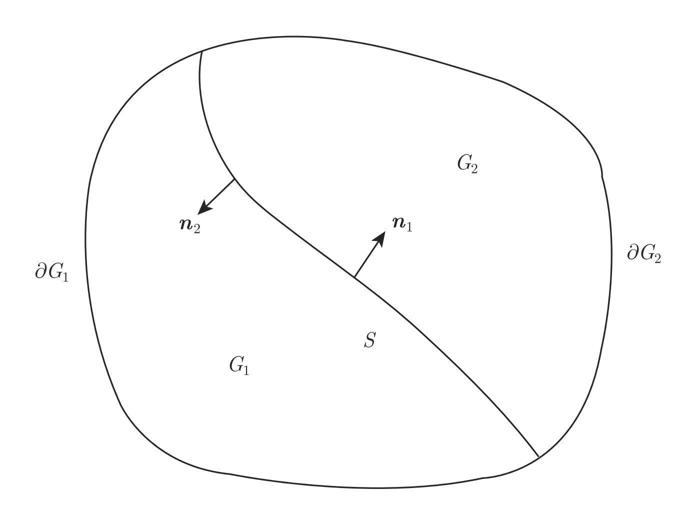



图 4.1.4　区域 $G$ 被不连续界面 S 分成二个子区域 $G_1$ 和 $G_2$

即

$$\begin{aligned}\delta J(u)=&2\int_{G}[-\nabla\cdot(p\nabla u)+qu-f]\delta u\mathrm{d}\tau\\&+2\iint_{\partial G}\left[p\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu-g\right)\right]\delta u\mathrm{d}S\\&+2\iint_{S}\left[p(G_1)\frac{\partial u}{\partial n_1}+p(G_2)\frac{\partial u}{\partial n_2}\right]\delta u\mathrm{d}S\end{aligned}\tag{4.1.32c}$$

由 $\delta J(u)=0$ 得到

$$\begin{aligned}&-\nabla\cdot(p\nabla u)+qu=f,\boldsymbol{r}\in G_1+G_2\\&\frac{\partial u}{\partial n}+hu=g,\boldsymbol{r}\in\partial G_1+\partial G_2\end{aligned}\tag{4.1.32d}$$

以及不连续面 $S$ 上的连接条件

$$p(G_1)\frac{\partial u}{\partial n}=p(G_2)\frac{\partial u}{\partial n}\tag{4.1.32e}$$

其中 $n$ 为不连续面 $S$ 上的法向导数 $n \equiv n_1 = -n_2$(对 $G_1$ 区域而言), $p(G_1)$ 和 $p(G_2)$ 分别表示当 $\boldsymbol{r}$ 点在 $G_1$ 或者 $G_2$ 区域内趋向 $S$ 时 $p(\boldsymbol{r})$ 的值. 显然, 连接条件式 (4.1.32e) 在变分中自动满足. 当然, 在不连续面 $S$ 上必须强制满足函数 $u(\boldsymbol{r})$ 的连续性条件, 即 $u(G_1)|_S = u(G_2)|_S$, 否则, 方程 (4.1.32a) 将出现 Dirac Delta 函数的导数.

### 4.1.4 泛函的条件极值问题

在许多实际问题中, 要求泛函在一定约束条件下的极值问题. 下面考虑两种不同约束条件下如何求泛函的极值问题.

**约束条件为函数方程** 这样的问题叫**测地线问题**. 最典型的例子是求位于曲面

$$G(x, y, z) = 0 \tag{4.1.33a}$$

上通过两固定点 $(x_0, y_0, z_0)$ 和 $(x_1, y_1, z_1)$ 的曲线 $\{z = z(x), y = y(x)\}$ 使泛函

$$J(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\mathrm{d}x \tag{4.1.33b}$$

取极值. 显然函数 $y(x)$ 与 $z(x)$ 不是独立的, 通过约束条件式 (4.1.33a) 相关. 如果能从式 (4.1.33a) 中解出 $y = \psi(x, z)$ 或者 $z = \psi(x, y)$, 代入上式, 问题即化为 4.1.1 小节讨论过的情形. 但问题是一般很难从式 (4.1.33a) 解出 $y$ 或 $z$, 故必须寻求其他办法. 由式 (4.1.33b), 在端点固定条件下, $J$ 的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta J(y, z) &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial z'}\delta z'\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left\{\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y + \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\delta z\right\}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.1.33c}$$

由于 $\delta y$ 和 $\delta z$ 不是独立变分, 不能直接推出 Euler 方程. 但由式 (4.1.33a) 两边取变分可得 $G_y\delta y + G_z\delta z = 0$, 假定 $G_z \neq 0$, 可求得变分 $\delta z$ 和 $\delta y$ 的关系 $\delta z = -(G_y/G_z)\delta y$, 代入式 (4.1.33c) 得

$$\delta J(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} \left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\left(-\frac{G_y}{G_z}\right)\right\}\delta y\mathrm{d}x \tag{4.1.33d}$$

因 $\delta y$ 是独立变分, 故由 $\delta J = 0$ 可推出 Euler 方程

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\left(-\frac{G_y}{G_z}\right) = 0 \tag{4.1.33e}$$

上式即是要求的方程, 它是泛函式 (4.1.33b) 在约束条件式 (4.1.33a) 下取极值满足的**必要条件**.

为了进一步引出所谓的 Lagrange 乘子法, 把方程 (4.1.33e) 写成 (设 $G_y \neq 0, G_z \neq 0$)

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)}{G_y}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right)}{G_z} \tag{4.1.34a}$$

令上式左右边等于同一函数 $-\lambda(x)$ 则有

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial F}{\partial y}+\lambda(x)G_y\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\\&\left[\frac{\partial F}{\partial z}+\lambda(x)G_z\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0\end{aligned} \tag{4.1.34b}$$

其中函数 $\lambda(x)$ 仍是未知, 但再利用约束方程, 联立方程 (4.1.33a) 就可求得 $\lambda(x)$, $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$. 显然, 方程 (4.1.34b) 是下列泛函 $\tilde{J}(y,z)$ 的 Euler 方程

$$\tilde{J}(y,z)=J(y,z)+\int_{x_0}^{x_1}\lambda(x)G(x,y,z)\mathrm{d}x \tag{4.1.34c}$$

于是, 我们只要构成新的泛函 $\tilde{J}(y,z)$, 则泛函 $J(y,z)$ 在约束条件式 (4.1.33a) 下的极值问题等价于新泛函 $\tilde{J}(y,z)$ 的极值问题. 对新泛函, $\delta y$ 和 $\delta z$ 都是独立变分. 这种方法称为**Lagrange 乘子法**. $\lambda(x)$ 称为 Lagrange 乘子. 上述可结果推广到 $n$ 个函数的泛函

$$\begin{aligned}J(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n;{y'}_1,{y'}_2,\cdots,y'_n)\mathrm{d}x\\G_m(y_1,y_2,\cdots,y_n)=0,m=1,2,\cdots,p,(p<n)\end{aligned} \tag{4.1.35a}$$

的极值问题. 作新泛函 $\tilde{J}$

$$\begin{aligned}\tilde{J}(y_1,y_2,\cdots,y_n)=J(y_1,y_2,\cdots,y_n)\\+\sum_{m=1}^{p}\int_{x_0}^{x_1}\lambda_m(x)G_m(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.1.35b}$$

则泛函在约束条件下的极值问题等价于求新泛函 $\tilde{J}$ 的无约束条件极值问题, 于是可求得 Euler 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial {y'}_i}-\left[\frac{\partial F}{\partial y_i}+\sum_{m=1}^{p}\lambda_m(x)\frac{\partial G_m}{\partial y_i}\right]=0,\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{4.1.35c}$$

上式有 $n$ 个方程, 但有 $(n+p)$ 个未知函数 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 及 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)$, 另外 $p$ 个方程即为约束方程.

**例 4.1.11** 求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上两点 $P_1$ 及 $P_2$ 之间长度最短的曲线. 设空间曲线的参数方程为 $\{x=x(t),y=y(t),z=z(t)\}$, 约束条件为

$$G(x,y,z)=x^2+y^2-R^2=0 \tag{4.1.36a}$$

曲线长度由泛函 $J(x,y,z)$ 给出

$$J(x,y,z)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\mathrm{d}t \tag{4.1.36b}$$

其中 $t_1$ 和 $t_2$ 分别对应于二点 $P_1$ 和 $P_2$. 由式 (4.1.35b) 建立新泛函 $\tilde{J}(x,y,z)$

$$\tilde{J}(x,y,z)=J(x,y,z)+\int_{t_1}^{t_2}\lambda(x)(x^2+y^2-R^2)\mathrm{d}t \tag{4.1.36c}$$

注意到在圆柱面上 $x=R\cos t$; $y=R\sin t$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, 于是上式化简为

$$\tilde{J}(x,y,z)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{R^2+\dot{z}^2}\mathrm{d}t \tag{4.1.37a}$$

于是相应的 Euler 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{z}}{\sqrt{R^2+\dot{z}^2}}\right)=0 \tag{4.1.37b}$$

积分后得到 $z=C_1t+C_2$, 其中常数 $C_1$ 和 $C_2$ 由点 $P_1$ 与 $P_2$ 决定. 因此所求极值曲线为圆柱螺旋线:$x=R\cos t$; $y=R\sin t$; $z=C_1t+C_2(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

**约束条件是积分形式** 这种问题通常称为**等周问题**. 典型的例子是求一条通过固定的两点 $P_1$ 和 $P_2$, 长度固定为 $l$ 的曲线 $y=y(x)$, 使面积

$$s=\int_{x_0}^{x_1}y(x)\mathrm{d}x \tag{4.1.38a}$$

取极大值. 这个问题可表达为在条件

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=l(\text{常数}) \tag{4.1.38b}$$

下求泛函 $s$ 的极值. 考虑较一般的情况: 设 $y(x)$ 通过两点 $P_1$ 和 $P_2$ 且满足广义的等周条件

$$J_1(y)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x=l(\text{常数}) \tag{4.1.39a}$$

求 $y=y(x)$ 使泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{4.1.39b}$$

取极值的必要条件. 与 4.1.1 小节类似, 把泛函的条件极值问题化为普通函数的条件极值问题. 设 $y(x)$ 满足约束条件 (4.1.39a) 且使泛函 $J(y)$ 取极值, 在 $y(x)$ 的邻域内, 取比较函数 $y^*(x)$

$$y^*(x) = y(x) + \alpha\eta_1(x) + \beta\eta_2(x) \tag{4.1.40a}$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 都是小参数, $\eta_1$ 和 $\eta_2$ 满足端点条件

$$\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = 0; \eta_2(x_0) = \eta_2(x_1) = 0 \tag{4.1.40b}$$

与 4.1.1 小节不同的是, 比较函数 $y^*(x)$ 中多引进了一个参数, 这是由于在讨论函数的条件极值问题时, 函数至少必须是二元的, 才有可能同时满足极值条件和约束条件. 把式 (4.1.40a) 代入式 (4.1.39a) 和 (4.1.39b) 得到

$$\begin{aligned} J_1(\alpha,\beta) \equiv J_1(y^*) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y+\alpha\eta_1+\beta\eta_2, y'+\alpha{\eta'}_1+\beta{\eta'}_2)\mathrm{d}x = l \\ J(\alpha,\beta) \equiv J(y^*) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\alpha\eta_1+\beta\eta_2, y'+\alpha\eta'_1+\beta\eta'_2)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.1.41a}$$

因 $y(x)$ 是在约束条件式 (4.1.39a) 下使泛函 $J(y)$ 取极值的函数, 当 $\alpha = \beta = 0$ 时, $y^* = y$, 故 $J(\alpha,\beta)$ 在约束条件 $J_1(\alpha,\beta) = l$ 下, 当 $\alpha = \beta = 0$ 时取极值. 因此, 我们把求约束条件下泛函极值问题, 化成了求约束条件下普通函数的极值问题. 根据 Lagrange 乘子法, 应有

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial J(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} + \lambda\frac{\partial J_1(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=0\\\beta=0}} = 0 \\ \left[\frac{\partial J(\alpha,\beta)}{\partial\beta} + \lambda\frac{\partial J_1(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=0\\\beta=0}} = 0 \end{aligned} \tag{4.1.41b}$$

注意, 这里 $\lambda$ 是常数. 把方程 (4.1.41a) 和 (4.1.41b) 代入后即得

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} [(F_y + \lambda G_y)\eta_1 + (F_{y'} + \lambda G_{y'}){\eta'}_1]\mathrm{d}x = 0 \\ \int_{x_0}^{x_1} [(F_y + \lambda G_y)\eta_2 + (F_{y'} + \lambda G_{y'}){\eta'}_2]\mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \tag{4.1.41c}$$

上两式第二项分部积分并且利用端点条件, 得到

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \left[(F_y + \lambda G_y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F'_y + \lambda G'_y)\right]\eta_1\mathrm{d}x = 0 \\ \int_{x_0}^{x_1} \left[(F_y + \lambda G_y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F'_y + \lambda G'_y)\right]\eta_2\mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \tag{4.1.42a}$$

故可推知

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\lambda\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}+\lambda\frac{\partial G}{\partial y'}\right)=0 \tag{4.1.42b}$$

上式是关于 $y(x)$ 的二阶常微分方程, 含参数 $\lambda$. 这个方程的通解中共含三个参数: 两个积分常数和 $\lambda$. 积分常数可有端点条件可得, 而 $\lambda$ 则可有约束条件式 (4.1.39a) 求得. 显然方程 (4.1.42b) 是泛函 $\tilde{J}(y)$ 在没有附加条件下的 Euler 方程

$$\begin{aligned}\tilde{J}(y)&=J(y)+\lambda\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x\\&=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y,y')+\lambda G(x,y,y')]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.1.42c}$$

这个结果可以推广到多个变数情形下求泛函条件极值的 Euler 方程. 与前面一样, 这种方法也称为 Lagrange 乘子法.

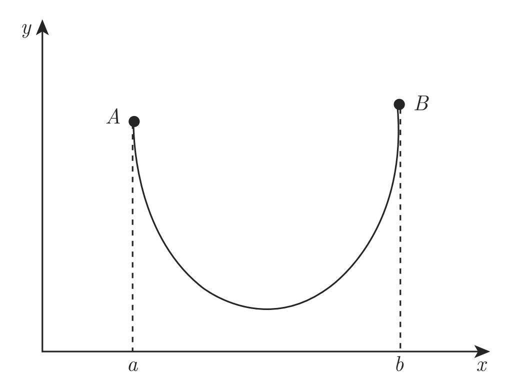



图 4.1.5　区域 $G$ 被不连续界面 S 分成二个子区域 $G_1$ 和 $G_2$

**例 4.1.12**　固定两点 $A$ 和 $B$ 悬挂长度为 $l$ 的铁链, 求在重力作用下铁链的形状. 在重力作用下, 势能为

$$J(y)=\int_a^b y\mathrm{d}s=\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \tag{4.1.43a}$$

约束条件为 $\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=l$. 在重力作用下, 平衡位置的势能极小, 故问题变成在约束条件下求 $J(y)$ 的极小. 由式 (4.1.42c), 构成新泛函

$$\tilde{J}(y)=\int_a^b(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \tag{4.1.43b}$$

进一步, 由方程 (4.1.42b) 得到

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}-(y+\lambda)\frac{(y')^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1 \tag{4.1.43c}$$

即 $y+\lambda = C_1\sqrt{1+y'^2}$, 令 $y' = \sinh t$, 则 $y+\lambda = C_1\cosh t$, 故 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y/\sinh t = C_1\mathrm{d}t$, 于是 $x = C_1 t + C_2$, 与 $y+\lambda = C_1\cosh t$ 一起消去 $t$ 得到

$$y+\lambda = C_1\cosh\left(\frac{x-C_2}{C_1}\right) \tag{4.1.43d}$$

上式表示一族悬链线, 其中 $(\lambda, C_1, C_2)$ 由 $A$ 和 $B$ 二点的坐标以及约束条件决定.

**例 4.1.13** 在约束条件 (即归一化条件) 下

$$\int_G \rho u^2 \mathrm{d}\tau = 1 \tag{4.1.44a}$$

使泛函

$$J(u) = \int_G F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z)\mathrm{d}\tau \tag{4.1.44b}$$

取极值的函数 $u$ 满足的 Euler 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial u_z} = \lambda\rho u \tag{4.1.44c}$$

当 $F$ 取下列形式时

$$F = \frac{1}{2}[p(\nabla u)^2 + qu^2] \tag{4.1.44d}$$

方程 (4.1.44b) 即为

$$-\nabla\cdot(p\nabla u) + qu = \lambda\rho u \tag{4.1.44e}$$

显然上式是本征值方程. 因此本征值问题与泛函的条件极值问题相关联, 相应的 Lagrange 乘子即为本征值, 而约束条件相当于归一化条件. 在用变分近似方法求解本征值问题时, 这一点是非常重要的, 见 4.3 节讨论.

### 4.1.5 Hamilton 原理与最小位能原理

Hamilton 原理是指任何物理系统, 若给定时刻 $t = t_1$ 的初始状态和时刻 $t = t_2$ 的终结状态, 则从 $t_1$ 到 $t_2$ 的一切可能的运动状态中, 真实运动使泛函

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t \tag{4.1.45a}$$

的变分 $\delta J = 0$, 其中 $L = T - U$ 称为**Lagrange 函数**, $T$ 和 $U$ 分别是系统在 $t$ 时刻的动能和位能, $J$ 称为系统的作用量. 对连续分布的力学系统, $L = T - U$、$T$ 和 $U$ 分别为系统的 Lagrange 密度函数、动能密度和位能密度, 因此

$$J = \int_{t_1}^{t_2}\int_G L\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \tag{4.1.45b}$$

其中 $G$ 为系统占有的区域.

对与时间无关的静力学问题, 一切可容许位移中, 真实的平衡位置使位能的变分 $\delta U = 0$, 如果平衡状态是稳定的, 则 $U$ 取极小.

**例 4.1.14** 考虑两端固定的弦, 设弦长为 $l$, 密度分布为 $\rho(x)$, 弦的内部张力分布为 $\tau(x)$, 在外力作用下作横向振动. 设位移分布为 $u(x,t)$, 则在 $x \to x + \mathrm{d}x$ 段具有动能 $\mathrm{d}T = \rho(x)u_t^2\mathrm{d}x/2$, 而位能

$$\mathrm{d}U = \tau(x)\left(\sqrt{1+u_x^2}\mathrm{d}x - dx\right) \approx \frac{1}{2}\tau(x)u_x^2\mathrm{d}x \tag{4.1.46a}$$

于是, 弦振动系统的 Lagrange 函数 $L(t)$ 为

$$L(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \tau(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{4.1.46b}$$

根据 Hamilton 原理, 真实运动 $u(x,t)$ 使泛函 $J(u)$ 取极值

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \tau(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{4.1.46c}$$

于是由 $\delta J(u) = 0$ 可得波动方程

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\tau(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0. \tag{4.1.46d}$$

**例 4.1.15** 膜的横振动, 设膜的张力 $\tau(x,y)$, 面密度 $\sigma(x,y)$. 考虑膜在垂直于 $x$-$y$ 平面上某有界域 $G$ 的外力作用下作微小横振动. 记外力密度为 $f(x,y,t)$, 膜垂直于 $xOy$ 平面的位移 $u(x,y,t)$, 系统的 Lagrange 函数 $L_1$ 为

$$L_1 = \int_{t_1}^{t_2}\int_G \left\{\frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\tau}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + fu\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \tag{4.1.47a}$$

如果在 $G$ 的边界 $\partial G$ 上还有线密度 $p(s)$ 的外力作用, 并设 $\beta(s)$ 是膜的弹性系数, 则边界 $\partial G$ 上的 Lagrange 函数为

$$L_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial G}\left[p(s)u - \frac{1}{2}\beta(s)u^2\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{4.1.47b}$$

根据 Hamillon 原理, 真实运动应使泛函

$$\begin{aligned} J(u) = &\int_{t_1}^{t_2}\int_G \left\{\frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\tau}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + fu\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \\ &+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial G}\left[p(s)u - \frac{1}{2}\beta(s)u^2\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.1.47c}$$

取极值. 泛函 $J(u)$ 的一阶变分

$$\delta J(u)=\int_{t_1}^{t_2}\int_G\left[\sigma u_t\frac{\partial\delta u}{\partial t}-\tau\left(u_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}+u_y\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right)+f\delta u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial G}[p(s)-\beta(s)u]\delta u\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{4.1.47d}$$

对上式第一项作分部积分

$$\int_G\int_{t_1}^{t_2}\sigma u_t\frac{\partial\delta u}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_G\left[\sigma u_t\delta u\bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.1.48a}$$

对时间变量 $\delta u(x,y,t_1)=\delta u(x,y,t_2)\equiv 0$, 故有

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_G\sigma u_t\frac{\partial\delta u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\int_G\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \tag{4.1.48b}$$

式 (4.1.47d) 中第二项用 Green 公式则可得

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\int_G\tau\left(u_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}+u_y\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\=&\int_{t_1}^{t_2}\int_G\left[\frac{\partial(\tau u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau u_y)}{\partial y}\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\&-\int_{t_1}^{t_2}\int_G\left[\frac{\partial(\tau u_x\delta u)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau u_y\delta u)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\=&\int_{t_1}^{t_2}\int_G\left[\frac{\partial(\tau u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau u_y)}{\partial y}\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial G}\tau\frac{\partial u}{\partial n}\delta u\mathrm{d}s\mathrm{d}t\end{aligned}$$

代入式 (4.1.47d) 得

$$\delta J(u)=\int_{t_1}^{t_2}\int_G\left[-\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\nabla\cdot(\tau\nabla u)+f\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial G}\left[p(s)-\beta(s)u-\tau\frac{\partial u}{\partial n}\right]\delta u\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{4.1.48c}$$

由 $\delta J=0$ 得 Euler 方程

$$\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nabla\cdot(\tau\nabla u)=f \tag{4.1.49a}$$

及自然边界条件 (力平衡方程)

$$\tau\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(s)u=p(s) \tag{4.1.49b}$$

因此, 求泛函的极值问题化为求波动方程 (4.1.85a) 的第三类边值问题.

# 4.2 变分法在边值问题中的应用

在 4.1 节中, 我们列举了若干例子说明, 求解变分问题可以转化成求解微分方程的边值问题, 反之, 能否把求解微分方程的边值问题转化成变分问题呢? 关键是二类解的等价性问题. 事实上, 二类问题对解的光滑性要求是不一样的, 一般来说, 微分方程的边值问题对古典解的光滑性要求更高. 因此, 为了能够把变分问题的解作为微分方程边值问题的近似解, 一方面我们必须推广微分方程边值问题解的定义 (弱解), 另一方面, 必须对微分算子有一定的要求. 本节首先讨论边值问题与泛函极值问题的等价关系, 即所谓**变分原理**, 然后讨论用 Ritz 法和 Galerkin 法求近似解, 最后介绍基于 Galerkin 法求解时域问题, 即把变分方法应用于混合问题.

### 4.2.1 边值问题与变分问题的等价: 正算子

考虑作用在 Hilbert 空间上的 Hermite 对称算子 $\boldsymbol{L}$, 求解下列边值问题

$$\boldsymbol{L}u(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}\in G;\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0 \tag{4.2.1a}$$

我们假定边界条件是齐次的, 否则可对它进行齐次化处理 (尽管困难, 但原则上是可以的). 显然, 上述边值问题是下列泛函 $J(u)$ 取极值的 Euler 方程和自然边界条件 (注意: 仅仅是必要条件)

$$J(u)=(u,\boldsymbol{L}u)-[(u,f)+(f,u)] \tag{4.2.1b}$$

这样的泛函形式称为**二次泛函**, 因为对任意的实数 $a$, 下列关系式成立

$$(au,\boldsymbol{L}au)=a^2(u,\boldsymbol{L}u) \tag{4.2.1c}$$

我们的问题是: 在什么条件下, 二者是等价的, 即方程 (4.2.1a) 的解一定使泛函 $J(u)$ 取极值; 反之, 泛函 $J(u)$ 取极值的函数一定是方程 (4.2.1a) 的解.

**能量法** 首先来证明唯一性定理: 如果 $\boldsymbol{L}$ 是正算子 (见 2.2.1 小节讨论), 即对所有属于允许函数类, 内积

$$(u,\boldsymbol{L}u)\geqslant 0 \tag{4.2.2a}$$

当且仅当 $u=0$ 时 (几乎处处为零) 等号成立, 方程 (4.2.1a) 至多只有一个解.

证明: 设方程 (4.2.1a) 有二个解 $u_1$ 和 $u_2$, 则 $u=u_1-u_2$ 应满足齐次方程 $\boldsymbol{L}u=0$, 于是

$$(u,\boldsymbol{L}u)=0 \tag{4.2.2b}$$

而 $\boldsymbol{L}$ 是正算子, 根据假定, 如果 $u\neq 0$ 应有 $(u,\boldsymbol{L}u)>0$, 故由上式 $u\equiv 0$(几乎处处) 即 $u_1\equiv u_2$, 于是唯一性得证.

**例 4.2.1**　一维算子 $\boldsymbol{L}$ 的边值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}u \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)u = f(x), x \in (0, l)\\ \left(\alpha_1 u - \beta_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=0} = 0; \left(\alpha_2 u + \beta_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=l} = 0\end{gathered} \tag{4.2.3a}$$

由

$$\begin{aligned}(u, \boldsymbol{L}u) &= \int_0^l \left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + qu\right]u\mathrm{d}x\\ &= \int_0^l \left[p\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 + qu^2\right]\mathrm{d}x + \left[p(0)u(0)\frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x} - p(l)u(l)\frac{\mathrm{d}u(l)}{\mathrm{d}x}\right]\\ &= \int_0^l \left[p\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 + qu^2\right]\mathrm{d}x + \frac{\alpha_1}{\beta_1}p(0)u^2(0) + \frac{\alpha_2}{\beta_2}p(l)u^2(l)\end{aligned} \tag{4.2.3b}$$

因此, 如果 $p(x) > 0, q(x) \geqslant 0$, $\alpha_1/\beta_1 > 0$ 以及 $\alpha_2/\beta_2 > 0$, $\boldsymbol{L}$ 是正算子, 于是方程 (4.2.3a) 有唯一解.

**例 4.2.2**　三维算子的边值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}u \equiv -\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]u + q(\boldsymbol{r})u = f(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r} \in G\\ \left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = 0\end{gathered} \tag{4.2.4a}$$

由

$$\begin{aligned}(u, \boldsymbol{L}u) &= \int_G [-\nabla\cdot(p\nabla u) + qu]u^*\mathrm{d}\tau\\ &= \int_G (p|\nabla u|^2 + q|u|^2)\mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G} pu^*\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\\ &= \int_G (p|\nabla u|^2 + q|u|^2)\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G}\frac{\alpha}{\beta}p|u|^2\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{4.2.4b}$$

因此, 如果 $p(\boldsymbol{r}) > 0, q(\boldsymbol{r}) \geqslant 0$ 以及 $\alpha/\beta > 0$, $\boldsymbol{L}$ 是正算子, 于是方程 (4.2.4a) 有唯一解.

**正算子定理**　设 $\boldsymbol{L}$ 是正的 Hermite 算子, 若方程 (4.2.1a) 有解, 则此解必使泛函式 (4.2.1b) 取极小值; 反之, 若允许函数类 (即满足边界条件的函数) 中某个函数 $u$ 使泛函式 (4.2.1b) 取极小, 则这个函数 $u$ 必定是方程 (4.2.1a) 的解.

**证明分二步**

(1) 如果某个函数 $u$ 满足方程 (4.2.1a), 那么这个函数 $u$ 使泛函 $J(u)$ 取极小. 事实上, 取函数 $u$ 的一阶变分为 $\delta u$, 则泛函 $J(u)$ 的变化 (注意: 为了证明极小, 必

须考虑二阶变分)

$$\nabla J(u) = \delta J(u) + \delta^2 J(u) \tag{4.2.5a}$$

其中 $\delta J(u)$ 为泛函 $J$ 的一阶变分

$$\delta J(u) = (\delta u, \boldsymbol{L}u) + (u, \boldsymbol{L}\delta u) - [(\delta u, f) + (f, \delta u)] \tag{4.2.5b}$$

利用 $\boldsymbol{L}$ 的 Hermite 对称性

$$\begin{aligned}\delta J(u) &= (\delta u, \boldsymbol{L}u) + (\boldsymbol{L}u, \delta u) - [(\delta u, f) + (f, \delta u)] \\ &= (\boldsymbol{L}u, \delta u)^* + (\boldsymbol{L}u, \delta u) - [(f, \delta u)^* + (f, \delta u)] \\ &= \mathrm{Re}[(\boldsymbol{L}u - f, \delta u)]\end{aligned} \tag{4.2.5c}$$

而二阶变分为 $\delta^2 J(u) = (\delta u, \boldsymbol{L}\delta u)$. 当函数 $u$ 满足方程 (4.2.1a) 时, 显然 $\delta J(u) = 0$, 故泛函 $J(u)$ 取极值, 又 $\boldsymbol{L}$ 是正算子, $\delta u$ 属允许函数类, 故 $(\delta u, \boldsymbol{L}\delta u) > 0$ 和 $\delta^2 J(u) > 0$, 因此泛函 $J(u)$ 取极小值;

(2) 反过来也是容易证明的, 设某个函数 $u$ 使泛函 $J(u)$ 取极小值, 则对这个函数 $u$ 的任意变分 $\delta u$ 应有 $\Delta J(u) > 0$, 而

$$\Delta J(u) = \mathrm{Re}[(\boldsymbol{L}u - f, \delta u)] + (\delta u, \boldsymbol{L}\delta u) > 0 \tag{4.2.5d}$$

因 $\delta u$ 任意 (在允许函数中), 上式恒成立的条件是

$$(\boldsymbol{L}u - f, \delta u) = 0 \tag{4.2.5e}$$

即 $\boldsymbol{L}u = f$, 于是定理得证.

**例 4.2.3** 对一维边值问题方程 (4.2.3a), 由式 (4.2.1b) 和 (4.2.3b), 泛函 $J(u)$ 为

$$\begin{aligned}J(u) = &\int_0^l \left[p\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 + qu^2\right]\mathrm{d}x - 2\int_0^l fu\mathrm{d}x \\ &+ \frac{\alpha_1}{\beta_1}p(0)u^2(0) + \frac{\alpha_2}{\beta_2}p(l)u^2(l)\end{aligned} \tag{4.2.6a}$$

如果 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 则

$$J(u) = \int_0^l \left[p\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 + qu^2\right]\mathrm{d}x - 2\int_0^l fu\mathrm{d}x \tag{4.2.6b}$$

**例 4.2.4** 对三维边值问题式 (4.2.4a), 由式 (4.2.1b) 和 (4.2.4b), 泛函 $J(u)$ 为

$$J(u) = \int_G (p|\nabla u|^2 + q|u|^2)\mathrm{d}\tau - \int_G (u^* f + f^* u)\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} \frac{\alpha}{\beta}p|u|^2\mathrm{d}S \tag{4.2.7a}$$

如果 $\beta=0$ 则

$$J(u)=\int_G(p|\nabla u|^2+q|u|^2)\mathrm{d}\tau-\int_G(u^*f+f^*u)\mathrm{d}\tau \tag{4.2.7b}$$

**例 4.2.5** 考虑椭圆型算子的边值问题

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}u\equiv-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+qu=f,\boldsymbol{r}\in G\\ \boldsymbol{P}u\equiv\sum_{i,j=1}^n a_{ij}n_j\frac{\partial u}{\partial x_i}+\beta u=0,\boldsymbol{r}\in\partial G\end{aligned} \tag{4.2.8a}$$

其中系数 $a_{ij}=a_{ji}$ 实对称, $\beta$ 和 $q$ 为实函数. 作运算

$$\begin{aligned}(u,\boldsymbol{L}u)&\equiv\int_G\left[-\sum_{i,j=1}^n u^*\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+qu^*u\right]\mathrm{d}\tau\\ &=\int_G\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^*}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}+quu^*\right)\mathrm{d}\tau-\int_G\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}u^*\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\tau\\ &=\int_G\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^*}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}+quu^*\right)\mathrm{d}\tau-\iint_{\partial G}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}n_ju^*\frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{4.2.8b}$$

利用方程 (4.2.8a) 中的边界条件, 上式简化为

$$(u,\boldsymbol{L}u)=\int_G\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^*}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}+quu^*\right)\mathrm{d}\tau+\iint_{\partial G}\beta uu^*\mathrm{d}S \tag{4.2.8c}$$

由式 (4.2.1b), 泛函 $J(u)$ 为

$$J(u)=\int_G\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^*}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}+quu^*\right)\mathrm{d}\tau+\iint_{\partial G}\beta uu^*\mathrm{d}S-\int_G(u^*f+f^*u)\mathrm{d}\tau \tag{4.2.8d}$$

至此, 我们一般考虑二阶方程, 下面举一个高阶方程的例子.

**例 4.2.6** 考虑四阶方程的边值问题

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}u\equiv\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[E(x)I(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right]=q(x),x\in(0,l)\\ u(0)=u(l)=0;\frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u(l)}{\mathrm{d}x}=0\end{aligned} \tag{4.2.9a}$$

上式描述棒的弯曲振动, 物理上要求 $E(x)>0$ 和 $I(x)>0$. 下面证明 $\boldsymbol{L}$ 在函数类: (1) 满足边界条件; (2) 有连续的四阶导数, 是正算子

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{L}u,v) &= \int_0^l v\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x = v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)\bigg|_0^l - \int_0^l \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= -EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\bigg|_0^l + \int_0^l EI\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = \int_0^l EI\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

同理

$$
(u,\boldsymbol{L}v) = \int_0^l u\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)dx = \int_0^l EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x \tag{4.2.9b}
$$

故 $(u,\boldsymbol{L}v)=(\boldsymbol{L}u,v)$, 即 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称算子, 而

$$
(u,\boldsymbol{L}u) = \int_0^l E(x)I(x)\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x \geqslant 0 \tag{4.2.9c}
$$

当上式等于零时 $u_{xx}=0$, 故 $u(x)=C_1+C_2x$, 由方程 (4.2.9a) 中边界条件知道 $C_1=C_2=0$, 故对所有允许函数 $u(x)\neq 0$: $(u,\boldsymbol{L}u)>0$. 因此 $\boldsymbol{L}$ 是正的 Hermite 对称算子. 相应的泛函 $J(u)$ 为

$$
J(u) = \int_0^l \left[E(x)I(x)\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 - 2qu\right]\mathrm{d}x \tag{4.2.9d}
$$

物理上, 上式积分中第一项相当于棒弯曲振动中的位能, 而 $qu$ 是外力作的功, 故泛函 $J(u)$ 表示能量. 于是, 泛函 $J(u)$ 极小相当于位能最小, 这与物理上的位能极小原理是一致的.

从以上各例可看出, 由于泛函 $J(u)$ 中的积分项相当于物理上的能量积分, 故基于正算子定理的变分法求解边值问题的方法也称为**能量法**. 该方法是 Ritz 近似方法的基础 (见 4.2.3 小节).

注意: 因为方程 (4.2.1a) 是线性方程, 当微分算子 $\boldsymbol{L}$ 的系数都是实函数时, 我们总可以假定函数 $u$ 也是实函数, 在实数域, 泛函 $J(u)$ 简化成

$$
J(u) = \frac{1}{2}(u,\boldsymbol{L}u) - (f,u) \tag{4.2.10}
$$

**虚功原理** 从式 (4.2.7b) 或 (4.2.8d) 可看出, 通过 Green 公式 (一维情况为分部积分), 我们可以把 $(u,\boldsymbol{L}u)=(\boldsymbol{L}u,u)$ 中的二阶偏导数项转化成一阶偏导数. 同样, 也可以把内积 $(u,\boldsymbol{L}v)=(\boldsymbol{L}u,v)$ 转化成一阶偏导数积分, 例如, 从式 (4.2.4b) 和

(4.2.8c), 我们有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{L}u, v) &= \int_G (p\nabla u \cdot \nabla v + quv)\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} \frac{\alpha}{\beta} puv\mathrm{d}S \\
(\boldsymbol{L}u, v) &= \int_G \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + quv\right)\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} \beta uv\mathrm{d}S
\end{aligned} \tag{4.2.11}
$$

因此, 可以定义实对称的双线性泛函 $D(u,v) \equiv (\boldsymbol{L}u, v)$(注意: 此时的 $(\boldsymbol{L}u, v)$ 必须是用 Green 公式转化成上式的形式).

于是, 对 Hilbert 空间上的一般线性微分算子 $\boldsymbol{L}$ 存在定理 (证明略): 若允许函数类 (即满足边界条件的函数) 的某个函数 $u$ 满足方程 (4.2.1a), 那么这个函数必满足下列方程

$$
D(u,v) = (f, v) \tag{4.2.12}
$$

其中 $v$ 是允许函数类中的任意函数; 反之, 若允许函数类的某个函数 $u$ 满足方程 (4.2.12), 则这个函数必是方程 (4.2.1a) 的**弱解**. 事实上, 方程 (4.2.12) 可以由弱解的定义式 (3.1.43c) 转化而来. 注意: (1) 双线性泛函 $D(u,v)$ 中积分只要求函数在 $G$ 内存在连续的一阶偏导数, 边界连续就可以了; (2) 对非 Hermite 对称的算子 $(\boldsymbol{L}u, v) \neq (u, \boldsymbol{L}v)$.

在力学中, 方程 (4.2.12) 的左边项 $(\boldsymbol{L}u, v)$ 表示虚功, 故方程 (4.2.12) 也称为**虚功方程**, 由此求方程 (4.2.1a) 的近似方法称为**虚功法**, 它是 Galerkin 近似方法的基础 (见 4.2.4 小节). 必须注意: 虚功法没有用到变分问题与边值问题的等价性, 因此它比能量法更具有一般性, 不仅适合正算子方程, 而且适合非正算子方程, 对算子 $\boldsymbol{L}$ 的 Hermite 对称性也没有要求.

当算子 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称的正算子时, 虚功法和能量法给出同样的结果. 证明: (1) 设函数 $u$ 使泛函 $J(u)$ 取极值, 则对任何允许函数类中的函数 $v$ 有

$$
\begin{aligned}
\Im(t) &= J(u+tv) - J(u) \\
&= \frac{1}{2}[D(u+tv, u+tv) - D(u,v)] - [(f, u+tv) - (f, u)] \\
&= \frac{1}{2}t^2 D(v,v) + \frac{1}{2}t[D(u,v) + D(v,u) - 2(f,v)]
\end{aligned} \tag{4.2.13a}
$$

由极值条件

$$
\left.\frac{\mathrm{d}\Im(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}[D(u,v) + D(v,u) - 2(f,v)] = 0 \tag{4.2.13b}
$$

由 Hermite 对称条件 $D(u,v) = D(v,u)$, 得到方程 (4.2.12). 对正算子

$$
\left.\frac{\mathrm{d}^2\Im(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} = D(u,u) \geqslant 0 \tag{4.2.13c}
$$

故满足极小条件; (2) 反过来, 设函数 $u^*$ 是虚功方程的解：$D(u^*,v) = (f,v)$, 且 $D(u^*,v) = D(v,u^*)$, 则由式 (4.2.13a) 和正算子条件

$$J(u^*+tv) - J(u^*) = \frac{1}{2}t^2 D(v,v) \geqslant 0 \tag{4.2.13d}$$

即 $J(u^*+tv) \geqslant J(u^*)$, 故泛函 $J(u)$ 在函数 $u^*$ 达到极小. 得证.

### 4.2.2 变分解的存在性：正定算子

在上节中, 我们证明了求解边值问题方程 (4.2.1a) 与求泛函 $J(u)$ 极小值问题的等价性, 即对 Hermite 对称的正算子, 在允许函数类中, 如果存在函数 $u$ 满足方程 (4.2.1a), 则必使泛函 $J(u)$ 取极小; 反过来, 假定在允许函数类中存在函数 $u$ 使泛函 $J(u)$ 取极小, 则它必满足方程. 当然, 我们的目的是要在允许函数类中找到函数 $u$ 使泛函 $J(u)$ 取极小. 问题是: 这个函数 $u$ 是否确实存在？事实上, 如果允许函数类中元素不是足够多, 有可能找不到函数 $u$ 使泛函 $J(u)$ 取极小值. 因此, 有必要扩充函数 $u$ 的定义域, 使泛函 $J(u)$ 在新的定义域内存在极小. 为此对算子 $\boldsymbol{L}$ 有更强的限制条件, 即要求 $\boldsymbol{L}$ 是正定算子.

所谓正定算子是指: 对任一允许函数类中函数 $u$, 存在常数 $\gamma > 0$, 成立不等式

$$(u, \boldsymbol{L}u) \geqslant \gamma^2 (u,u) \tag{4.2.14a}$$

则称 $\boldsymbol{L}$ 为**正定算子**. 为了讨论方便, 定义新的 Hilbert 空间 $H_0$.

(1) 对所有允许函数类中函数, 定义新的内积为带算子内积

$$\langle u|\boldsymbol{L}|v\rangle = D(u,v) \tag{4.2.14b}$$

因 $\boldsymbol{L}$ 是正算子, 容易证明上式满足内积的公理, 而新的模为

$$||u||^2_{\boldsymbol{L}} = \langle u|\boldsymbol{L}|u\rangle = D(u,u) \tag{4.2.14c}$$

(2) 定义了内积式 (4.2.14b) 后, 允许函数类即成为一个新的内积空间, 但是这个内积空间不一定完备, 即这个内积空间中的 Cauchy 序列有可能收敛到一个元素 $u^*$, 而 $u^*$ 不属允许函数类. 如果我们把所有这些极限元素补充到这个内积空间中来, 则可以构成一个完备的内积空间, 亦即 Hilbert 空间, 这个 Hilbert 空间记为 $H_0$.

于是, 有存在性和唯一性定理: 如果 $\boldsymbol{L}$ 是正定算子, 则由式 (4.2.1b) 定义的泛函 $J(u)$ 在 Hilbert 空间 $H_0$ 内必取得极小, 即在 $H_0$ 中总存在一个元素 $u$ 使泛函 $J(u)$ 取极小值 (证明略). 由于正定的算子必是正算子, 故在 $H_0$ 中总存在一个元素 $u$ 满足虚功方程 (4.2.12), 它是边值问题方程 (4.2.1a) 的弱解.

由上可知, 由于 $H_0$ 包含极限元素, 故使泛函 $J(u)$ 取极小的元素 $u$ 不一定属于允许函数类 (也可能恰好是极限元素). 具体地说, 可能发生下列情况.

(1) 它不属于允许函数类, 不满足边值问题方程 (4.2.1a) 中的边界条件;

(2) 对算子 $\boldsymbol{L}$ 没有意义, 即函数 $u$ 可能不充分可导, 但可引入广义导数.

因此, 用泛函 $J(u)$ 极小得到的解不一定在古典意义下满足方程和边界条件, 故为广义解 (就是弱解), 也称为是在 Ritz 意义下的广义解.

**例 4.2.7** 一维 S-L 型算子

$$\boldsymbol{L}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x) \tag{4.2.15a}$$

设 $u$ 满足第一类边界条件且最小值 $\min[p(x)]=p_m>0,\min[q(x)]=q_m>0$, 则算子 $\boldsymbol{L}$ 是正定的. 证明如下

$$(\psi,\boldsymbol{L}\psi)=\int_0^l\left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)^2+q(x)\psi^2\right]\mathrm{d}x\geqslant\int_0^l\left[p_m\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)^2+q_m\psi^2\right]\mathrm{d}x$$

下面来证明不等式

$$\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{2}{l^2}\int_0^l\psi^2(x)\mathrm{d}x \tag{4.2.15b}$$

因 $\psi(x)$ 可表示为

$$\psi(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{4.2.15c}$$

即有

$$\psi^2(x)=\left[\int_0^x\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]^2\leqslant\left[\int_0^x1^2\mathrm{d}t\right]\cdot\int_0^x\left[\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2\mathrm{d}t \tag{4.2.15d}$$

因 $[\psi_t(t)]^2$ 在 $(0,l)$ 内非负, 于是

$$\psi^2(x)\leqslant\left[\int_0^x1^2\mathrm{d}x\right]\cdot\int_0^l\left[\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2\mathrm{d}t=x\int_0^l\left[\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2\mathrm{d}t \tag{4.2.16a}$$

两边积分

$$\int_0^l\psi^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{l^2}{2}\int_0^l\left[\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2\mathrm{d}t \tag{4.2.16b}$$

利用此不等式, 显然有

$$(\psi,\boldsymbol{L}\psi)\geqslant\frac{2p_m}{l^2}\int_0^l\psi^2(x)\mathrm{d}x+q_m\int_0^l\psi^2(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{2p_m}{l^2}+q_m\right)\int_0^l\psi^2\mathrm{d}x$$

即 $(\psi,\boldsymbol{L}\psi)\geqslant\gamma^2(\psi,\psi)$, 其中 $\gamma^2=2p_m/l^2+q_m$. 故正定性得证.

**例 4.2.8** 二维 Laplace 算子

$$\boldsymbol{L}=-\nabla^2=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),(x,y)\in G \tag{4.2.17a}$$

在第一类边界条件下是正定的. 设 $G$ 在第一象限, 如图 4.2.1, 作矩形区域

$$G' : [0 \leqslant x \leqslant a; 0 \leqslant y \leqslant b]$$

$G'$ 包含 $G$ 在内, 扩大 $\psi$ 的定义域 $G$ 到 $G'$, 在 $\partial G$ 和 $\partial G'$ 之间 $\psi = 0$. 设 $(x_1, y_1) \in G'$, 则

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial \psi(x, y_1)}{\partial x} \mathrm{d}x = \psi(x_1, y_1) \tag{4.2.17b}$$

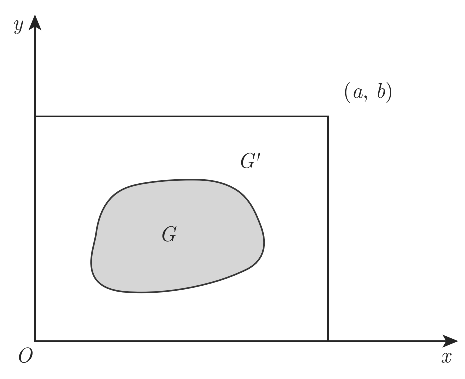



图 4.2.1 矩形区域 $G'$ 包含 $G$

于是有

$$\begin{aligned} \psi^2(x_1, y_1) &= \left[\int_0^{x_1} \frac{\partial \psi(x, y_1)}{\partial x} \mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \left[\int_0^{x_1} 1^2 \mathrm{d}x\right] \cdot \int_0^{x_1} \left[\frac{\partial \psi(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant a \int_0^a \left[\frac{\partial \psi(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

在 $G'$ 上对上式两边积分

$$\begin{aligned} \iint_{G'} \psi^2(x_1, y_1) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 &\leqslant a \int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^b \mathrm{d}y_1 \int_0^a \left[\frac{\partial \psi(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 \mathrm{d}x \\ &= a^2 \int_0^b \mathrm{d}y_1 \int_0^a \left[\frac{\partial \psi(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 \mathrm{d}x \\ &= a^2 \iint_{G'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{4.2.17c}$$

上式右边进一步放大, 即有

$$\iint_{G'} \psi^2(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leqslant a^2 \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{4.2.17d}$$

因在 $\partial G$ 和 $\partial G'$ 之间 $\psi=0$, 故有

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \frac{1}{a^2}\iint_G \psi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.2.18a}$$

于是

$$\begin{aligned}(\psi,\boldsymbol{L}\psi)&=\iint_G \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\geqslant \frac{1}{a^2}\iint_G \psi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a^2}(\psi,\psi)\end{aligned} \tag{4.2.18b}$$

故 $\boldsymbol{L}$ 是正定的. 可以证明: 在第二和第三类边界条件下, 二维 Laplace 算子也是正定的.

**例 4.2.9**　对三维算子式 (4.2.4a), 可以证明: 当 $\alpha/\beta>0$, $p(\boldsymbol{r})>0$, $q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$ 时, $\boldsymbol{L}$ 是正定的. 当 $\beta=0$ 证明方法同上例一样: 作包含 $G'$ 的长方体

$$G':[0\leqslant x\leqslant a;0\leqslant y\leqslant b;0\leqslant z\leqslant c] \tag{4.2.19a}$$

取 $(x_1,y_1,z_1)\in G'$

$$\psi(x_1,y_1,z_1)=\int_0^{x_1}\frac{\partial\psi(x,y_1,z_1)}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$\psi^2(x_1,y_1,z_1)=\left[\int_0^{x_1}\frac{\partial\psi(x,y_1,z_1)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]^2\leqslant a\int_0^{a}\left[\frac{\partial\psi(x,y_1,z_1)}{\partial x}\right]^2\mathrm{d}x$$

两边对 $(x_1,y_1,z_1)$ 在 $G'$ 内积分

$$\int_{G'}\psi^2(x,y,z)\mathrm{d}\tau\leqslant a^2\int_{G'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}\tau \tag{4.2.19b}$$

同样有

$$\int_{G'}\psi^2\mathrm{d}\tau\leqslant b^2\int_{G'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\mathrm{d}\tau;\int_{G'}\psi^2\mathrm{d}\tau\leqslant c^2\int_{G'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\mathrm{d}\tau \tag{4.2.19c}$$

于是

$$\int_{G'}\psi^2\mathrm{d}\tau\leqslant\frac{1}{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}\int_{G'}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau \tag{4.2.19d}$$

因在 $\partial G$ 和 $\partial G'$ 之间 $\psi=0$, 故

$$\int_G\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau\geqslant\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\int_G\psi^2\mathrm{d}\tau \tag{4.2.20a}$$

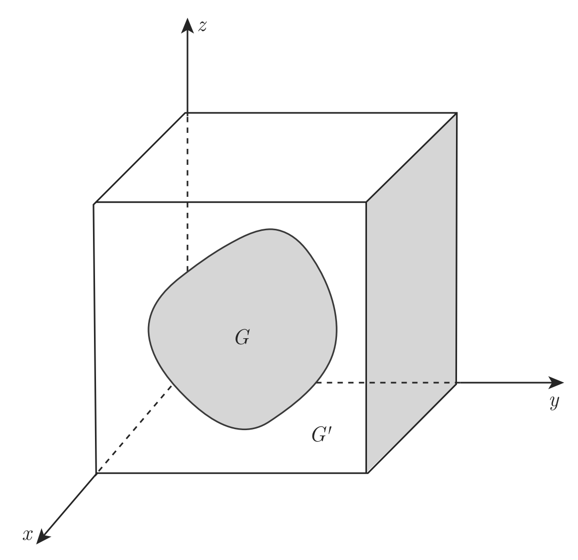



图 4.2.2 长方体区域 $G'$ 包含 $G$

另一方面, 设 $p(\boldsymbol{r})$ 和 $q(\boldsymbol{r})$ 的最小值分别为 $p_m>0$ 和 $q_m>0$, 则

$$\begin{aligned}(\psi,\boldsymbol{L}\psi)&=\int_G[p(\boldsymbol{r})(\nabla\psi)^2+q(\boldsymbol{r})\psi^2]\mathrm{d}\tau\\&\geqslant\int_G[p_m(\nabla\psi)^2+q_m\psi^2]\mathrm{d}\tau\\&\geqslant\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)p_m+q_m\right]\cdot\int_G\psi^2\mathrm{d}\tau=\gamma^2(\psi,\psi)\end{aligned}\tag{4.2.20b}$$

其中 $\gamma^2=p_m(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})+q_m>0$, 故 $\boldsymbol{L}$ 是正定算子. 对第二和三类边界条件, 因涉及到边界积分, 证明较复杂, 故略去.

### 4.2.3 Ritz 近似方法

在上二节中, 我们已把正定算子方程 $\boldsymbol{L}\psi=f$ 的求解问题, 化为在 Hilbert 空间 $H_0$ 内找一元素 $\psi$, 使泛函 $J(\psi)$

$$J(\psi)=D(\psi,\psi)-[(f,\psi)+(\psi,f)]\tag{4.2.21a}$$

取极小问题. Ritz 法求解泛函 $J(\psi)$ 的极小值问题的基本原理是, 设函数 $\psi$ 属于允许函数类且函数 $\psi$ 使泛函 $J(\psi)$ 达到极小值 $m$, 即

$$\min[J(\psi)]=m\tag{4.2.21b}$$

由于精确得到函数 $\psi$ 困难, 现在的问题是: 能否找到一个近似函数 $\tilde{\psi}$(属允许函数类), 使 $J(\tilde{\psi})$ 之值极为接近 $m$, 可以指望 $\tilde{\psi}$ 是精确解 $\psi$ 的很好近似. 进一步, 如果

我们能找到一个序列 $\{\tilde{\psi}_n\}$(属允许函数类), 并且有

$$\lim_{n\to\infty} J(\tilde{\psi}_n) = m \tag{4.2.21c}$$

则有理由相信序列 $\{\tilde{\psi}_n\}$ 在某种意义上收敛于精确解 $\psi$, 即

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\psi}_n = \psi \tag{4.2.21d}$$

为了求得近似解 $\tilde{\psi}$, Ritz 提出方法: 考虑依赖于参数 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的函数族

$$\psi = \Phi(\boldsymbol{r}, a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{4.2.22a}$$

对于任意系数 $\{a_i\}$, $\Phi$ 都属允许函数类. 我们在 $\Phi$ 中找出一组系数 $\{\bar{a}_i\}$ 使泛函 $J(\psi)$ 取极小值的函数 $\tilde{\psi} = \Phi(\boldsymbol{r}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_n)$, 则 $\tilde{\psi}$ 可视为我们所要求的近似值. 把式 (4.2.22a) 代入 $J(\psi)$ 积分, 可得函数 $J \equiv J(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 求函数 $J$ 的极小值得到方程组

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0, (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.2.22b}$$

于是可求得 $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_n)$. 在泛函 $J(\psi)$ 是二次泛函情况下, 函数 $J$ 与 $\{a_j\}$ 的关系是二次式, 则方程 (4.2.22b) 是线性方程组, 当 $n$ 不是很大时, 容易求解.

但存在的问题是, 在何种条件下 $\tilde{\psi}$ 确是精确解 $\psi$ 的较好近似? 为此, 考虑一系列函数族

$$\psi = \Phi_n(\boldsymbol{r}, a_1, a_2, \cdots, a_n), (n = 1, 2, \cdots) \tag{4.2.23a}$$

由于系数 $\{a_k\}$ 个数的增加, 每一族都比前一族来得大. 假定 $\tilde{\psi}_n$ 是第 $n$ 次近似, 即 $\tilde{\psi}_n$ 在 $\Phi_n$ 中给出 $J(\psi)$ 的最小值, 由于 $\Phi_{n+1}$ 包含 $\Phi_n$, 故有

$$J(\tilde{\psi}_n) \geqslant J(\tilde{\psi}_{n+1}) \tag{4.2.23b}$$

因此, 当 $n$ 增加, $J(\tilde{\psi}_n)$ 变小. 可以证明序列 $\{J(\tilde{\psi}_n)\}$ 趋于真正的极小

$$\lim_{n\to\infty} J(\tilde{\psi}_n) = \min[J(\psi)] = m \tag{4.2.23c}$$

的充分条件是: 对于任一个具有 $l$ 阶连续偏导且属于允许函数的函数 $\psi$ 以及正数 $\varepsilon > 0$, 可以找到这样的 $n$ 和式 (4.2.23a) 的第 $n$ 族函数

$$\psi^n = \Phi_n(\boldsymbol{r}, a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{4.2.24a}$$

使

$$|\psi^n - \psi| < \varepsilon; \left|\frac{\partial^k \psi^n}{\partial x^k} - \frac{\partial^k \psi}{\partial x^k}\right| < \varepsilon, (k = 1, 2, \cdots, l) \tag{4.2.24b}$$

其中 $x$ 表示 $\boldsymbol{r}$ 的三个分量, $l$ 是 $J(\psi)$ 中出现的最高阶偏导数. 上式的意义是, 对任意一个可取函数及其 $l$ 阶偏导数, 可以用给定的函数族中的函数任意精确地逼近. 在实际问题中, 总取函数族为完备函数系的线性组合.

设 $\boldsymbol{L}$ 是正定 (至少是正算子) 的 Hermite 对称算子, 在 $H_0$ 中取线性独立的完备系 $\{\psi_j^R\}$ (在模 $||\psi||^2=(\boldsymbol{L}\psi,\psi)$ 意义下的完备性), 并且 $\psi_j^R$ 本身也属于允许函数类 (即满足可微和边界条件), 则 $\psi$ 的第 $n$ 级近似为

$$\psi^n=\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j^R \tag{4.2.25a}$$

其中 $a_j$ 为待定常数. 上式代入式 (4.2.21a) 的二次泛函, 并设 $a_j$ 取实数 (否则可把复指数归入 $\psi_j^R$) 则得

$$J(\psi^n)=\sum_{j,k=1}^{n}a_ja_kD(\psi_j^R,\psi_k^R)-\sum_{j=1}^{n}a_j[(f,\psi_j^R)+(\psi_j^R,f)] \tag{4.2.25b}$$

$J(\psi^n)$ 极小的条件是

$$\frac{\partial J(\psi^n)}{\partial a_j}=0,\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.2.25c}$$

于是, 由式 (4.2.25b) 得到决定系数 $a_k$ 的方程

$$\sum_{k=1}^{n}a_kD(\psi_k^R,\psi_j^R)=\frac{1}{2}[(f,\psi_j^R)+(\psi_j^R,f)],(j=1,2,\cdots,n) \tag{4.2.25d}$$

其中利用了算子 $\boldsymbol{L}$ 的 Hermite 对称性 $D(\psi_k^R,\psi_j^R)=D(\psi_j^R,\psi_k^R)$. 于是可以求得系数 $a_k$. 下面来证明上式解的唯一性. 为此只要证明齐次方程只有零解. 用反证法, 假定存在非零解 $\{\bar{a}_k\}$ 满足齐次方程

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_kD(\psi_k^R,\psi_j^R)=0,\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.2.26a}$$

用 $\bar{a}_j$ 乘上式并且对 $j$ 求和 (即把所有方程相加) 有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\bar{a}_k\bar{a}_jD(\psi_k^R,\psi_j^R)=0 \tag{4.2.26b}$$

由于 $D(\psi_k^R,\psi_j^R)$ 是双线性的, 故上式可以改写成

$$D\left(\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_k\psi_k^R,\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_j\psi_j^R\right)=0 \tag{4.2.26c}$$

而 $\boldsymbol{L}$ 是正算子, 故

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_j\psi_j^R=0 \tag{4.2.26d}$$

即 $\psi_1^R,\psi_2^R,\cdots,\psi_n^R$ 线性相关, 而我们假定 $\{\psi_i^R\}$ 线性独立, 因此只有 $\bar{a}_i=0$. 于是, (4.2.25d) 只有唯一解.

**例 4.2.10** 考虑一维边值问题

$$\begin{aligned}&-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}=\cos x, x\in(0,\pi)\\&\psi(x)|_{x=0}=\psi(x)|_{x=\pi}=0\end{aligned} \tag{4.2.27a}$$

上式可严格求解, 不难求得

$$\psi(x)=\cos x+\frac{2x}{\pi}-1 \tag{4.2.27b}$$

取满足边界条件的完备系 $\{\psi_j^R\}$

$$\psi_j^R(x)=\sin 2jx,(j=1,2,\cdots) \tag{4.2.27c}$$

上式中只取 $\sin 2jx$, 而不取奇数周期函数 $\sin(2j+1)x$ 是因为考虑到方程 (4.2.27a) 关于 $\pi/2$ 对称. 首先求 $(\boldsymbol{L}\psi_j^R,\psi_k^R)$

$$(\boldsymbol{L}\psi_j^R,\psi_k^R)=4\int_0^{\pi}j^2\sin 2jx\sin 2kx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & k\neq j\\ 2\pi j^2, & k=j\end{cases} \tag{4.2.28a}$$

而

$$\begin{aligned}(f,\psi_j^R)=(\psi_j^R,f)=&\int_0^{\pi}\cos x\sin 2jx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2j-1)x\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2j+1)x\mathrm{d}x=\frac{4j}{4j^2-1}\end{aligned} \tag{4.2.28b}$$

由式 (4.2.28a) 知, 方程 (4.2.25d) 只有对角元素, 很容易求得

$$a_j=\frac{(f,\psi_j^R)}{(\boldsymbol{L}\psi_j^R,\psi_j^R)}=\frac{2}{\pi j(4j^2-1)} \tag{4.2.29a}$$

于是第 $n$ 次近似解为

$$\psi^n=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin 2jx}{j(4j^2-1)} \tag{4.2.29b}$$

事实上, 容易证明当 $n\to\infty$ 时, 上式右边是式 (4.2.27b) 的 Fourier 级数

$$\psi=\lim_{n\to\infty}\psi^n=\cos x+\frac{2x}{\pi}-1 \tag{4.2.29c}$$

得到上述结果并不是凑巧, 这是因为选取的完备系 $\{\psi_j^R\}$ 中的元素 $\sin 2jx$ 恰好是算子 $\boldsymbol{L}$ 在方程 (4.2.27a) 中边界条件下的本征函数, 因此式 (4.2.25a) 相当于作本征函数展开. 事实上, 当 $\{\psi_j^R\}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数时 (不一定归一化), 方程 (4.2.25d) 可简化成

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k \delta_{jk}(\psi_k^R, \psi_j^R) = \frac{1}{2}[(f, \psi_j^R) + (\psi_j^R, f)] \tag{4.2.30a}$$

故

$$a_k = \frac{1}{2\lambda_k(\psi_k^R, \psi_k^R)}[(f, \psi_k^R) + (\psi_k^R, f)] \tag{4.2.30b}$$

如果 $(f, \psi_k^R) = (\psi_k^R, f)$ 则

$$a_k = \frac{1}{\lambda_k(\psi_k^R, \psi_k^R)}(f, \psi_k^R) \tag{4.2.30c}$$

于是

$$\psi^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k(\psi_k^R, \psi_k^R)}(f, \psi_k^R) \tag{4.2.30d}$$

当 $n \to \infty$ 时, 上式相当于作本征函数展开, 故有 $\psi = \lim\limits_{n\to\infty} \psi^n$.

**例 4.2.11** 考虑 Poisson 方程边值问题

$$-\nabla^2 \psi(x, y) = 1, (x, y) \in G; \psi|_{\partial G} = 0 \tag{4.2.31a}$$

其中 $G$ 为矩形区域 $(-a \leqslant x \leqslant a; -b \leqslant y \leqslant b)$. 考虑到问题的对称性, 取 $x$ 和 $y$ 的偶函数, 令 (为了方便, 忽略上标 “$R$”)

$$w(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \tag{4.2.31b}$$

取

$$\begin{aligned} &\psi_1(x, y) = w(x, y); && \psi_2(x, y) = w(x, y) \cdot x^2 \\ &\psi_3(x, y) = w(x, y) \cdot y^2; && \psi_4(x, y) = w(x, y) \cdot x^4 \\ &\psi_5(x, y) = w(x, y) \cdot x^2 y^2; && \psi_6(x, y) = w(x, y) \cdot y^4 \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4.2.31c}$$

当取 $n = 1$

$$\begin{aligned} (\psi_1, \boldsymbol{L}\psi_1) &= \iint_G (w_x^2 + w_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[x^2(b^2 - y^2)^2 + y^2(b^2 - x^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{128}{45}a^3 b^3 (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$(\psi_1, f) = (f, \psi_1) = \iint_G w(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{16}{9}a^3 b^3$$

由 $a_1(\psi_1, \boldsymbol{L}\psi_1) = (\psi_1, f)$ 得到

$$a_1 = \frac{5}{8(a^2+b^2)} \tag{4.2.32a}$$

故一级近似解为

$$\psi^1(x,y) \approx \frac{5}{8} \cdot \frac{(a^2-x^2)(b^2-y^2)}{a^2+b^2} \tag{4.2.32b}$$

由于问题的对称性取 $n=3$, 即

$$\psi^3(x,y) \approx a_1\psi_1(x,y) + a_2\psi_2(x,y) + a_3\psi_3(x,y) \tag{4.2.33a}$$

于是可求得九个系数 $D(\psi_k,\psi_j),(k,j=1,2,3)$ 和三个非齐次项 $(\psi_k,f),(k=1,2,3)$, 得到三个系数 $a_i,(i=1,2,3)$ 满足的线性方程组

$$\begin{bmatrix} D(\psi_1,\psi_1) & D(\psi_1,\psi_2) & D(\psi_1,\psi_3) \\ D(\psi_2,\psi_1) & D(\psi_2,\psi_2) & D(\psi_2,\psi_3) \\ D(\psi_3,\psi_1) & D(\psi_3,\psi_2) & D(\psi_3,\psi_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\psi_1) \\ (f,\psi_2) \\ (f,\psi_3) \end{bmatrix} \tag{4.2.33b}$$

由上式就能得到三个系数 $a_i$, $(i=1,2,3)$ 和三次近似解.

另一方面, 设方程 (4.2.31a) 的严格解为

$$\psi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{b} \tag{4.2.34a}$$

代入方程 (4.5.31a) 的第一式得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}^2 A_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{b^2}A_n(x)\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{b} = -1 \tag{4.2.34b}$$

显然 $A_n(x)$ 满足方程和边界条件为

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2 A_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{b^2}A_n(x) = -\frac{2(-1)^n}{(n+1/2)\pi} \\ A_n(x)|_{x=-a} = A_n(x)|_{x=a} = 0\end{gathered} \tag{4.2.34c}$$

上式的解为

$$\psi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2b^2(-1)^n}{\pi^3(n+1/2)^3}\left[1-\frac{\cosh\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{b}}{\cosh\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi a}{b}}\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{b} \tag{4.2.34d}$$

图 4.2.3 给出了直线 $y=0$ 上, 一次近似和精确解的比较.

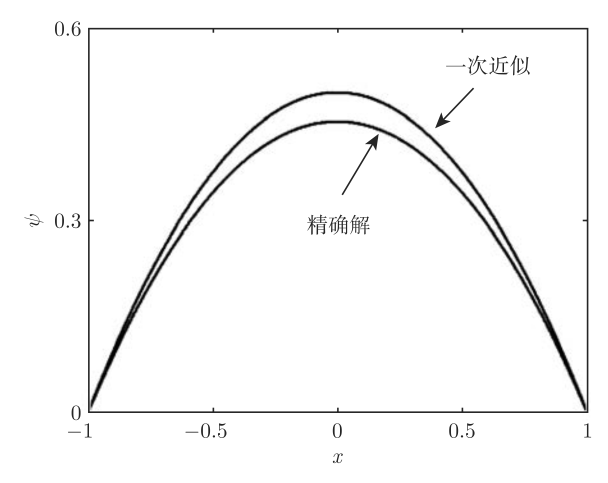



图 4.2.3 直线 $y=0$ 上, 一次近似与精确解的比较

### 4.2.4 Galerkin 法和非齐次边界问题

Ritz 法的最大缺点是要求 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称且正定的算子, 但 Galerkin 法无此限制. 取任一属于允许函数类中的完备系: $\{\psi_i^G\}$ (这时完备性仅要求在模 $(\psi,\psi)=||\psi||^2$ 的意义下之完备性-与 Ritz 法之区别)

$$\psi^n=\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k^G \tag{4.2.35a}$$

代入方程 (4.2.12) 得到

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(\boldsymbol{L}\psi_k^G,v)=(f,v) \tag{4.2.35b}$$

其中 $v$ 是允许函数类的任意函数. 为求系数 $a_k$, 取 $v_i=\psi_i^G$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(\boldsymbol{L}\psi_k^G,\psi_j^G)=(f,\psi_j^G),(j=1,2,\cdots,n) \tag{4.2.35c}$$

从而可以求得展开系数 $a_k$. 这种求方程 $\boldsymbol{L}\psi=f$ 的近似解的方法称为 **Galerkin 法**. 必须指出: 上式与式 (4.2.25d) 在 $(f,\psi_j^R)=(\psi_j^R,f)$ 下有相同的形式, 但有本质的差别：式 (4.2.25a) 中的完备系是在模 $||\psi||^2=(\psi,\boldsymbol{L}\psi)$(要求 $\boldsymbol{L}$ 是正的 Hermite 对称算子) 意义下的完备性, 即对任一属于 $H_0$ 空间中的元素 $\psi$, 总能展成 $\{\psi_i^R\}$ 的广义 Fourier 级数, 在下述意义下收敛

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\psi-\sum_{k=1}^{n}a_i\psi_i^R\right\|_{\boldsymbol{L}}^2=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\psi-\sum_{k=1}^{n}a_i\psi_i^R\right),\boldsymbol{L}\left(\psi-\sum_{k=1}^{n}a_i\psi_i^R\right)\right]=0$$

而式 (4.2.35a) 中的完备系 $\{\psi_i^G\}$ 的完备性指: 任一属于允许类中元素 $\psi$ 总能展成 $\{\psi_i^G\}$ 的广义 Fourier 级数, 且在下述意义下收敛

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\psi-\sum_{i=1}^{n}a_k\psi_k^G\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\psi-\sum_{k=1}^{n}a_i\psi_i^G\right),\left(\psi-\sum_{k=1}^{n}a_i\psi_i^G\right)\right]=0$$

但对 Hermite 对称的正定算子的边值问题, Ritz 法和 Galerkin 法能给出同样的结果. 因此通称为 **Ritz-Galerkin 法**.

**基函数** 显然, 基函数的选择对解的近似程度是十分重要的, 选择好的基函数, 级数收敛很快, 甚至只要取第一次近似就能得到好的结果 (见例 4.2.11). 式 (4.2.25a) 和 (4.2.35a) 中的基函数覆盖整个区域 $G$, 称为**全域基函数**, 它适合简单、规则形的边界, 优点是收敛速度快. 另一类基函数为**子域基函数**, 定义在区域 $G$ 的一部分, 而另外一部分为零, 显然它适合数值计算 (见 4.4 讨论). 以第一类边值问题为例, 常见的全域基函数: (1) 一维 $x\in(0,l)$, $\psi(0)=\psi(l)=0$ 则可取 $\{\psi_i\}$

$$\sin\frac{\pi}{l},\sin\frac{2\pi}{l}x,\cdots,\sin\frac{n\pi}{l}x,\cdots \tag{4.2.36a}$$

或者取幂次函数

$$x(x-l),x^2(x-l),x^2(x-l)^2,\cdots \tag{4.2.36b}$$

(2) 二维或三维, 设边界面 (或线) 满足方程 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$, 可取 $\{\psi_i\}$

$$xg,x^2g,yg,y^2g,\cdots \tag{4.2.36c}$$

**例 4.2.12**　区域 $G$ 为一矩形域: $[0\leqslant x\leqslant a;0\leqslant y\leqslant b]$, 可取 $\{\psi_i\}$

$$x(a^2-x^2)(b^2-y^2),x^2(a^2-x^2)(b^2-y^2),y(a^2-x^2)(b^2-y^2),\cdots \tag{4.2.37a}$$

**例 4.2.13**　区域 $G$ 为椭圆内部: $x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1$, 则 $\{\psi_i\}$ 可选为

$$x\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),\quad y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),\cdots \tag{4.2.37b}$$

如区域 $G$ 为 1/4 椭圆内部:$x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 则 $\{\psi_i\}$ 可取

$$xy\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),xy^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2,\cdots \tag{4.2.37c}$$

全域基函数的优点是收敛快, 但选择困难, 且涉及到大量的积分运算, 计算量大, 不适合求解复杂边界的问题.

**非齐次边界问题** 我们主要讨论了 Ritz 法和 Galerkin 法在齐次边界问题中的应用, 对非齐次边界问题

$$\boldsymbol{L}u = f, \boldsymbol{r} \in G; \boldsymbol{B}u = g, \boldsymbol{r} \in \partial G \tag{4.2.38a}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是边界算子, 一般我们先对边界条件进行齐次化处理, 化为齐次问题. 如果找到函数 $u_0$ 使 $\boldsymbol{B}(u_0) = g$, 可令 $v = u - u_0$

$$\boldsymbol{L}v = f - \boldsymbol{L}u_0, \quad \boldsymbol{r} \in G; \quad \boldsymbol{B}v = 0, \boldsymbol{r} \in \partial G \tag{4.2.38b}$$

这样基函数的选择就比较简单了 (注意：在有限元近似中, 没有这个要求).

**例 4.2.14** 在 $x \in (1,2)$ 中求 Bessel 方程的边值问题解

$$\begin{gathered} x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2-1)y = 0, x \in (1,2) \\ y|_{x=1} = 1; y|_{x=2} = 2 \end{gathered} \tag{4.2.39a}$$

利用变换 $y = z + x$, 上式变成齐次问题

$$\begin{gathered} x^2\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (x^2-1)z + x^3 = 0, x \in (1,2) \\ z|_{x=1} = z|_{x=2} = 0 \end{gathered} \tag{4.2.39b}$$

把方程转化成 S-L 形式

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{1-x^2}{x}z = x^2 \tag{4.2.39c}$$

故

$$\boldsymbol{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{1-x^2}{x}; f(x) = x^2 \tag{4.2.39d}$$

显然 $q(x) = (1-x^2)/x$. 在区域 $x \in (1,2)$ 中 $q(x) \leqslant 0$, 故 $\boldsymbol{L}$ 不是正算子, Ritz 法不能应用. 而 Galerkin 方法不受限制. 取 $\psi_1^G(x) = (x-1)(2-x)$, 并且令 $z(x) \approx a_1\psi_1^G(x)$, 则 $a_1$ 满足

$$a_1 = \frac{(f, \psi_1^G)}{(\boldsymbol{L}\psi_1^G, \psi_1^G)} \approx 0.8110 \tag{4.2.40a}$$

于是第一次近似解为

$$y_1(x) = 0.8110(x-1)(2-x) + x \tag{4.2.40b}$$

另一方面, 方程 (4.2.39a) 是一阶 Bessel 方程, 故通解为

$$y(x) = AJ_1(x) + BN_1(x) \tag{4.2.41a}$$

由边界条件得到

$$A = \frac{N_1(2) - 2N_1(1)}{J_1(1)N_1(2) - N_1(1)J_1(2)} \approx 3.6074$$
$$B = \frac{2J_1(1) - J_1(2)}{J_1(1)N_1(2) - N_1(1)J_1(2)} \approx 0.7520 \tag{4.2.41b}$$

的精确解为

$$y(x) = 3.6072J_1(x) + 0.7520N_1(x) \tag{4.2.41c}$$

比较式 (4.2.41b) 和 (4.2.41c), 两者十分接近, 相对误差在 $10^{-3}$ 以内, 故第一次近似就得到很好的结果.

**例 4.2.15**　考虑非齐次两点边值问题

$$\boldsymbol{L}u \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + qu = f, x \in (a, b)$$
$$u(a) = \alpha; \left.\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b} = \beta \tag{4.2.42a}$$

为了使边界条件齐次化, 取

$$u_0(x) = \alpha + \frac{\beta(x-a)^2}{2(b-a)} \tag{4.2.42b}$$

令 $v = u - u_0$, 于是上述非齐次两点边值问题化为求齐次两点边值问题

$$\boldsymbol{L}v = f - \boldsymbol{L}u_0 \equiv f_1, x \in (a, b)$$
$$v(a) = 0; \left.\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b} = 0 \tag{4.2.43a}$$

即求下列泛函的极小

$$J(v) = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q(x)v^2\right]\mathrm{d}x - 2(f_1, v)$$
$$\equiv A(v, v) - 2(f - \boldsymbol{L}u_0, v) \tag{4.2.43b}$$

其中双线性积分定义为

$$A(\chi, \psi) = \int_a^b \left[p(x)\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + q(x)\chi\psi\right]\mathrm{d}x = A(\psi, \chi) \tag{4.2.43c}$$

事实上

$$\delta J(v) = 2\int_a^b \left[p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\delta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + q(x)v\delta v\right]\mathrm{d}x - 2\int_a^b f_1 \delta v \mathrm{d}x \tag{4.2.44a}$$

利用分部积分

$$\int_a^b p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\delta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\left[p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\delta v\right]\Big|_a^b-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right]\delta v\mathrm{d}x \tag{4.2.44b}$$

即

$$\begin{aligned}\delta J(v)=&2\left[p(b)\frac{\mathrm{d}v(b)}{\mathrm{d}x}\delta v(b)-p(a)\frac{\mathrm{d}v(a)}{\mathrm{d}x}\delta v(a)\right]\\&+2\int_a^b\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)v-f_1\right\}\delta v\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.2.44c}$$

在端点 $x=a$, 要求 $\delta v(a)=0$, 而在端点 $x=b$, 给出自然边界条件 $v'(b)=0$. 所以两个边界条件意义不同: $v(a)=0$ 要求在泛函极小过程中必须满足, 而 $v'(b)=0$ 是泛函 $J(v)$ 极小的自然边界条件. 把 $v=u-u_0$ 代入

$$\begin{aligned}J(v)&=A(v,v)-2(f-\boldsymbol{L}u_0,v)\\&=A[(u-u_0),(u-u_0)]-2(f-\boldsymbol{L}u_0,v)\\&=A(u,u)+A(u_0,u_0)-2A(u,u_0)-2(f,v)+2\int_a^b v\boldsymbol{L}u_0\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.2.45a}$$

不难证明上式中最后一项积分为

$$\int_a^b v\boldsymbol{L}u_0\mathrm{d}x=A(u_0,v)-\beta p(b)v(b) \tag{4.2.45b}$$

代入式 (4.2.45a)

$$\begin{aligned}J(v)=A(u,u)+A(u_0,u_0)-2A(u,u_0)-2(f,v)+2A(u_0,v)\\-2\beta p(b)v(b)\equiv J_1(u)-J_2(u_0)\end{aligned} \tag{4.2.45c}$$

其中

$$\begin{aligned}J_1(u)\equiv[A(u,u)-2(f,v)-\beta p(b)u(b)]\\J_2(u_0)\equiv A(u_0,u_0)-2(f,u_0)-2\beta p(b)u_0(b)]\end{aligned} \tag{4.2.45d}$$

显然 $J_2(u_0)$ 是常数, 因此 $J(v)$ 的极小即为 $J_1(u)$ 极小. 可见自然边界条件在求极小时能自动给出, 但 $u(a)=\alpha$ 不出现在泛函中, 必须强制满足, 为**本质边界条件**. 设近似解为

$$u^n(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^n a_i\psi_i(x) \tag{4.2.46a}$$

其中 $\psi_i(a)=0$ 以及 $u_0(a)=\alpha$, 上式代入 $J_1(u)$ 并求极小, 通过与得到式 (4.2.25d) 类似过程, 得到决定 $a_i$ 的代数方程

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{L}\psi_i,\psi_k)=(f,\psi_k)+\beta p(b)\psi_k(b)\\-(\boldsymbol{L}u_0,\psi_k),(k=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{4.2.46b}$$

### 4.2.5 基于 Galerkin 法的时域问题

由于 Galerkin 法对算子没有对称性和正定性要求, 容易推广到时域问题. 考虑含时齐次边值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{K}\psi(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{r}\in G\\ \left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\partial G}=0\end{gathered}\tag{4.2.47a}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 是时间微分算子 $\boldsymbol{K}=\partial/\partial t$(对热传导方程) 或 $\boldsymbol{K}=\partial^2/\partial t^2$(对波动方程). 方程 (4.2.47a) 的第一式二边乘任意允许类函数 $v(\boldsymbol{r})$ 且在区域积分得到

$$\int_G v(\boldsymbol{r})\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{K}\int_G v(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau=\int_G v(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau\tag{4.2.47b}$$

取基函数展开的近似解为

$$\psi^n(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k=1}^n a_k(t)\psi_k^G(\boldsymbol{r})\tag{4.2.47c}$$

代入方程 (4.2 47b) 得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n\left[\boldsymbol{K}a_k(t)\int_G v(\boldsymbol{r})\psi_k^G(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau+a_k(t)\int_G v(\boldsymbol{r})\boldsymbol{L}\psi_k^G(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\right]\\&\qquad=\int_G v(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{4.2.47d}$$

另一方面, 任意允许类函数 $v(\boldsymbol{r})$ 也用基函数展开

$$v(\boldsymbol{r})=\sum_{i=1}^n v_i\psi_i^G(\boldsymbol{r})\tag{4.2.28a}$$

代入方程 (4.2.47d) 得到

$$\sum_{i=1}^n\left\{\sum_{k=1}^n[\beta_{ik}\boldsymbol{K}a_k(t)+\chi_{ik}a_k(t)]\right\}v_i=\sum_{i=1}^n v_if_i\tag{4.2.48b}$$

其中

$$\begin{gathered}\chi_{ik}\equiv(\psi_i^G,\boldsymbol{L}\psi_k^G)=\int_G\psi_i^G(\boldsymbol{r})\boldsymbol{L}\psi_k^G(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\\ \beta_{ik}\equiv(\psi_i^G,\psi_k^G)=\int_G\psi_i^G(\boldsymbol{r})\psi_k^G(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\\ f_i\equiv(\psi_i^G,f)=\int_G\psi_i^G(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau\end{gathered}\tag{4.2.48c}$$

由 $v_i, (i=1,2,\cdots,n)$ 的任意性, 得到决定 $a_k(t)$ 满足的常微分方程组

$$\sum_{k=1}^{n}[\beta_{ik}\boldsymbol{K}a_k(t)+\chi_{ik}a_k(t)]=f_i, (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.2.49a}$$

上式中 $a_k(t)$ 的初始条件可以由方程 (4.2.47c) 得到.

(1) 对 $\boldsymbol{K}=\partial/\partial t$ 的情况, 给定初始分布 $\psi(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\psi_0(\boldsymbol{r})$

$$\psi^n(\boldsymbol{r},0)=\sum_{k=1}^{n}a_k(0)\psi_k^G(\boldsymbol{r})=\psi(\boldsymbol{r},0) \tag{4.2.49b}$$

二边用 $\psi_i^G(\boldsymbol{r}), (i=1,2,\cdots,n)$ 求内积

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}a_k(0)=\int_G\psi_0(\boldsymbol{r})\psi_i^G(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.2.49c}$$

故原则上可以解出 $a_k(0)$;

(2) 对 $\boldsymbol{K}=\partial^2/\partial t^2$ 的情况, 给定初始分布 $\psi|_{t=0}=\psi_0(\boldsymbol{r})$ 和 $\partial\psi/\partial t|_{t=0}=\psi_1(\boldsymbol{r})$. 通过类似的过程, 可以得到决定 $a_k(0)$ 和 $\dot{a}_k(0)$ 的线性代数方程组.

## 4.3 变分法在本征值问题中的应用

变分法求解本征值问题的基本原理与边值问题类似: 把一个微分方程的本征值问题与一个泛函的极值问题等价起来, 使原来的方程是这个泛函的 Euler 方程, 然后用 Ritz 法直接求解变分问题. 当然, 也可以直接用 Galerkin 方法求本征值问题的解.

### 4.3.1 本征值问题与变分问题的等价

设 $\boldsymbol{L}$ 是作用在 Hilbert 空间上的 Hermite 对称算子, 即有

$$(\boldsymbol{L}\psi_1,\psi_2)=(\psi_1,\boldsymbol{L}\psi_2) \tag{4.3.1a}$$

或者

$$\int_G(\boldsymbol{L}\psi_1)^*\psi_2\mathrm{d}\tau=\int_G\psi_1^*(\boldsymbol{L}\psi_2)\mathrm{d}\tau \tag{4.3.1b}$$

下面寻找一个泛函 $\lambda(\psi)$, 它的极值问题的 Euler 方程恰好是本征方程

$$\boldsymbol{L}\psi=\lambda\rho\psi \tag{4.3.1c}$$

为此上式两边乘 $\psi^*$ 并积分, 定义泛函 $\lambda(\psi)$

$$\lambda(\psi)=\frac{\displaystyle\int_G \psi^*\boldsymbol{L}\psi\mathrm{d}\tau}{\displaystyle\int_G \rho\psi^*\psi\mathrm{d}\tau}=\frac{(\psi,\boldsymbol{L}\psi)}{(\psi,\psi)} \tag{4.3.2a}$$

为了方便, 设 $A$ 和 $B$ 分别为

$$A\equiv\int_G \psi^*\boldsymbol{L}\psi\mathrm{d}\tau; B\equiv\int_G \rho\psi^*\psi\mathrm{d}\tau \tag{4.3.2b}$$

则 $\lambda(\psi)=A/B$. 考虑泛函 $\lambda(\psi)$ 的极值问题: $\lambda(\psi)$ 的一阶变分为

$$\delta\lambda(\psi)=\frac{1}{B^2}(B\delta A-A\delta B)=\frac{1}{B}(\delta A-\lambda\delta B) \tag{4.3.2c}$$

因为

$$\begin{gathered}\delta A=\int_G \psi^*\boldsymbol{L}\delta\psi d\tau+\int_G(\delta\psi)^*\boldsymbol{L}\psi\mathrm{d}\tau\\ \delta B=\int_G\rho(\psi^*\delta\psi+\psi\delta\psi^*)\mathrm{d}\tau\end{gathered} \tag{4.3.2d}$$

代入式 (4.3.2c) 得到

$$\delta\lambda(\psi)=\frac{1}{B}\left[\int_G\delta\psi^*(\boldsymbol{L}-\lambda\rho)\psi\mathrm{d}\tau+\int_G\psi^*(\boldsymbol{L}-\lambda\rho)\delta\psi\mathrm{d}\tau\right] \tag{4.3.3a}$$

利用 $\boldsymbol{L}$ 的 Hermite 对称性, 上式第二项变成

$$\int_G\psi^*(\boldsymbol{L}-\lambda\rho)\delta\psi\mathrm{d}\tau=\int_G\delta\psi[(\boldsymbol{L}-\lambda\rho)\psi]^*\mathrm{d}\tau=\left[\int_G\delta\psi^*(\boldsymbol{L}-\lambda\rho)\psi\mathrm{d}\tau\right]^*$$

于是

$$\delta\lambda(\psi)=\frac{2}{B}\mathrm{Re}\left[\int_G(\boldsymbol{L}-\lambda\rho)\psi\delta\psi^*\mathrm{d}\tau\right] \tag{4.3.3b}$$

因 $\delta\psi^*$ 是独立变分, 可得到泛函 $\lambda(\psi)$ 取极值时满足的 Euler 方程, 即为方程 (4.3.1c), 故泛函 $\lambda(\psi)$ 的 Euler 方程为本征值方程.

从式 (4.3.3b) 可以得到定理: 如果函数 $\psi$ 满足本征方程 $\boldsymbol{L}\psi=\lambda\rho\psi$, 则对任意的变分 $\delta\psi$, 必定有

$$\delta\lambda(\psi)=0 \tag{4.3.4a}$$

反之, 如果函数 $\psi$ 满足 $\delta\lambda(\psi)=0$, 它必是本征方程 $\boldsymbol{L}\psi=\lambda\rho\psi$ 的解.

结论的正面是显然的, 因为由本征方程 $\boldsymbol{L}\psi=\lambda\rho\psi$ 和式 (4.3.3b) 直接可推出 $\delta\lambda(\psi)=0$; 反之, 如果函数 $\psi$ 满足式 (4.3.3b), 但不满足本征方程 $\boldsymbol{L}\psi=\lambda\rho\psi$, 即

$$(\boldsymbol{L}-\lambda\rho)\psi=\chi\neq0 \tag{4.3.4b}$$

这时可取 $\delta\psi=\varepsilon\chi$, 而 $\varepsilon$ 足够小, 使 $\varepsilon\chi$ 是函数 $\psi$ 的邻域且 $\varepsilon>0$, 代入式 (4.3.3b)

$$\delta\lambda(\psi)=\frac{2\varepsilon}{B}\int_G|\chi|^2\mathrm{d}\tau\geqslant 0 \tag{4.3.4c}$$

因此, 只有当 $\chi\equiv 0$(几乎处处) 时才有 $\delta\lambda(\psi)=0$, 故当 $\delta\lambda(\psi)=0$ 时必有 $(\boldsymbol{L}-\lambda\rho)\psi=0$. 这样就把本征值问题与求 $\lambda(\psi)$ 的极值问题等价起来了. 如果我们用其他方法, 如 Ritz 法, 求得 $\lambda(\psi)$ 的极值问题的解, 也就求得了本征值问题的解.

设 $\boldsymbol{L}$ 的本征值依大小排列成 (假定 $\lambda_1$ 有限)

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\cdots \tag{4.3.5a}$$

相应的本征函数为

$$\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n,\cdots \tag{4.3.5b}$$

可以证明定理: (1) 泛函 $\lambda(\psi)$ 的最小值 (注意与极小值之区别) 等于 $\lambda_1$, 这里函数 $\psi$ 为属于允许函数类中的任意函数; (2) 当泛函 $\lambda(\psi)$ 在 $\psi=\psi_1$ 处达到它的最小值 $\lambda_1$ 时, 即为对应于 $\lambda_1$ 的本征函数. 所谓允许函数类中的函数是指 $\psi$ 必须具有方程 $\boldsymbol{L}\psi=\lambda\rho\psi$ 中出现的各阶连续导数, 并且满足相应的齐次边界条件.

此定理的证明可直接用上面得到的结论: 事实上, 由于 $\psi_j$ 是使泛函 $\lambda(\psi)$ 达到极值 (极小值) 的函数

$$\delta\lambda(\psi)|_{\psi=\psi_j}=0 \tag{4.3.5c}$$

即本征值是泛函 $\lambda(\psi)$ 的极小值, 又 $\lambda_1$ 是 $\lambda_j$ 中最小者, 因此 $\lambda_1$ 是最小值

$$\lambda_1=\min[\lambda(\psi)] \tag{4.3.5d}$$

并且当 $\psi=\psi_1$ 时泛函 $\lambda(\psi)$ 取得最小值 $\lambda_1$.

进一步, 可以得到结论:

(1) 在正交于 $\psi_1$ 的所有函数 $\psi$ 中 ($\psi$ 属于允许函数类中函数), 泛函 $\lambda(\psi)$ 的最小值为 $\lambda_2$, 且使泛函 $\lambda(\psi)$ 取得最小值 $\lambda_2$ 的函数 $\psi$ 即为本征函数 $\psi_2$;

(2) 一般定义在正交于 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1})$ 所构成的子空间的函数 $\psi$ 上, 泛函 $\lambda(\psi)$ 取最小值为 $\lambda_n$, 而达到最小值的函数 $\psi$ 即为本征函数 $\psi_n$.

也可以利用式 (4.3.2a) 来估计最小本征值的大小. 一般步骤为: 根据具体的物理问题, 选择包含有参数 $a$ (可以是一组参数) 的适当试探函数 $\psi(\boldsymbol{r},a)$, 代入方程 (4.3.2a), 求得 $\lambda(a)$, 然后求 $\lambda(a)$ 的极小值. 这个极小值就可以认为是最小本征值的估计. 可以证明 (见例 4.3.3), 由此方法求得的最小本征值估计不小于真正的最小本征值.

**例 4.3.1**　考虑简单的一维情形, 在端点满足第一类齐次边界条件

$$-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}=\lambda\psi, x\in(0,l)$$
$$\psi|_{x=0}=\psi|_{x=l}=0 \tag{4.3.6a}$$

上式严格解为

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x;\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2} \tag{4.3.6b}$$

最小本征值为 $\lambda_1=\pi^2/l^2\approx 9.8696/l^2$. 另一方面, 根据前面的讨论, 泛函

$$\lambda(\psi)=\frac{1}{\displaystyle\int_0^l \psi^*\psi\mathrm{d}x}\left(-\int_0^l \psi^*\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x\right) \tag{4.3.6c}$$

的极小值为 $\lambda_1\approx 9.8696/l^2$, 对任一允许类函数 $\psi$ 应有 $\lambda(\psi)\geqslant\lambda_1$, 取函数 $\psi$ 如下

$$\psi(x)=x(l-x) \tag{4.3.7a}$$

显然函数 $\psi(x)$ 具有连续的二阶导数, 且在端点 $x=0$ 和 $x=l$ 上 $\psi\equiv 0$, 上式代入 (4.3.6c) 得到

$$\lambda(\psi)=\frac{2\displaystyle\int_0^l x(l-x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l x^2(l-x)^2\mathrm{d}x}=\frac{10}{l^2}>\lambda_1 \tag{4.3.7b}$$

如果把 $\lambda=10/l^2$ 作为 $\lambda_1$ 的近似值, 相对误差为 $(\lambda-\lambda_1)/\lambda_1\approx 1.4\%$, 这是一个很好的近似. 函数 $\psi(x)=x(l-x)$ 的模为 $||\psi||=\sqrt{l^5/30}$, 故第一个本征函数近似为 $\psi_1(x)\approx\sqrt{30/l^5}\cdot x(l-x)$. 图 4.3.1 给出了第一个本征函数的比较 (图中取 $l=1$).

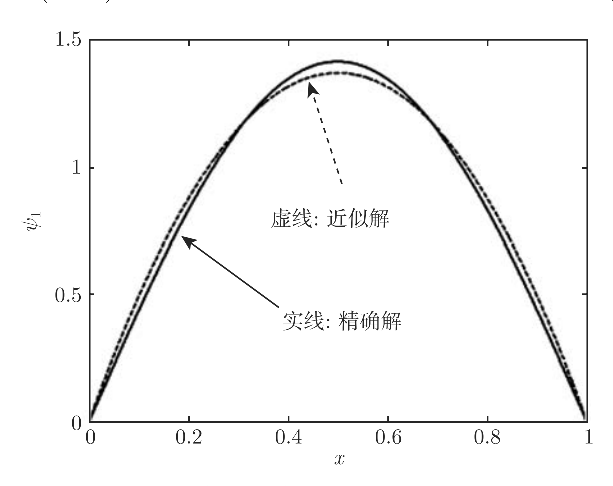



图 4.3.1　第一个本征函数 $\psi_1(x)$ 的比较

**例 4.3.2** 用变分法估计例 2.3.3 中微观粒子振动的基态能量和波函数. 考虑到问题的区域为 $x \in (-\infty, +\infty)$, 当 $x \to \pm\infty$ 时, $\psi(x) \to 0$, 故取试探函数为

$$\psi_0(x) = C\exp(-ax^2) \tag{4.3.8a}$$

其中 $a$ 为变分参数. 由方程 (2.3.60a) 二边乘 $\psi(x)$ 并积分得到

$$E(\psi) = \frac{1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2(x)\mathrm{d}x}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m\omega^2\int_{-\infty}^{\infty}x^2\psi^2(x)dx\right]$$

把式 (4.3.8a) 代入上式得到

$$E(\psi) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2\exp(-2ax^2)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2ax^2)\mathrm{d}x}\left[\frac{\hbar^2}{2m}(2a)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\right] \tag{4.3.8b}$$

完成积分后得到

$$E(\psi) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\hbar^2}{m}a + \frac{1}{2a}m\omega^2\right) \tag{4.3.9a}$$

由 $\mathrm{d}E(\psi)/\mathrm{d}a = 0$ 得到 $a = m\omega/2\hbar$, 相应的极小值为

$$\min E(\psi_0) = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{4.3.9b}$$

这个值与精确解一致! 相应的本征函数也与精确解一样 (系数 $C$ 由归一条件决定为 $C = \sqrt{\alpha}/\pi^{1/4}$)

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right) \tag{4.3.9c}$$

其中 $\alpha \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$. 本例中变分解与精确解之所以一致, 是因为我们选择的试探函数恰好与精确解吻合, 可见, 试探函数的选择是非常重要的.

**例 4.3.3** 考虑一般形式的 S-L 型本征值问题

$$\boldsymbol{L} = -\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r}); p(\boldsymbol{r}) > 0, q(\boldsymbol{r}) \geqslant 0 \tag{4.3.10a}$$

本征方程为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi_j = \lambda_j\rho\psi_j, \boldsymbol{r} \in G \\ \left.\left(\alpha\psi_j + \beta\frac{\partial\psi_j}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0\end{gathered} \tag{4.3.10b}$$

其中本征值系列大于零, 即 $\lambda_j > 0$. 另一方面, 对任意允许类函数 $\psi$(即满足上式中的齐次边界条件的函数), 可展成 $\{\psi_j\}$ 的广义 Fourier 级数

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j(\boldsymbol{r}); \quad a_j = \int_G \rho(\boldsymbol{r})\psi_j^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau \tag{4.3.11a}$$

把上式代入式 (4.3.2b), 并假定 $\{\psi_j\}$ 已归一化

$$\begin{aligned} A &= \int_G \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^* \psi_i^*\right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \boldsymbol{L}\psi_j\right) \mathrm{d}\tau = \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda_i a_i^* a_j \int_G \rho \psi_i^* \psi_j \mathrm{d}\tau \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda_i a_i^* a_j \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |a_j|^2 \end{aligned} \tag{4.3.11b}$$

而

$$B = \int_G \rho|\psi|^2 \mathrm{d}\tau = \int_G \rho \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* \psi_i^* \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j \mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \tag{4.3.11c}$$

于是, 由式 (4.3.2a) 得到

$$\lambda(\psi) = \frac{A}{B} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|^2} \geqslant \frac{\lambda_1 \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|^2}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|^2} = \lambda_1 \tag{4.3.12a}$$

因此, $\lambda(\psi) \geqslant \lambda_1$. 如果任意函数 $\psi$ 正交于第一个本征函数 $\psi_1$, 则 $a_1 = 0$, 于是

$$\lambda(\psi) = \frac{A}{B} = \frac{\sum\limits_{i=2}^{\infty} |a_i|^2 \lambda_i}{\sum\limits_{i=2}^{\infty} |a_i|^2} \geqslant \frac{\lambda_2 \sum\limits_{i=2}^{\infty} |a_i|^2}{\sum\limits_{i=2}^{\infty} |a_i|^2} = \lambda_2 \tag{4.3.12b}$$

如果函数 $\psi$ 正交于前 $(n-1)$ 个本征函数 $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{n-1})$, 则 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$, 于是

$$\lambda(\psi) = \frac{A}{B} = \frac{\sum\limits_{i=n}^{\infty} |a_i|^2 \lambda_i}{\sum\limits_{i=n}^{\infty} |a_i|^2} \geqslant \lambda_n \tag{4.3.12c}$$

这与前面得到的结果是一致的. 注意：当 $\lambda_0 = 0$ 是零本征值时, 式 (4.3.12a) 变成

$$\lambda(\psi) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2} \geqslant \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2}{\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2} \tag{4.3.12d}$$

其中 $\lambda_1$ 是最小的非零本征值. 由于上式右边分子不等于分母, 故得不到简单的不等式 $\lambda(\psi) \geqslant \lambda_1$.

当 $p(\boldsymbol{r}) = 0$、$q(\boldsymbol{r}) = 0$ 和 $\rho(\boldsymbol{r}) = 1$ 时, 对任意允许类函数 $\psi$

$$A = \int_G \psi^* (-\nabla^2 \psi) \mathrm{d}\tau = -\int_G \psi^* \nabla^2 \psi \mathrm{d}\tau = \int_G \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi \mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{d}S$$

显然存在不等式

$$\frac{\displaystyle\int_G \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi \mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{d}S}{\displaystyle\int_G \psi^* \psi \mathrm{d}\tau} \geqslant \lambda_1 > 0 \tag{4.3.13}$$

当 $\psi$ 取实函数时, 上式就是式 (1.4.35a).

**非 Hermite 对称情况**　令泛函 $\lambda(\psi^+, \psi)$ 为

$$\lambda(\psi^+, \psi) = \frac{\displaystyle\int_G [\psi^+]^* \boldsymbol{L} \psi \mathrm{d}\tau}{\displaystyle\int_G \rho [\psi^+]^* \psi \mathrm{d}\tau} = \frac{(\psi^+, \boldsymbol{L}\psi)}{(\psi^+, \psi)} \tag{4.3.14a}$$

利用共轭算子定义 $(\psi^+, \boldsymbol{L}\delta\psi) = (\boldsymbol{L}^+ \psi^+, \delta\psi)$ 不难得到 $\lambda(\psi^+, \psi)$ 的一阶变分为

$$\delta\lambda(\psi^+, \psi) = \frac{1}{B}[(\delta\psi^+, \boldsymbol{L}\psi - \lambda\rho\psi) + (\boldsymbol{L}^+\psi^+ - \lambda^*\rho\psi^+, \delta\psi)] \tag{4.3.14b}$$

于是, 由极值条件得到算子 $\boldsymbol{L}$ 及其共轭算子 $\boldsymbol{L}^+$ 的本征方程

$$\boldsymbol{L}\psi = \lambda\rho\psi; \boldsymbol{L}^+\psi^+ = \lambda^*\rho\psi^+ \tag{4.3.14c}$$

但是, 得不到简洁的表达式 $\lambda(\psi) \geqslant \lambda_1$.

### 4.3.2　完备性定理的证明

利用上节结果, 证明下述完备性定理. 设 Hermite 对称算子 $\boldsymbol{L}$ 的本征值可数

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \cdots \tag{4.3.15a}$$

相应的本征函数系 $\{\psi_i(x)\}$ 正交归一. 如果

(1) 最小本征值 $\lambda_1$ 有限;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$,

则本征函数系 $\{\psi_i(x)\}$ 构成允许函数类中的完备系, 即如果函数 $\psi$ 属于允许函数类, 则可展成广义 Fourier 级数

$$\psi(\boldsymbol{r})\approx\sum_{i=1}^{\infty}a_i\psi_i(\boldsymbol{r}) \tag{4.3.15b}$$

其中广义 Fourier 系数为

$$a_i=\int_G\rho\psi_i^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=(\psi_i,\psi) \tag{4.3.15c}$$

展开式 (4.3.15b) 在平均收敛意义下成立, 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_G|\psi(\boldsymbol{r})-\sum_{i=1}^{n}a_i\psi_i(\boldsymbol{r})|^2\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=0 \tag{4.3.15d}$$

证明: 设

$$R_n=\psi(\boldsymbol{r})-\sum_{i=1}^{n}a_i\psi_i(\boldsymbol{r}) \tag{4.3.16a}$$

则以 $\rho(\boldsymbol{r})\psi_i^*(\boldsymbol{r})$ 乘上式两边并积分可得

$$\begin{gathered}\int_G\psi_i^*(\boldsymbol{r})R_n\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=\int_G\psi_i^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\rho\mathrm{d}\tau-a_i=0\\(i=1,2,\cdots,n)\end{gathered} \tag{4.3.16b}$$

故 $R_n$ 正交于 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$ 构成的子空间: $R_n\perp(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$. 其次考虑

$$\lambda(R_n)=\frac{\displaystyle\int_G R_n^*\boldsymbol{L}R_n\mathrm{d}\tau}{\displaystyle\int_G\rho R_n^*R_n\mathrm{d}\tau} \tag{4.3.16c}$$

因为 $R_n$ 正交于 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$, 故由上节的讨论

$$\lambda(R_n)\geqslant\lambda_{n+1} \tag{4.3.17a}$$

把式 (4.3.16a) 代入式 (4.3.16c)

$$\int_G R_n^*\boldsymbol{L}R_n\mathrm{d}\tau=\int_G\left[\psi^*(\boldsymbol{r})-\sum_{i=1}^{n}a_i^*\psi_i^*(\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{L}\left[\psi(\boldsymbol{r})-\sum_{i=1}^{n}a_i\psi_i(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_G \psi^*(\boldsymbol{r})\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau - \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \lambda_i$$

利用式 (4.3.17a)

$$\frac{\displaystyle\int_G \psi^*(\boldsymbol{r})\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau - \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \lambda_i}{\displaystyle\int_G \rho |R_n|^2 \mathrm{d}\tau} \geqslant \lambda_{n+1} \tag{4.3.17b}$$

即

$$\int_G \rho |R_n|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left[ \int_G \psi^* \boldsymbol{L}\psi \mathrm{d}\tau - \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \lambda_i \right] \tag{4.3.17c}$$

根据条件, 最小本征值 $\lambda_1$ 有限, 故存在某个 $\lambda_m \geqslant 0$, 并且对所有 $i > m$, $\lambda_i \geqslant 0$, 对不等式 (4.3.17c) 右边进行放大, 即去掉所有正本征值的项

$$\int_G \rho |R_n|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left[ \int_G \psi^* \boldsymbol{L}\psi \mathrm{d}\tau - \sum_{i=1}^{m} |a_i|^2 \lambda_i \right] \tag{4.3.18a}$$

如果所有本征值 $\lambda_i \geqslant 0$, 则上式为

$$\int_G \rho |R_n|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} \int_G \psi^* \boldsymbol{L}\psi \mathrm{d}\tau \tag{4.3.18b}$$

由条件 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty} \int_G \rho |R_n|^2 \mathrm{d}\tau = 0 \tag{4.3.18c}$$

因此, 式 (4.3.15b) 平均收敛到 $\psi(\boldsymbol{r})$, 于是完备性得证.

**例 4.3.4** 根据第二章的讨论, 算子 $\boldsymbol{L} = -\nabla[p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r})$ 在满足边界条件

$$\left. \left( \alpha\psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \right|_{\partial G} = 0 \tag{4.3.18d}$$

的函数类中是 Hermite 对称算子, 当 $p(\boldsymbol{r}) > 0$ 和 $q(\boldsymbol{r}) \geqslant 0$, $\boldsymbol{L}$ 是正算子, 本征值 $\lambda_i > 0$, 如果还满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$, 则本征函数系是完备的.

### 4.3.3 极值定理、本征值与区域的关系

利用 4.3.1 小节的结果求第 $(n+1)$ 个本征值 $\lambda_{n+1}$ 时, 需要知道前 $n$ 个本征函数 $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$, 这是十分不方便的. 极值定理 (亦称为 Maximum-minimum 原理), 允许我们直接求第 $(n+1)$ 个本征值, 而无需知道前 $n$ 个本征函数. 假定

(1) $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是定义在 $G$ 上的正交函数集合 (不一定是 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数);

(2) $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 满足 $\partial G$ 上的边界条件;

(3) $\psi$ 属允许函数类且正交于 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$

$$\int_G \rho f_i \psi \mathrm{d}\tau = 0, (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.3.19a}$$

则对每一个集合 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, 可得一个 $\lambda(\psi)$ 的极小值 $\min[\lambda(\psi)]$. 变化所有可能的集合 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, 我们可以得到一系列的最小值 $\min[\lambda(\psi)]$.

极值定理告诉我们: 这一系列的极小值中的最大值恰好为第 $(n+1)$ 个本征值. 如果记相对于 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的极小值为 $\mathrm{m}(f_1, f_2, \cdots, f_n) = \min[\lambda(\psi)]$ 则极值定理可表示为

$$\max[\mathrm{m}(f_1, f_2, \cdots, f_n)] = \lambda_{n+1} \tag{4.3.19b}$$

证明: 设 $\boldsymbol{L}$ 的本征值问题 $\boldsymbol{L}\psi_i = \lambda_i \rho \psi_i$, 记 $\psi$ 为

$$\psi = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \psi_i \tag{4.3.20a}$$

并要求 $\psi$ 正交于 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$

$$(\psi, f_j) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i (\psi_i, f_i) = 0, (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.3.20b}$$

因上式有 $(n+1)$ 个未知数 $a_i$, 而方程只有 $n$ 个, 故解有无穷多. 于是式 (4.3.20a) 的 $\psi$ 总能正交于 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$. 因为

$$\boldsymbol{L}\psi = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \boldsymbol{L}\psi_i = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \lambda_i \rho \psi_i \tag{4.3.20c}$$

故

$$\int_G \psi^* \boldsymbol{L}\psi \mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2 \lambda_i ; \int_G \rho \psi^* \psi \mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2 \tag{4.3.20d}$$

上式代入式 (4.3.2a)

$$\lambda(\psi) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2 \lambda_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2} \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2 \lambda_{n+1}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2} = \lambda_{n+1} \tag{4.3.21a}$$

因此 $\mathrm{m}(f_1, f_2, \cdots, f_n) = \min[\lambda(\psi)] \leqslant \lambda_{n+1}$. 故 $\mathrm{m}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的最大值不能大于 $\lambda_{n+1}$. 现在证明 $\mathrm{m}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 最大值达到值 $\lambda_{n+1}$. 事实上, 只要取

$$(f_1, f_2, \cdots, f_n) = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n) \tag{4.3.21b}$$

由 4.3.1 小节结论知: $\mathrm{m}(f_1, f_2, \cdots, f_n) = \lambda_{n+1}$. 因此一般有

$$\max[\mathrm{m}(f_1, f_2, \cdots, f_n)] = \lambda_{n+1}. \tag{4.3.21c}$$

下面考虑一个有趣的现象: 本征值与区域 $G$ 的依赖关系, 用此关系可以估计本征值的上限和下限. 假定在 $G$ 内 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数及本征值为 $\{\psi_i, \lambda_i\}$

$$\boldsymbol{L}\psi_i = \lambda_i \rho \psi_i, \boldsymbol{r} \in G; \psi_i|_{\partial G} = 0 \tag{4.3.22a}$$

另一方面, 设 $G'$ 是 $G$ 的一个内部区域 (可以与 $G$ 有一部分重合), $\partial G'$ 是 $G'$ 的边界. 在 $G'$ 内 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数及本征值分别为 $\{\psi'_i, \lambda'_i\}$

$$\boldsymbol{L}\psi'_i = \lambda'_i \rho \psi'_i, \boldsymbol{r} \in G'; \psi'_i|_{\partial G'} = 0 \tag{4.3.22b}$$

设 $\lambda$ 和 $\lambda'$ 均可数并排列成

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots; \lambda'_1 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \lambda'_3 \leqslant \cdots \tag{4.3.22c}$$

则对所有的 $n$, 不等式成立

$$\lambda'_n \geqslant \lambda_n \tag{4.3.22d}$$

下面仅仅说明 $n = 1$ 情况, 对普遍的 $n$, 证明较复杂, 故略去. 事实上, 因

$$\lambda'_1 = \min[\lambda(\psi')]; \lambda_1 = \min[\lambda(\psi)] \tag{4.3.23a}$$

首先取 $\psi$ 如下

$$\psi = \begin{cases} \psi', & \boldsymbol{r} \in G' \\ 0 & \boldsymbol{r} \notin G' \end{cases} \tag{4.3.23b}$$

则对满足上式的所有可能的 $\psi$: $\min[\lambda(\psi)] = \min[\lambda(\psi')] = \lambda'_1$, 但因 $\psi$ 仍有选择余地, 通过进一步的选择, 可能找到 $\psi$ 使 $\lambda(\psi)$ 比 $\lambda'_1$ 更小, 于是 $\lambda_1 = \min[\lambda(\psi)] \leqslant \lambda'_1$. 利用上述结果, 可对本征值进行估计.

**例 4.3.5** 如图 4.3.1, 考虑半径为 1 的圆内问题, 本征方程

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \lambda\psi = 0 \\ \psi(\rho,\varphi)|_{\rho=1} = 0 \end{gathered} \tag{4.3.24a}$$

其中 $\rho \in (0,1)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. 根据第二章的讨论, 上式的本征值由 Bessel 函数的零点给出: $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$, 最小本征值是零级 Bessel 函数的第一个根 $\alpha_{10}$ 的平方

$$\lambda_{10} = \alpha_{10}^2 \approx 5.76 \tag{4.3.24b}$$

另一方面分别考虑单位圆的外接正方形 $G'$ 和内接正方形 $G''$(如图 4.3.2) 上本征方程的解. 对外接正方形 $G'$, 易求得最小本征值为

$$\tilde{\lambda}_{11} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2} \approx 4.93 \tag{4.3.24c}$$

而对内接正方形 $G''$, 最小本征值为

$$\hat{\lambda}_{11} = 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pi^2 \approx 9.87 \tag{4.3.24d}$$

因 $G'$ 包含 $G$, 故应有 $\lambda_{10} \geqslant \tilde{\lambda}_{11}$; 而 $G$ 包含 $G''$, 应有 $\hat{\lambda}_{11} \geqslant \lambda_{10}$, 即

$$\tilde{\lambda}_{11} \leqslant \lambda_{10} \leqslant \hat{\lambda}_{11} \tag{4.3.24e}$$

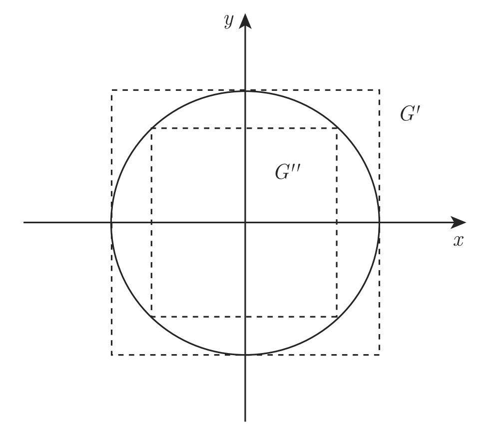
由式 (4.3.24b)~(4.3.24d), 这显然是成立的.

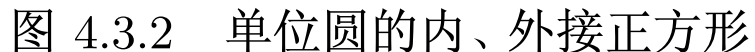
**例 4.3.6**　如图 4.3.3, 考虑第一象限 1/4 椭圆区域内的本征方程

$$\nabla^2\psi + \lambda\psi = 0, (x, y) \in G; \psi|_{\partial G} = 0 \tag{4.3.25a}$$

其中区域 $G: x > 0, y > 0, x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1$. 首先用 4.3.1 小节的方法来估计最小本征值 $\lambda_1 \leqslant \lambda(\psi)$, 取允许函数

$$\psi = xy\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \tag{4.3.25b}$$





图 4.3.2　单位圆的内、外接正方形

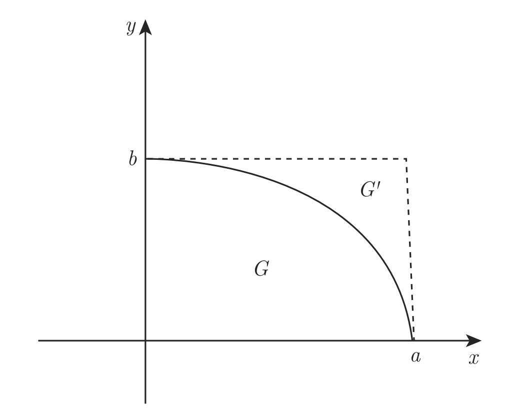



图 4.3.3　第一象限椭圆和外接矩形

显然 $\psi$ 有连续的二阶导数, 且在 $G$ 的边界上 $\psi|_{\partial G} = 0$. 作运算

$$\iint_G \psi \boldsymbol{L}\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 6\iint_G \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) x^2y^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= 6\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) a^2b^2\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi(1-\rho^2)ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\pi}{64}a^2b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.3.25c}
$$

$$
\iint\limits_G \psi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_G x^2y^2\left(-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{960}a^2b^2 \tag{4.3.25d}
$$

于是

$$
\lambda_1 \leqslant \frac{\iint_G \psi \boldsymbol{L}\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_G \psi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = 15\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \equiv \lambda_1^{(1)} \tag{4.3.26a}
$$

然后用本节的方法, 考虑长为 $b$, 宽为 $a$ 的矩形区域 $G'$, 在 $G'$ 内最小本征值

$$
\bar{\lambda}_1^{(1)} = \frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2} = 9.869\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \tag{4.3.26b}
$$

因 $G'$ 包含 $G$, 故 $\bar{\lambda}_1^{(1)} \leqslant \lambda_1$. 于是应有 $\bar{\lambda}_1^{(1)} \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_1^{(1)}$, 即

$$
9.869\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \leqslant \lambda_1 \leqslant 15\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \tag{4.3.26c}
$$

上述问题严格求解是困难的, 利用这种方法, 可以估计最小本征值的大小.

### 4.3.4 Ritz 法和 Galerkin 法

**Ritz 法** 首先介绍 Ritz 法求解本征值问题. 考虑 Hermite 对称算子 $\boldsymbol{L}$ 的本征值问题

$$
\boldsymbol{L}\psi = \lambda\rho\psi \tag{4.3.27a}
$$

上式与泛函 $J(\psi)$ 的极值问题等价

$$
J(\psi) = \int_G (\psi^*\boldsymbol{L}\psi - \lambda\rho\psi\psi^*)d\tau \tag{4.3.27b}
$$

设 Ritz 近似解为

$$
\psi^n = \sum_{i=1}^n a_i\psi_i^R \tag{4.3.27c}
$$

其中 $\{\psi_j^R\}$ 为允许类函数中的线性独立的完备系, 取系数 $a_i$ 为实数 (否则可归入 $\psi_i^R$), 代入式 (4.3.27b)

$$
J(\psi^n) = \sum_{i,j=1}^n a_ia_j\left[\int_G \psi_i^{*R}\boldsymbol{L}\psi_j^R\mathrm{d}\tau - \lambda\int_G \rho\psi_i^{*R}\psi_j^R\mathrm{d}\tau\right] \tag{4.3.28a}
$$

令

$$\alpha_{ij}^R = \int_G \psi_i^{*R} \boldsymbol{L} \psi_j^R \mathrm{d}\tau; \gamma_{ij}^R = \int_G \rho \psi_i^{*R} \psi_j^R \mathrm{d}\tau \tag{4.3.28b}$$

于是

$$J(\psi^n) = \sum_{i,j=1}^{n} (\alpha_{ij}^R - \lambda \gamma_{ij}^R) a_i a_j \tag{4.3.28c}$$

求 $J(\psi^n)$ 的极值得到

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij}^R - \lambda \gamma_{ij}^R) a_j = 0, (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.3.29a}$$

上式是 $n \times n$ 的齐次线性方程组, 故 $a_i$ 有解的条件是

$$\det |\alpha_{ij}^R - \lambda \gamma_{ij}^R| = 0 \tag{4.3.29b}$$

由上式可求得前 $n$ 个本征值 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$(第一个本征值 $\lambda_1$ 即为最小本征值) 以及一套系数 $a_j$, 它们对应于前 $n$ 个本征函数 $\{\psi_i^n\}$. 当式 (4.3.27c) 只取一项 $\psi^1 = a_1 \psi_1^R$, 可求得最小本征值的近似值

$$\lambda_1 \approx \frac{\displaystyle\int_G \psi_1^{*R} \boldsymbol{L} \psi_1^R \mathrm{d}\tau}{\displaystyle\int_G \rho \psi_1^R \psi_1^{*R} \mathrm{d}\tau} \tag{4.3.29c}$$

**Galerkin 法**　根据 Galerkin 方法, 取近似本征函数为

$$\psi^n = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k^G \tag{4.3.30a}$$

把本征方程 (4.3.27a) 改写成 $\boldsymbol{L}\psi = \lambda \rho \psi \equiv f$, 以 $f \equiv \lambda \rho \psi$ 代入方程 (4.2.35c) 得到

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (\boldsymbol{L}\psi_k^G, \psi_j^G) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k (\psi_k^G, \psi_j^G), (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.3.30b}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{kj}^G - \lambda \gamma_{kj}^G) a_k = 0, (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.3.30c}$$

其中 $\alpha_{kj}^G \equiv (\boldsymbol{L}\psi_k^G, \psi_j^G)$ 和 $\gamma_{kj}^G \equiv a_k(\psi_k^G, \psi_j^G)$. 当 $\alpha_{kj}^G = \alpha_{jk}^G$(即 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称算子) 时, 上式与方程 (4.3.29a) 有相同的形式, 但完备系 $\{\psi_i^G\}$ 不同于 $\psi_i^R$(详细讨论见 4.2 节). 此外, Galerkin 法对非 Hermite 对称的算子也适用, 这是该法的最大优点.

**例 4.3.7** 考虑零阶 Bessel 方程的本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\rho}\right)=\lambda\rho\psi,\rho\in(0,a);\psi|_{\rho=a}=0 \tag{4.3.31a}$$

取满足边界条件的完备系

$$\psi_1^G(\rho)=\cos\frac{\pi\rho}{2a};\psi_2^G(\rho)=\cos\frac{3\pi\rho}{2a};\psi_3^G(\rho)=\cos\frac{5\pi\rho}{2a};\cdots \tag{4.3.31b}$$

注意: 上式中选择余弦函数而不是正弦函数, 因为零阶 Bessel 函数在 $\rho=0$ 不为零, 如果选择正弦函数系列, 原点就难以逼近. 第一次近似 $\psi^1\approx a_1\psi_1^G$, 由方程 (4.3.30b) 得到

$$a_1(\boldsymbol{L}\psi_1^G,\psi_1^G)=\lambda_1 a_1(\psi_1^G,\psi_1^G) \tag{4.3.32a}$$

作运算

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{L}\psi_1^G,\psi_1^G)&=-\int_0^a\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}\psi_1^G}{\mathrm{d}\rho}\right)\right]\psi_1^G\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^a\rho\frac{\mathrm{d}\psi_1^G}{\mathrm{d}\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\psi_1^G}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\rho=\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\right)\\(\psi_1^G,\psi_1^G)&=\int_0^a\rho\psi_1^G\psi_1^G\mathrm{d}\rho=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\right)\end{aligned} \tag{4.3.32b}$$

由方程 (4.2.32a) 得到

$$\lambda_1\approx\frac{(\boldsymbol{L}\psi_1^G,\psi_1^G)}{(\psi_1^G,\psi_1^G)}\approx\frac{5.83}{a^2} \tag{4.3.32c}$$

另方面, 由 Bessel 函数得到严格解为 $\lambda_1=5.7831/a^2$, 故第一次近似的相对误差为 0.86%. 归一化近似本征函数为

$$\psi^1(\rho)\approx\frac{1}{\sqrt{(\psi_1^G,\psi_1^G)}}\cos\frac{\pi\rho}{2a} \tag{4.3.32d}$$

取第二次近似为

$$\psi^2(\rho)=a_1\psi_1^G(\rho)+a_2\psi_2^G(\rho) \tag{4.3.33a}$$

由方程 (4.3.30b)

$$\begin{aligned}&a_1[(\boldsymbol{L}\psi_1^G,\psi_1^G)-\lambda(\psi_1^G,\psi_1^G)]+a_2[(\boldsymbol{L}\psi_2^G,\psi_1^G)-\lambda(\psi_2^G,\psi_1^G)]=0\\&a_1[(\mathbf{L}\psi_1^G,\psi_2^G)-\lambda(\psi_1^G,\psi_2^G)]+a_2[(\boldsymbol{L}\psi_2^G,\psi_2^G)-\lambda(\psi_2^G,\psi_2^G)]=0\end{aligned} \tag{4.3.33b}$$

式中 $(\boldsymbol{L}\psi_1^G,\psi_1^G)$ 和 $\lambda(\psi_1^G,\psi_1^G)$ 已由式 (4.2.32b) 给出, 其他积分如下

$$(\boldsymbol{L}\psi_2^G,\psi_2^G)=\int_0^a\rho\frac{\mathrm{d}\psi_2^G}{\mathrm{d}\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\psi_2^G}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\rho=\frac{9\pi^2}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{9\pi^2}\right)$$

$$(\psi_2^G,\psi_2^G)=\int_0^a\rho\psi_2^G\psi_2^G\mathrm{d}\rho=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9\pi^2}\right)$$

$$(\boldsymbol{L}\psi_1^G,\psi_2^G)=(\boldsymbol{L}\psi_2^G,\psi_1^G)=\int_0^a\rho\frac{\mathrm{d}\psi_1^G}{\mathrm{d}\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\psi_2^G}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\rho=-\frac{3}{4}$$

$$(\psi_1^G,\psi_2^G)=(\psi_2^G,\psi_1^G)=\int_0^a\rho\psi_1^G\psi_2^G\mathrm{d}\rho=-\frac{a^2}{\pi^2}$$

上式代入方程 (4.3.33b) 得到 $a_1$ 和 $a_2$ 满足的方程

$$\begin{cases}(1.7337-0.29736\lambda a^2)a_1+(0.20264\lambda a^2-1.5)a_2=0\\(0.20264\lambda a^2-1.5)a_1+(11.603-0.47748\lambda a^2)a_2=0\end{cases}\tag{4.3.33c}$$

由系数行列式为零可得

$$0.10092\lambda^2a^4-3.6701\lambda a^2+17.866=0\tag{4.3.33d}$$

二个根分别为 $\lambda_1\approx5.787/a^2$ 和 $\lambda_2\approx30.579/a^2$. 可见第一个根已接近严格解, 而第二个根与严格解 ($\lambda_2=30.4715/a^2$) 也十分接近. 以 $\lambda_1a^2\approx5.787$ 代入方程 (4.3.33c) 的第一式 (或者第二式) 可以得到比值 $a_2/a_1$, 代入方程 (4.3.33a) 得到第一个本征值对应的本征函数的第二次近似为

$$\psi^2(\rho)=a_1[\psi_1^G(\rho)+(a_2/a_1)\psi_2^G(\rho)]\tag{4.3.34a}$$

其中 $a_1$ 由归一化条件决定

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{(\psi_1^G,\psi_1^G)+(a_2/a_1)^2(\psi_2^G,\psi_2^G)+2(a_2/a_1)(\psi_1^G,\psi_2^G)}}\tag{4.3.34b}$$

另一方面, 方程 (4.3.31a) 的精确解 (第一个本征值对应的本征函数, 见式 (2.3.17b))

$$\psi_1^0(x)=\frac{\sqrt{2}}{aJ_1(\alpha_1^0)}\cdot J_0\left(\alpha_1^0\frac{\rho}{a}\right)\tag{4.3.34c}$$

其中 $\alpha_1^0\approx2.405$ 是 $J_0(x)=0$ 的第一个根. 第一、二次近似和精确解的曲线如图 4.3.3, 可见第二次近似后, 本征函数也十分接近了.

注意: 满足边界条件的完备系不是唯一的, 也可以取下列函数系

$$\psi_1^G(\rho)=(a^2-\rho^2);\psi_2^G(\rho)=(a^2-\rho^2)^2;\psi_3^G(\rho)=(a^2-\rho^2)^3;\cdots\tag{4.3.35a}$$

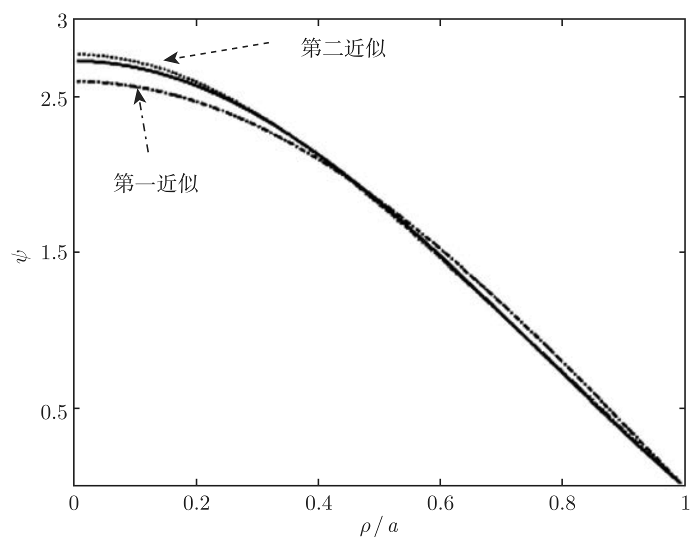



图 4.3.4 精确解 (实线) 与第一、二次近似解

式中取 $\rho$ 的偶次方是因为方程 (4.3.31a) 关于原点对称. 作运算

$$
\begin{gathered}
(\boldsymbol{L}\psi_1^G,\psi_1^G)=\int_0^a\rho\frac{\mathrm{d}\psi_1^G}{\mathrm{d}\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\psi_1^G}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\rho=4\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho=a^4\\
(\psi_1^G,\psi_1^G)=\int_0^a\rho(a^2-\rho^2)^2\mathrm{d}\rho=\frac{1}{6}a^6
\end{gathered}
\tag{4.3.35b}
$$

由方程 (4.2.32a) 得到本征值的第一次近似为

$$
\lambda_1\approx\frac{(\boldsymbol{L}\psi_1^G,\psi_1^G)}{(\psi_1^G,\psi_1^G)}=\frac{6}{a^2}
\tag{4.3.35c}
$$

比较式 (4.3.32c), 显然与精确值有较大的误差. 第二次近似取

$$
\psi^2(\rho)\approx a_1(a^2-\rho^2)+a_2(a^2-\rho^2)^2
\tag{4.3.35d}
$$

作运算

$$
\begin{gathered}
(\boldsymbol{L}\psi_2^G,\psi_2^G)=\frac{2}{3}a^8;(\boldsymbol{L}\psi_1^G,\psi_2^G)=(\boldsymbol{L}\psi_2^G,\psi_1^G)=\frac{2}{3}a^6\\
(\psi_2^G,\psi_2^G)=\frac{1}{10}a^{10};(\psi_1^G,\psi_2^G)=(\psi_2^G,\psi_1^G)=\frac{1}{8}a^8
\end{gathered}
\tag{4.3.36a}
$$

把上式和式 (4.3.35b) 代入方程 (4.3.33b) 得到

$$
\begin{gathered}
a_1\left(1-\frac{1}{6}\lambda a^2\right)+a_2a^2\left(\frac{2}{3}-\lambda a^2\frac{1}{8}\right)=0\\
a_1\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{8}\lambda a^2\right)+a_2a^2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{10}\lambda a^2\right)=0
\end{gathered}
\tag{4.3.36b}
$$

存在非零解的条件为系数行列式等于零, 取较小的根为第一个本征值, $\lambda_1 \approx 5.7841/a^2$, 可见第二次近似给出了比较好的结果. 把这个根代入方程 (4.3.36c) 的第一式得到比值 $a_2/a_1$. 归一化的本征函数仍然由式 (4.3.34a) 和 (4.3.34b) 表示.

## 4.4 有限元近似方法

用 Ritz 法或 Galerkin 法求变分问题的近似解时, 我们取基函数 $\{\psi_i^R\}$ 或 $\{\psi_i^G\}$ 为整个区域 $G$ 上的完备系, 当 $G$ 的边界非常复杂时, 寻找这样的完备系相当困难, 甚至不可能. 有限元近似把区域 $G$ 分成特定几何形状的大量不相交的有限小块区域 (称为子区域), 在每个小块区域用多项式函数 (我们主要介绍线性函数插值, 对二次插值也作一个简单介绍) 作为基本函数系来逼近. 因此, 有限元近似不仅解决了复杂区域问题, 同时解决了基本函数系的选择.

### 4.4.1 一维边值问题的有限元法

**Ritz 法** 首先考虑基于 Ritz 法的一维边值问题的有限元近似. 设边值问题为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)\psi = f(x), x \in (a,b) \\ \psi(a) = \psi_0; \left.\left(\alpha\psi + \beta\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b} = g\end{gathered} \tag{4.4.1a}$$

其中 $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$ 且 $\alpha/\beta \geqslant 0$ 或 $\beta/\alpha \geqslant 0$. 相应的泛函为

$$\begin{aligned}J(\psi) &= (\psi, \boldsymbol{L}\psi) - 2(f,\psi) - \frac{2p(b)}{\beta}\psi(b)g \\ &= \int_a^b \left[p\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q\psi^2 - 2f\psi\right]\mathrm{d}x + \frac{\alpha p(b)}{\beta}\psi^2(b) - \frac{2p(b)}{\beta}\psi(b)g\end{aligned} \tag{4.4.1b}$$

不难表明式 (4.4.1a) 就是 $\delta J(\psi) = 0$ 的 Euler 方程. 如图 4.4.1, 我们把整个区间 $[a,b]$ 分成 $M$ 个相邻的子区间 $e = [x_{i-1}, x_i]$, 称每个子区间为单元 $e$, 长度为 $h_i, (i = 1, 2, \cdots, M)$, 假定 $\psi(x)$ 在网格结点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} \cdots < x_{M-1} < x_M = b \tag{4.4.1c}$$

的值为

$$\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_{i-1}, \psi_i, \psi_{i+1}, \cdots, \psi_{M-1}, \psi_M \tag{4.4.1d}$$

在单元 $e = [x_{i-1}, x_i]$, 函数 $\psi(x)$ 可用线性插值表示成

$$\psi^e(x) \approx \psi_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + \psi_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, x \in e, (e = 1, 2, \cdots, M) \tag{4.4.2a}$$

由上式启发, 在整个区间 $[a,b]$ 上, 函数 $\psi(x)$ 可用结点值表示为

$$\psi(x)\approx\psi_0N_0(x)+\sum_{i=1}^{M}\psi_iN_i(x),x\in[a,b]\tag{4.4.2b}$$

其中 $N_i(x)$ 称为**基函数**, 如图 4.4.2

$$N_0(x)=\begin{cases}(x_1-x)/h_1, & x\in[x_0,x_1]\\0, & x\notin[x_0,x_1]\end{cases}\tag{4.4.3a}$$

$$N_i(x)=\begin{cases}(x-x_{i-1})/h_i, & x\in[x_{i-1},x_i]\\(x_{i+1}-x)/h_{i+1}, & x\in[x_i,x_{i+1}]\\0, & \text{其他}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,M-1)\tag{4.4.3b}$$

$$N_M(x)=\begin{cases}(x-x_{M-1})/h_M, & x\in[x_{M-1},x_M]\\0, & x\notin[x_{M-1},x_M]\end{cases}\tag{4.4.3c}$$

不难验证基函数的性质

$$\begin{aligned}&N_i(x_j)=\delta_{ij},(1\leqslant i,j\leqslant M)\\&N_i(x)N_j(x)=0,|i-j|\geqslant2\\&N'_i(x)N'_j(x)=0,|i-j|\geqslant2\end{aligned}\tag{4.4.3d}$$

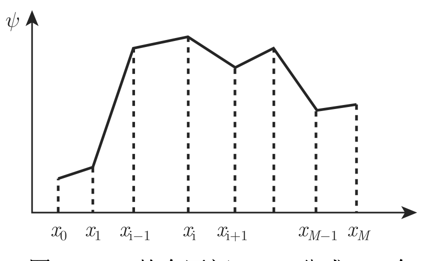


图 4.4.1　整个区间 $[a,b]$ 分成 $M$ 个相邻的子区间 $e_i=[x_{i-1},x_i]$

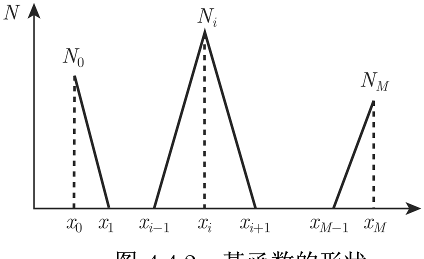


图 4.4.2　基函数的形状

把式 (4.4.2b) 代入泛函式 (4.4.1b) 得到

$$J(\psi)=\sum_{i,j=0}^{M}\chi_{ij}\psi_i\psi_j-2\sum_{i=1}^{M}\beta_i\psi_i+\frac{\alpha p(b)}{\beta}\psi_M^2-\frac{2p(b)}{\beta}\psi_Mg\tag{4.4.4a}$$

其中 $\beta_i$ 和系数矩阵 $\chi_{ij}$ 分别称为**自由项**和**刚度矩阵**

$$\begin{aligned}&\beta_i\equiv\int_a^b f(x)N_i(x)\mathrm{d}x\\&\chi_{ij}\equiv\int_a^b\left[p(x)\frac{\mathrm{d}N_i(x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}N_j(x)}{\mathrm{d}x}+q(x)N_i(x)N_j(x)\right]\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{4.4.4b}$$

对第三类边界条件, 式 (4.4.4a) 中后二项可以合并到前二项. 为了方便, 设 $\alpha=0$ 和 $g=0$, 则式 (4.4.4a) 简化成

$$J(\psi)=\sum_{i,j=0}^{M}\chi_{ij}\psi_i\psi_j-2\sum_{i=1}^{M}\beta_i\psi_i \tag{4.4.4c}$$

由极值条件 $\partial J(\psi)/\partial\psi_i=0$, 不难得到决定结点值的线性代数方程组

$$\sum_{i=1}^{M}\chi_{ij}\psi_i=\beta_j,(j=1,2,\cdots,M) \tag{4.4.4d}$$

其中利用了对称性关系 $\chi_{ij}=\chi_{ji}$, 当 $p(x)>0$ 和 $q(x)\geqslant 0$ 时, $\chi_{ij}$ 是对称的正定矩阵 (注意：这是 Ritz 法求变分近似解必须满足的条件, 要求 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称的正算子). 一旦求得 $\psi_i,(i=1,2,\cdots,M)$, 由式 (4.4.2b) 就可以得到 $\psi(x)$.

**Galerkin 法**　下面讨论基于 Galerkin 法的一维边值问题的有限元近似. 把式 (4.4.2b) 代入虚功方程 (4.2.12) 得到

$$\sum_{i=0}^{M}\psi_i(\boldsymbol{L}N_i,v)=(f,v) \tag{4.4.5a}$$

令检验函数为

$$v(x)=\sum_{j=0}^{M}v_jN_j(x),x\in[a,b] \tag{4.4.5b}$$

代入方程 (4.4.5a) 得到

$$\sum_{j=0}^{M}\sum_{i=0}^{M}\psi_i(\boldsymbol{L}N_i,N_j)v_j=\sum_{j=0}^{M}(f,N_j)v_j \tag{4.4.5c}$$

由 $v_j$ 的任意性得到

$$\sum_{i=0}^{M}\psi_i(\boldsymbol{L}N_i,N_j)=(f,N_j),(j=1,2,\cdots,M) \tag{4.4.5d}$$

即

$$\sum_{i=1}^{M}\psi_i(\boldsymbol{L}N_i,N_j)=(f,N_j)-\psi_0(\boldsymbol{L}N_0,N_j),(j=1,2,\cdots,M) \tag{4.4.6a}$$

或者写成矩阵形式

$$\boldsymbol{K}\psi=\boldsymbol{F} \tag{4.4.6b}$$

其中刚度矩阵元和自由项分别为

$$K_{ij} \equiv (\boldsymbol{L}N_i, N_j); F_j \equiv (f, N_j) - \psi_0(\boldsymbol{L}N_0, N_j) \tag{4.4.6c}$$

注意：$(\boldsymbol{L}N_i, N_j)$ 一定要写成双线性形式 $D(N_i, N_j) = (\boldsymbol{L}N_i, N_j)$ 后才能进行微分运算.

**本征值问题**　对一维本征值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}u \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)\psi = \rho(x)\lambda\psi, x \in (a, b) \\ \psi(a) = 0; \left(\alpha\psi + \beta\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=b} = 0\end{gathered} \tag{4.4.7a}$$

取 $f(x) = \rho(x)\lambda\psi$ 代入方程 (4.4.6a) 且注意到 $\psi_0 = 0$

$$\sum_{i=1}^{M} \psi_i[(\boldsymbol{L}N_i, N_j) - \lambda(N_i, N_j)] = 0, (j = 1, 2, \cdots, M) \tag{4.4.7b}$$

其中带权内积为 $(N_i, N_j) = \displaystyle\int_a^b \rho(x)N_i(x)N_j(x)\mathrm{d}x$. 于是由系数行列式为零得到决定本征值的方程

$$\det[(\boldsymbol{L}N_i, N_j) - \lambda(N_i, N_j)] = 0 \tag{4.4.7c}$$

**二次单元**　显然, 有限元计算的精度与子区域的大小有关, 例如在本征值问题中, 随本征值变大, 本征函数在总区间 $[a, b]$ 的零点增多, 函数变化更为剧烈, 要求子区域的划分更小. 因此, 原则上, 我们可以通过增加结点数或单元数来提高计算的精度, 但这是以牺牲计算时间和内存为代价的, 特别是对二维, 尤其在三维情况下, 这种代价是相当大的.

在不增加结点数的条件下, 提高精度的办法是选择高阶插值函数 (或称为高阶单元). 利用线性插值, 我们得到近似式 (4.4.2a) 是 $x$ 的线性函数, 刚度矩阵 $\chi_{ij}$ 的计算相当简单, 得到的代数方程 (4.4.4d) 或者 (4.4.6a) 也容易求解, 这是线性插值的优点, 但计算精度相对较低. 高次单元的缺点是刚度矩阵 $\chi_{ij}$ 的计算较复杂, 所得到的线性代数方程求解比较困难, 但计算精度相对较高, 而且不以牺牲计算时间和内存为代价. 我们主要介绍二次单元.

设单元 $e$ 内的函数 $\psi(x)$ 用二次函数插值为

$$\psi^e(x) \approx a^e + b^e x + c^e x^2, x \in e, (e = 1, 2, \cdots, M) \tag{4.4.8a}$$

为了决定上式中的三个系数, 每个单元 $e$ 内最少必须包含三个结点, 如图 4.4.3(b)(为了比较单元数与结点数的关系, 图 4.4.3(a) 画出了线性插值时结点与单元的选择),

在二个端点上各取一个结点, 而第三个结点通常放置在单元的中心, 如图 4.4.3(c). 假定单元 $e$ 内 3 个结点上的函数值为 $\psi_1^e$，$\psi_2^e$ 和 $\psi_3^e$, 则由式 (4.4.8a)

$$\begin{aligned}\psi_1^e &\approx a^e + b^e x_1^e + c^e (x_1^e)^2\\ \psi_2^e &\approx a^e + b^e x_2^e + c^e (x_2^e)^2\\ \psi_3^e &\approx a^e + b^e x_3^e + c^e (x_3^e)^2\end{aligned} \tag{4.4.8b}$$

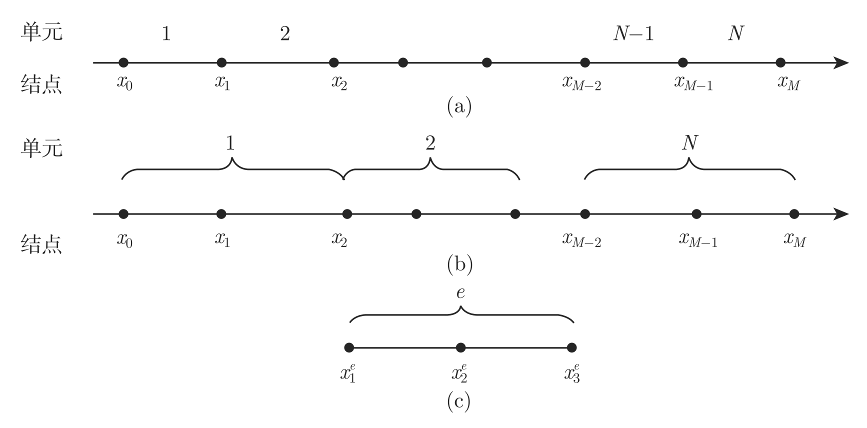



图 4.4.3 线性插值时，每个单元 2 个结点 (a); 二次插值时，每个单元 3 个结点 (b); 二次插值时单元 $e$(c)

由上式求得系数 $a^e$，$b^e$ 和 $c^e$ 后, 代入式 (4.4.8a) 得到

$$\psi^e(x) \approx \sum_{j=1}^{3} N_j^e(x)\psi_j^e, x \in e, (e = 1, 2, \cdots, M) \tag{4.4.9a}$$

其中基函数为

$$\begin{aligned}N_1^e(x) &= \frac{(x - x_2^e)(x - x_3^e)}{(x_1^e - x_2^e)(x_1^e - x_3^e)}\\ N_2^e(x) &= \frac{(x - x_1^e)(x - x_3^e)}{(x_2^e - x_1^e)(x_2^e - x_3^e)}\\ N_3^e(x) &= \frac{(x - x_1^e)(x - x_2^e)}{(x_3^e - x_1^e)(x_3^e - x_2^e)}\end{aligned} \tag{4.4.9b}$$

显然, 存在关系 $N_j^e(x_i) = \delta_{ji}$. 基函数的图形由图 4.4.4 表示. 最后, 得到总区域 $[a, b]$ 上函数 $\psi(x)$ 的表达式

$$\psi(x) = \sum_{e=1}^{M} \psi^e(x) = \sum_{e=1}^{M}\sum_{j=1}^{3} N_j^e(x)\psi_j^e, x \in [a, b] \tag{4.4.9c}$$


余下的过程类似, 不再重复.

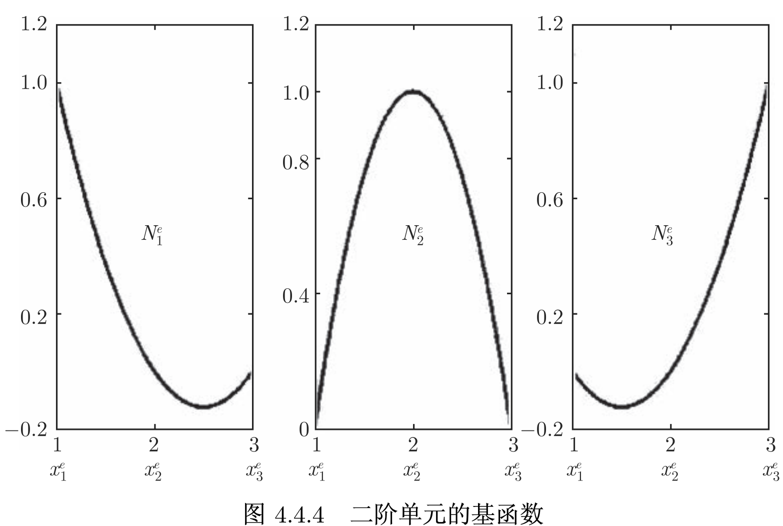



图 4.4.4　二阶单元的基函数

### 4.4.2　二维边值问题的有限元法

对二维情况, 常用的子区域为三角形 (适用于二维复杂的曲线边界, 如图 4.4.5(a))、矩形 (适用于矩形区域) 等, 而在三维情况则选为四面体 (适用于复杂的曲面边界, 如图 4.4.5(b))、五面体 (适用于特殊边界) 或长方体 (适用于长方体区域). 考虑二维椭圆型方程的边值问题

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}\psi(x,y)=f(x,y),(x,y)\in G\\
&\psi(x,y)|_{\partial G_1}=\psi_0(x,y),(x,y)\in\partial G_1\\
&\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\partial G_2}=b(x,y),(x,y)\in\partial G_2
\end{aligned}
\tag{4.4.10a}
$$

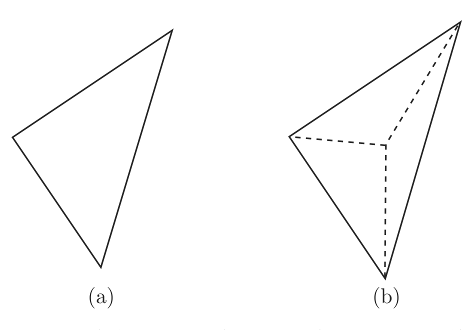



图 4.4.5　子区域为: (a) 三角形 (二维); (b) 四面体 (三维)

其中椭圆型算子为

$$\boldsymbol{L} \equiv -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]+c \tag{4.4.10b}$$

系数 $p(x,y)>0$ 和 $c(x,y)>0$ 以及 $\alpha/\beta>0$. 首先介绍简单的二维三角形区域划分和线性函数插值, 导出基函数的形式. 区域划分包括如下的注意点.

(1) 子区域三角形区没有重叠的内部;

(2) 每一个三角形单元的顶点要么是区域 $G$ 的边界, 要么是相邻单元的公共顶点, 即不允许单元的顶点是其他单元内点;

(3) 区域 $\partial G_1$ 和 $\partial G_2$ 的交点处必须设为一个结点, 系数 $\alpha$、$\beta$ 和 $b$ 的间断点也应该取为结点;

(4) 如果方程的系数 $p(x,y)$ 和 $c(x,y)$ 存在间断曲线, 则应该用一系列折线逼近间断线, 并且取这一系列折线为三角形的边;

(5) 为了提高有限元解的精度, 尽量使每个三角形的最小内角大一些, 即避免太尖和太扁的三角形出现;

(6) 如果对解的性质大致有了解, 则在变化剧烈的区域, 结点应该密集, 而在变化平稳区, 结点可以稀疏, 以提高计算精度.

如图 4.4.6, 区域 $G$ 分割成 $M$ 个不重叠的小三角形单元, 区域的边界近似为一系列折线. 考虑由三个结点 $(i,j,k)$(取逆时针排列) 构成的三角形单元 $e$, 设待求函数 $\psi(x,y)$ 在三个结点 $(i,j,k)$ 的值为 $\psi_i^e$、$\psi_j^e$ 和 $\psi_k^e$, 由于单元足够小, 三角形单元 $e$ 内的函数 $\psi(x,y)$ 可用线性插值得到

$$\psi^e(x,y)=a_1+a_2x+a_3y \tag{4.4.11a}$$

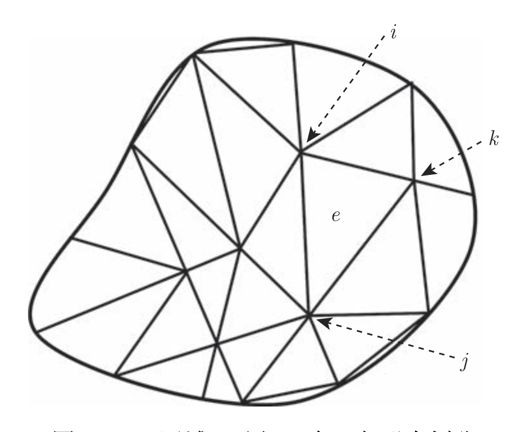



图 4.4.6　区域 $G$ 用 $N$ 个三角形来划分

其中 $a_1, a_2$ 和 $a_3$ 待定. 由于函数 $\psi(x,y)$ 在三个结点 $(i,j,k)$ 的值为 $\psi_i^e$、$\psi_j^e$ 和 $\psi_k^e$, 故由上式

$$\begin{aligned}\psi_i^e &= a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \\ \psi_j^e &= a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j \\ \psi_k^e &= a_1 + a_2 x_k + a_3 y_k\end{aligned} \tag{4.4.11b}$$

于是可以得到用结点的值 $\psi_i^e$、$\psi_j^e$ 和 $\psi_k^e$ 表示的插值系数 $a_1$、$a_2$ 和 $a_3$

$$a_1 = \frac{1}{2\Delta_e}\begin{vmatrix}\psi_i^e & x_i & y_i \\ \psi_j^e & x_j & y_j \\ \psi_k^e & x_k & y_k\end{vmatrix}; a_2 = \frac{1}{2\Delta_e}\begin{vmatrix}1 & \psi_i^e & y_i \\ 1 & \psi_j^e & y_j \\ 1 & \psi_k^e & y_k\end{vmatrix}; a_3 = \frac{1}{2\Delta_e}\begin{vmatrix}1 & x_i & \psi_i^e \\ 1 & x_j & \psi_j^e \\ 1 & x_k & \psi_k^e\end{vmatrix}$$

其中 $\Delta_e$ 为三角形单元 $e$ 的面积

$$\Delta_e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k\end{vmatrix} \tag{4.4.11c}$$

展开后得到

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{2\Delta_e}[(x_j y_k - x_k y_j)\psi_i^e - (x_i y_k - x_k y_i)\psi_j^e + (x_i y_j - x_j y_i)\psi_k^e] \\ a_2 &= \frac{1}{2\Delta_e}[(y_j - y_k)\psi_i^e + (y_k - y_i)\psi_j^e + (y_i - y_j)\psi_k^e] \\ a_3 &= \frac{1}{2\Delta_e}[(x_k - x_j)\psi_i^e + (x_i - x_k)\psi_j^e + (x_j - x_i)\psi_k^e]\end{aligned} \tag{4.4.11d}$$

把式 (4.4.11d) 代入式 (4.4.11a) 得到用三个结点的值表示的函数 $\psi^e(x,y)$

$$\psi^e(x,y) = N_i^e(x,y)\psi_i^e + N_j^e(x,y)\psi_j^e + N_k^e(x,y)\psi_k^e \tag{4.4.12a}$$

其中 $N_\nu^e(x,y), (\nu = i,j,k)$ 称为**插值函数**, 它们是 $x$ 和 $y$ 的线性函数

$$N_\nu^e(x,y) = \frac{1}{2\Delta_e}(a_\nu^e + b_\nu^e x + c_\nu^e y), (\nu = i,j,k) \tag{4.4.12b}$$

式中

$$\begin{aligned}&a_i^e \equiv x_j y_k - x_k y_j; b_i^e \equiv y_j - y_k; c_i^e \equiv x_k - x_j \\ &a_j^e \equiv x_k y_i - x_i y_k; b_j^e \equiv y_k - y_i; c_j^e \equiv x_i - x_k \\ &a_k^e \equiv x_i y_j - x_j y_i; b_k^e \equiv y_i - y_j; c_k^e \equiv x_j - x_i\end{aligned} \tag{4.4.12c}$$

在实际问题中, 单元 $e$ 区域包含的结点数一般大于 3, 假定为 $P$ 个结点 (见下面介绍的高阶单元). 此外, 也可以用高阶多项式或者其他插值方法, 此时插值函数

$N_\nu^e(\boldsymbol{r}),(\nu=1,2,\cdots,P)$ 是较复杂的函数, 单元 $e$ 区域的函数 $\psi^e(\boldsymbol{r})$ 总可以表示成

$$\psi^e(\boldsymbol{r})=\sum_{\nu=1}^{P}\psi_\nu^e N_\nu^e(\boldsymbol{r}) \tag{4.4.13a}$$

插值函数 $N_\nu^e(\boldsymbol{r})$ 称为**展开函数**或者**基函数**, 其特点是：只有在单元 $e$ 区域不为零, 而在其他区域为零.

对所有的三角形单元, 都可以进行类似的分析. 注意：如果三角形单元在边界上, 对第一类边值问题, 相当于一个或者二个结点的值是已知的, 不参与变分; 对第二、三类边值问题, 变分解自动满足. 总的待求函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 为每个单元的叠加

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_{e=1}^{M}\psi^e(\boldsymbol{r})=\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\psi_\nu^e N_\nu^e(\boldsymbol{r}) \tag{4.4.13b}$$

另一方面, 泛函式 (4.2.1b) 可以写成

$$J(\psi)=\sum_{e=1}^{M}J^e(\psi^e)\equiv\sum_{e=1}^{M}D(\psi^e,\psi^e)-[(\psi^e,f)+(f,\psi^e)] \tag{4.4.14a}$$

把式 (4.4.13b) 代入上式得到

$$J(\psi)=\sum_{e=1}^{M}J^e(\psi^e) \tag{4.4.14b}$$

其中 $J^e(\psi^e)$ 是每个单元的贡献

$$J^e(\psi^e)\equiv\sum_{\nu,\mu=1}^{P}\psi_\mu^e\psi_\nu^e D(N_\nu^e,N_\mu^e)-\sum_{\nu=1}^{P}\psi_\nu^e[(N_\nu^e,f)+(f,N_\nu^e)] \tag{4.4.14c}$$

得到上式, 我们假定结点的值 $\psi_\nu^e$ 是实数, 否则可以把指数部分归入基函数 $N_\nu^e(\boldsymbol{r})$. 显然, 泛函式 (4.4.14c) 是结点值的二次函数, 注意到相邻单元的结点是共有的, 总节点数 $N_d<M\cdot P$, 故式 (4.4.14b) 和 (4.4.14c) 的节点值 $\psi_\nu^e$ 不完全独立, 必须把虽然属于不同单元但与相邻单元具有同一个结点的项合并. 这样整理和合并后, 原则上从式 (4.4.14b) 和 (4.4.14c) 就可以得到泛函 $J(\psi)$ 的形式

$$J(\psi)=\sum_{i,j=1}^{N_d}\chi_{ij}^R\psi_i^d\psi_j^d-2\sum_{i=1}^{N_d}\beta_i^R\psi_i^d \tag{4.4.15a}$$

其中 $\psi_i^d,(i=1,2,\cdots,N_d)$ 是第 $i$ 个结点上的值 (每个结点的值独立), $\chi_{ij}^R$ 和 $\beta_i^R$ 分别是 $D(N_\nu^e,N_\mu^e)$(即 $(N_\nu^e,\boldsymbol{L}N_\mu^e)$) 和 $[(N_\nu^e,f)+(f,N_\nu^e)]$, $(\mu,\nu=1,2,\cdots,P;e=1,2,\cdots,M)$ 重新排列和合并后的矩阵元. 泛函 $J(\psi)$ 取极小的条件是

$$\frac{\partial J(\psi)}{\partial\psi_i^d}=0,(i=1,2,\cdots,N_d) \tag{4.4.15b}$$

即

$$\sum_{j=1}^{N_d} \chi_{ij}^R \psi_j^d = \beta_i^R, (i = 1, 2, \cdots, N_d) \tag{4.4.15c}$$

其中利用了对称性 $\chi_{ij}^R = \chi_{ji}^R$, 即要求 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称的算

$$(N_\nu^e, \boldsymbol{L} N_\mu^e) = (\boldsymbol{L} N_\nu^e, N_\mu^e) \tag{4.4.15d}$$

否则得不到方程 (4.4.15c). 于是可以决定结点值 $\psi_\nu^e$, 然后代入方程 (4.4.13b) 得到待求函数 $\psi(\boldsymbol{r})$.

下面以边值问题式 (4.4.10a) 为例来说明, 相应的泛函为

$$J(\psi) = \iint_G \psi \boldsymbol{L} \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_G f(x,y)\psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\int_{\partial G_2} \frac{b}{\beta}\psi \mathrm{d}S \tag{4.4.16a}$$

利用恒等式 $\nabla \cdot (p\psi\nabla\psi) = p\nabla\psi \cdot \nabla\psi + \psi\nabla \cdot (p\nabla\psi)$ 和 Green 公式, 上式写成

$$\begin{aligned} J(\psi) = &\iint_G \left[ p\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + p\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + c\psi^2 \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial G_2} \frac{\alpha}{\beta}\psi^2 \mathrm{d}S \\ &- 2\iint_G f(x,y)\psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\int_{\partial G_2} \frac{b}{\beta}\psi \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{4.4.16b}$$

注意: $(\psi, \boldsymbol{L}\psi) = (\boldsymbol{L}\psi, \psi)$ 一定要转换到双线性形式 $D(\psi,\psi)$ 形式后再微分, 否则对线性插值得到 $\boldsymbol{L}\psi = 0$ 的不合理结果. 区域 $G$ 分成 $M$ 个三角形单元后, 上式离散化成在 $M$ 个三角形单元上积分

$$\begin{aligned} J(\psi) = &\sum_{e=1}^{M} \iint_e \left[ p\left(\frac{\partial \psi^e}{\partial x}\right)^2 + p\left(\frac{\partial \psi^e}{\partial y}\right)^2 + c\psi^2 \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_{e=1}^{M_b} \int_e \frac{\alpha}{\beta}(\psi^e)^2 \mathrm{d}S \\ &- 2\sum_{e=1}^{M} \iint_e f^e(x,y)\psi^e(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\sum_{e=1}^{M_b} \int_e \frac{b^e}{\beta}\psi^e \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{4.4.16c}$$

其中 $M_b$ 是一条边在边界 $\partial G_2$ 上的三角形单元数. 上式中二个面积分在区域 $G$ 内的三角形单元 $e$ 上进行 (在本例中由于 $\psi^e$ 是 $x$ 和 $y$ 的线性函数, $\partial\psi^e/\partial x$ 和 $\partial\psi^e/\partial y$ 为常数); 二个线积分在组成边界 $\partial G_2$ 的三角形单元的一条边 (近似为区域 $G$ 的一部分边界) 上进行.

**边界单元的处理** 考虑在边界上的三角形单元的一条边近似为 $\partial G_2$ 的一部分. 设二个结点 $(j,k)$ 在边界上, 即线段 $\overline{jk}$ 为 $\partial G_2$ 的一部分, 线段 $\overline{jk}$ 上的任意一点坐标为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_j + t(x_k - x_j) \\ y &= y_j + t(y_k - y_j) \end{aligned}\right\}, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{4.4.17a}$$

函数 $\psi^e$ 为

$$\psi^e(x,y)=\psi_j^e+t(\psi_k^e-\psi_j^e) \tag{4.4.17b}$$

把上式和式 (4.4.17a) 代入式 (4.4.16a) 中的边界积分部分

$$\begin{aligned}J_b(\psi)\equiv&\sum_{e=1}^{M_b}\int_e\frac{\alpha}{\beta}(\psi^e)^2\mathrm{d}S-2\sum_{e=1}^{M_b}\int_e\frac{b^e}{\beta}\psi^e\mathrm{d}S\\=&\sum_{e=1}^{M_b}s_e\int_0^1\frac{\alpha}{\beta}[\psi_j^e+t(\psi_k^e-\psi_j^e)]^2\mathrm{d}t\\&-2\sum_{e=1}^{M_b}s_e\int_0^1\frac{b^e}{\beta}[\psi_j^e+t(\psi_k^e-\psi_j^e)]\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{4.4.17c}$$

其中 $\mathrm{d}S=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=s_e\mathrm{d}t$ 和 $s_e\equiv\sqrt{(x_k-x_j)^2+(y_k-y_j)^2}$. 上式完成积分后, 泛函 $J_b(\psi)$ 是结点值 $\psi_j^e$ 和 $\psi_k^e$ 的二次函数.

显然, 最后得到的泛函 $J(\psi)$ 是所有结点值 $\psi_i^d,(i=1,2,\cdots,N_d)$(其中 $N_d$ 是总的独立的节点数. 注意：总节点数小于 $3M$. 如果是第一类边界条件, $N_d$ 不包括边界上的结点) 的二次函数

$$J(\psi)=\sum_{i,j=1}^{N_d}\chi_{ij}^R\psi_i^d\psi_j^d-2\sum_{i=1}^{N_d}\beta_i^R\psi_i^d \tag{4.4.18a}$$

其中系数 $\chi_{ij}^R$ 为**刚度矩阵**, 它来自式 (4.4.16c) 的前二个积分, 是对称的正定矩阵, 系数 $\beta_i^R$ 为**自由项**, 来自式 (4.4.16c) 的后二个积分. 由泛函 $J(\psi)$ 的极小得到

$$\frac{\partial J(\psi)}{\partial\psi_j^d}=2\left(\sum_{i=1}^{N_d}\chi_{ji}^R\psi_i^d-\beta_j^R\right)=0,(j=1,2,\cdots,N_d) \tag{4.4.18b}$$

即得到决定结点值的线性代数方程组

$$\sum_{i=1}^{N_d}\chi_{ji}^R\psi_i^d=\beta_j^R,(j=1,2,\cdots,N_d) \tag{4.4.18c}$$

由上式得到所有结点上的值, 继而得到函数 $\psi(x,y)$.

以上就是基于 Ritz 法的有限元近似求解边值问题的基本思路. 显然计算的关键是决定刚度矩阵和自由项. 从式 (4.4.16c), 原则上我们可以得到式 (4.4.18a), 但这是非常困难的, 也不切实际. 在有限元数值计算中, 从具体的单元出发可以得到刚度矩阵和自由项的表达式, 但过程比较复杂. 上述推导过程能更清晰说明有限元近似的基本原理.

**基于 Galerkin 法的有限元法** 仍然把区域 $G$ 用图 4.4.6 的三角形单元划分, 则基函数可选为插值函数 $N_\nu^e(\boldsymbol{r})$, 待求函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和任意检验函数 $v(\boldsymbol{r})$ 用基函数 $N_\nu^e(\boldsymbol{r})$ 展开为

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r}) &= \sum_{e=1}^{M}\psi^e(\boldsymbol{r}) = \sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\psi_\nu^e N_\nu^e(\boldsymbol{r})\\ v(\boldsymbol{r}) &= \sum_{q=1}^{M}v^q(\boldsymbol{r}) = \sum_{q=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}v_\nu^q N_\nu^q(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{4.4.19a}$$

其中 $v_\nu^q, (\nu = 1, 2, \cdots, P)$ 是检验函数 $v(\boldsymbol{r})$ 在单元 $q$ 上的 $P$ 个结点的值, 上式代入虚功方程 (4.2.12) 得到 (注意：为了表明与 Ritz 法的区别, 这里用算子 $\boldsymbol{L}$ 表示, 在 Ritz 法中, $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称算子, 故 $(\boldsymbol{L}\psi, v) = (\psi, \boldsymbol{L}v)$, 而 Galerkin 法没有这个限制) 得到

$$\sum_{q=1}^{M}\sum_{\nu,\mu=1}^{P}v_\nu^q\psi_\mu^q(\boldsymbol{L}N_\mu^q, N_\nu^q) = \sum_{q=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}v_\nu^q(f, N_\nu^q) \tag{4.4.19b}$$

得到上式, 已利用 $N_\nu^q$ 的性质：只有在单元 $q$ 内非零: $(\boldsymbol{L}N_\mu^e, N_\nu^q) = 0, (e \neq q)$. 上式对任意的 $v_\nu^q$ 都成立. 注意到 $M \cdot P$ 个 $\psi_\mu^q$ 不是全部独立的, 对方程 (4.4.19b) 进行重新排列和合并, 原则上, 方程 (4.4.19b) 可以用独立的 $N_d$ 个结点值 $\psi_i^d$ 和 $v_i^d$, $(i = 1, 2, \cdots, N_d)$ 表示成

$$\sum_{i,j=1}^{N_d}\chi_{ij}^G\psi_j^d v_i^d = \sum_{i=1}^{N_d}\beta_i^G v_i^d \tag{4.4.19c}$$

或者

$$\sum_{i=1}^{N_d}\left(\sum_{j=1}^{N_d}\chi_{ij}^G\psi_j^d - \beta_i^G\right)v_i^d = 0 \tag{4.4.20a}$$

其中 $\chi_{ij}^G$ 和 $\beta_i^G$ 分别来自于 $(\boldsymbol{L}N_\mu^q, N_\nu^q)$ 和 $(f, N_\nu^q)$ 的合并, 它们与方程 (4.4.18a) 中的 $\chi_{ij}^R$ 和 $\beta_i^R$ 类似. 由 $v_i^d$ 的任意性得到决定 $\psi_j^d$ 的线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^{N_d}\chi_{ij}^G\psi_j^d = \beta_i^G, (i = 1, 2, \cdots, N_d) \tag{4.4.20b}$$

当 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称算子时, $(\boldsymbol{L}N_\mu^q, N_\nu^q) = (N_\mu^q, \boldsymbol{L}N_\nu^q)$, $\chi_{ij}^G = \chi_{ij}^R$, 故上式就是方程 (4.4.18c), 但对非 Hermite 对称算子, 就得不到方程 (4.4.18c), 而方程 (4.4.20b) 总是成立的. 可见, 基于 Galerkin 方法不仅同样可以得到有限元近似方程, 而且比 Ritz 法范围更广.

### 4.4.3　基于 Galerkin 法的时域有限元近似

考虑含时边值问题

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{K}\psi(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{r}\in G \\
\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\partial G}=b(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{r}\in\partial G
\end{gathered}
\tag{4.4.21a}
$$

注意: 上式与方程 (4.2.47a) 的区别, 这里不要求边界条件齐次. 待求函数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 和任意检验函数 $v(\boldsymbol{r})$ 仍然用基函数 $N_\nu^e(\boldsymbol{r})$ 展开, 但函数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 的结点值随时间变化

$$
\begin{gathered}
\psi(\boldsymbol{r},t)=\sum_{e=1}^{M}\psi^e(\boldsymbol{r},t)=\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\psi_\nu^e(t)N_\nu^e(\boldsymbol{r}) \\
v(\boldsymbol{r})=\sum_{q=1}^{M}v^q(\boldsymbol{r})=\sum_{q=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}v_\nu^q N_\nu^q(\boldsymbol{r})
\end{gathered}
\tag{4.4.21b}
$$

代入虚功方程 (4.2.47b) 并且利用 $(\boldsymbol{L}N_\mu^e,N_\nu^q)=0,(e\neq q)$ 得到

$$
\sum_{q=1}^{M}\sum_{\nu,\mu=1}^{P}v_\nu^q\psi_\mu^e(t)(\boldsymbol{L}N_\mu^q,N_\nu^q)+\sum_{q=1}^{M}\sum_{\mu,\nu=1}^{P}v_\nu^q(N_\mu^q,N_\nu^q)\boldsymbol{K}\psi_\mu^e(t)=\sum_{q=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}v_\nu^q(f,N_\nu^q)
$$

与得到方程 (4.4.19c) 类似, 对上式进行重新排列和合并, 用独立的 $N_d$ 个结点值 $\psi_i^d(t)$ 和 $v_i^d$, $(i=1,2,\cdots,N_d)$ 表示得到

$$
\sum_{i,j=1}^{N_d}\delta_{ij}^G\boldsymbol{K}\psi_j^d(t)v_i^d+\sum_{i,j=1}^{N_d}\chi_{ij}^G\psi_j^d(t)v_i^d=\sum_{i=1}^{N_d}\beta_i^G(t)v_i^d \tag{4.4.21c}
$$

其中 $\chi_{ij}^G$ 和 $\delta_{ij}^G$ 分别来自于 $(\boldsymbol{L}N_\mu^q,N_\nu^q)$ 和 $(N_\mu^q,N_\nu^q)$ 的重新排列和合并, $\beta_i^G(t)$ 来自于 $(f,N_\nu^q)$ 的重新排列和合并, 或者写成

$$
\sum_{i=1}^{N_d}\left\{\sum_{j=1}^{N_d}[\delta_{ij}^G\boldsymbol{K}\psi_j^d(t)+\chi_{ij}^G\psi_j^d(t)]-\beta_i^G(t)\right\}v_i^d=0 \tag{4.4.22a}
$$

由 $v_i^d$ 的任意性

$$
\sum_{j=1}^{N_d}[\delta_{ij}^G\boldsymbol{K}\psi_j^d(t)+\chi_{ij}^G\psi_j^d(t)]=\beta_i^G(t),(i=1,2,\cdots,N_d) \tag{4.4.22b}
$$

上式是结点值 $\psi_j^d(t)$ 的 $N_d$ 个联立常微分方程, 可用时域差分法进一步数值计算. 注意: 方程 (4.4.21a) 中的边界条件将自动出现在积分 $(\boldsymbol{L}N_\mu^e,N_\nu^q)$ 中; 如果是第一类边界条件, 则边界上的值已知, 相应的独立结点数变少.

### 4.4.4 本征值问题的有限元近似

**Ritz 法** 首先介绍基于 Ritz 法求解本征值问题. 由式 (4.4.13b), 本征函数表示为

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_{e=1}^{M}\psi^e(\boldsymbol{r})=\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\psi_\nu^e N_\nu^e(\boldsymbol{r}) \tag{4.4.23a}$$

代入泛函式 (4.3.27b) 得到

$$J(\psi)=\sum_{q=1}^{M}\sum_{\nu,\mu=1}^{P}\psi_\nu^q\psi_\mu^q(N_\mu^q,\boldsymbol{L}N_\nu^q)-\lambda\sum_{q=1}^{M}\sum_{\mu=1}^{P}\psi_\nu^q\psi_\mu^q(N_\nu^q,N_\mu^q) \tag{4.4.23b}$$

得到上式, 已利用 $N_\nu^q$ 的性质, 即只有在单元 $q$ 内非零: $(N_\mu^e,\boldsymbol{L}N_\nu^q)=0,(e\neq q)$. 对上式进行重新排列和合并, 用独立的 $N_d$ 个结点值 $\psi_i^d$, $(i=1,2,\cdots,N_d)$ 表示得到

$$J(\psi)=\sum_{i,j=1}^{N_d}\chi_{ij}^R\psi_i^d\psi_j^d-\lambda\sum_{i,j=1}^{N_d}\delta_{ij}^R\psi_i^d\psi_j^d \tag{4.4.24a}$$

其中 $\chi_{ij}^R$ 和 $\delta_{ij}^R$ 分别来自于 $(N_\mu^q,\boldsymbol{L}N_\nu^q)$ 和 $(N_\nu^q,N_\mu^q)$ 的重新排列和合并. 由泛函 $J(\psi)$ 取极小的条件得到

$$\frac{\partial J(\psi)}{\partial\psi_\nu^d}=2\sum_{i=1}^{N_d}(\chi_{ij}^R-\lambda\delta_{ij}^R)\psi_i^d=0,\quad(j=1,2,\cdots,N_d) \tag{4.4.24b}$$

得到上式利用了对称性 $\chi_{ij}^R=\chi_{ji}^R$(注意: Galerkin 法不要这个性质) 和 $\delta_{ij}^R=\delta_{ji}^R$ (这个条件要求 $N_\nu^q$ 取实函数). 于是得到决定本征值的方程

$$\det(\chi_{ij}^R-\lambda\delta_{ij}^R)=0 \tag{4.4.24c}$$

**基于 Galerkin 法的求解本征值问题** 本征方程 (4.3.27a) 中取 $f\equiv\lambda\rho\psi$ 代入方程 (4.4.19b) 得到

$$\sum_{q=1}^{M}\sum_{\nu,\mu=1}^{P}[(\boldsymbol{L}N_\mu^q,N_\nu^q)-\lambda(N_\mu^q,N_\nu^q)]\psi_\mu^q v_\nu^q=0 \tag{4.4.25a}$$

对上式进行重新排列和合并用独立的 $N_d$ 个结点值 $\psi_i^d$ 和 $v_i^d$, $(i=1,2,\cdots,N_d)$ 表示得到

$$\sum_{i=1}^{N_d}\left[\sum_{j=1}^{N_d}(\chi_{ij}^G-\lambda\delta_{ij}^G)\psi_j^d\right]v_i^d=0 \tag{4.4.25b}$$

其中 $\chi_{ij}^G$ 和 $\delta_{ij}^G$ 来自于 $(\boldsymbol{L}N_\mu^q,N_\nu^q)$ 和 $(N_\nu^q,N_\mu^q)$ 的重新排列和合并. 由 $v_i^d$ 的任意性

$$\sum_{j=1}^{N_d}(\chi_{ij}^G-\lambda\delta_{ij}^G)\psi_j^d=0,(i=1,2,\cdots,N_d) \tag{4.4.25c}$$

故得到决定本征值的方程

$$\det(\chi_{ij}^G - \lambda\delta_{ij}^G) = 0 \tag{4.4.25d}$$

当 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称算子时 $(\boldsymbol{L}N_\mu^q, N_\nu^q) = (N_\mu^q, \boldsymbol{L}N_\nu^q)$, $\chi_{ij}^G = \chi_{ij}^R$, 故上式就是方程 (4.4.24c).

从以上推导可见, 从 Galerkin 法出发, 更容易得到有限元方程.

**二次三角形单元**　设三角形单元 $e$ 内的函数 $\psi(x,y)$ 用二次函数插值为

$$\begin{aligned}\psi^e(x,y) \approx a^e + b^e x + c^e y + d^e x^2 + f^e xy + g^e y^2 \\ (x,y)\in e, (e=1,2,\cdots,M)\end{aligned} \tag{4.4.26a}$$

为了决定上式中的 6 个系数, 每个单元 $e$ 内最少必须包含 6 个结点, 如图 4.4.7, 在三角形的 3 个顶点取 3 个结点 (为了方便, 用数字 1, 2 和 3 代替图 4.4.6 中的 $i$, $j$ 和 $k$), 另外 3 个结点 (用数字表示 4, 5 和 6 表示) 位于三条边的中点. 设 6 个结点上函数 $\psi(x,y)$ 的值为 $\psi_j^e, (j=1,2,\cdots,6)$, 由式 (4.4.26a) 可以得到决定 6 个系数的线性代数方程组, 再回代到式 (4.4.26a), 得到

$$\psi^e(x,y) \approx \sum_{j=1}^{6} N_j^e(x,y)\psi_j^e, (x,y)\in e, (e=1,2,\cdots,M) \tag{4.4.26b}$$

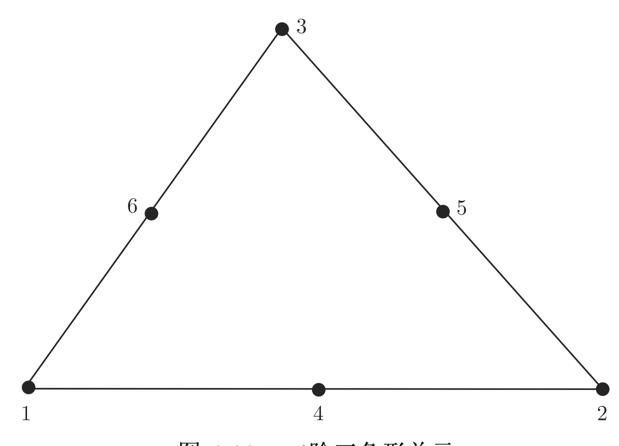



图 4.4.7　二阶三角形单元

其中 6 个基函数为

$$\begin{aligned}&N_j^e(x,y) = (2L_j^e - 1)L_j^e, (j=1,2,3) \\ &N_4^e(x,y) = 4L_1^e L_2^e; N_5^e(x,y) = 4L_2^e L_3^e; N_5^e(x,y) = 4L_3^e L_1^e,\end{aligned} \tag{4.4.27a}$$

其中

$$L_\nu^e = \frac{1}{2\Delta^e}(a_\nu^e + b_\nu^e x + c_\nu^e), (\nu = 1,2,3) \tag{4.4.27b}$$

式中 $\Delta^e$，$a_\nu^e$，$b_\nu^e$ 和 $c_\nu^e$ 与式 (4.4.11c) 和 (4.4.12c) 相同 (把式 (4.4.12c) 中的编码 $i$, $j$ 和 $k$ 改成 1, 2 和 3). 于是整个区域 $G$ 上的函数 $\psi(x,y)$ 可以写成

$$\psi(x,y)=\sum_{e=1}^{M}\psi^e(x,y)\approx\sum_{e=1}^{M}\sum_{j=1}^{6}N_j^e(x,y)\psi_j^e \tag{4.4.27c}$$

余下的讨论类似, 不重复.

## 4.5　变分的其他近似方法

本节介绍求变分近似的其他几种方法: Kantorovich 法, 该法通过 Ritz 法把多变量函数的变分问题转化成单个变量, 然后求解相应的 Euler 方程, 得到近似解; 最速下降法 (又称为梯度法), 是最优化方法中最古老的一种, 其他方法或是它的变形, 或是受它的启发而得到的, 因此是最优化方法的基础; 共轭梯度法, 该法克服了最速下降法收敛慢的缺点, 是目前最优化的有效算法之一; 矩量法, 也称为广义 Galerkin 法, 该法已经广泛地应用于实际问题中, 是我们介绍的重点.

### 4.5.1　Kantorovich 法

Kantorovich 法一般用于多自变量函数的泛函问题, 本质上与 Ritz 法相同. 以下列泛函极值问题为例

$$J(u)=\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y,u_x,u_y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{4.5.1a}$$

其中 $u(x,y)$ 的定义域为两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ 与两条曲线 $y=\phi_1(x)$ 和 $y=\phi_2(x)$ 围成的区域 $G$, 如图 4.5.1.

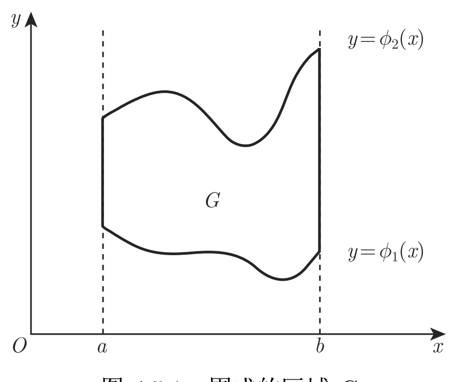



图 4.5.1　围成的区域 $G$

取适当的完备系 $\{\psi_i(x,y)\}$ 且线性独立, 在 Ritz 法中把变分问题的第 $n$ 级近似解 $u_n(x,y)$ 表示为

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k(x,y) \tag{4.5.1b}$$

其中 $a_k$ 为待定常数. Kantorovich 法与 Ritz 法不同之处为, 把上述近似解中的待定常数改为待定函数

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\psi_k(x,y) \tag{4.5.1c}$$

代入式 (4.5.1a)

$$J(u_n)=\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f\left(x,y,\frac{\partial u_n}{\partial x},\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{4.5.2a}$$

上式对 $y$ 的积分可积出

$$J(u_n)=\int_a^b\Phi[x,a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x),{a'}_1(x),{a'}_2(x),\cdots,{a'}_n(x)]\mathrm{d}x \tag{4.5.2b}$$

因此, 原变分式 (4.5.1a) 变成求 $a_i(x),(i=1,2,\cdots,n)$ 使上式极小. 由式 (4.1.7c) 得到泛函式 (4.5.2b) 的 Euler 方程

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\Phi}{\partial {a'}_i}=0,(i=1,2,\cdots,n) \tag{4.5.2c}$$

这个 Euler 方程的解包含 $2n$ 个积分常数, 这些常数由 $u_n(x,y)$ 在两端点 $x=a$ 和 $b$ 的边界条件决定. 由于式 (4.5.1c) 中函数 $a_k(x)$ 的选择余地比式 (4.5.1b) 中常数 $a_k$ 的选择余地大得多, 因此, 即使选取同样的展开函数 $\{\psi_i(x,y)\}$ 以及同样的展开项数 $n$, Kantorovich 法比 Ritz 法得到的变分近似解更精确.

**例 4.5.1**　用变分法求矩形区域 $G:[-a<x<a;-b<y<b]$ 中二维 Poisson 方程的第一边值问题的近似解

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-1,(x,y)\in G;u|_{\partial G}=0 \tag{4.5.3a}$$

相应的泛函为

$$J(u)=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.5.3b}$$

考虑到问题的对称性质, 取 $\psi_1(x,y)=b^2-y^2$, 第一级近似为

$$u_1(x,y)\approx\xi(x)\psi_1(x,y) \tag{4.5.3c}$$

代入泛函式 (4.5.3b) 得到

$$J(u_1)=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[(b^2-y^2)^2\xi'^2(x)+4y^2\xi^2(x)-2(b^2-y^2)\xi(x)]\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

上式对 $y$ 积分后可得到

$$J(u_1)=\int_{-a}^{a}\left[\frac{16b^5}{15}\xi'^2(x)+\frac{8b^3}{3}\xi^2(x)-\frac{8b^2}{3}\xi(x)\right]\mathrm{d}x \tag{4.5.3d}$$

相应的 Euler 方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi(x)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{5}{2b^2}\xi(x)=-\frac{5}{4b^2} \tag{4.5.4a}$$

该常微分方程的解为

$$\xi(x)=C_1\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{x}{b}\right)+C_2\sinh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{x}{b}\right)+\frac{1}{2} \tag{4.5.4b}$$

其中积分常数由 $u_1(-a,y)=u_1(+a,y)=0$ 决定

$$\begin{aligned}(b^2-y^2)\left[C_1\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{a}{b}\right)-C_2\sinh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{a}{b}\right)+\frac{1}{2}\right]=0\\(b^2-y^2)\left[C_1\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{a}{b}\right)+C_2\sinh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{a}{b}\right)+\frac{1}{2}\right]=0\end{aligned} \tag{4.5.4c}$$

于是

$$C_1=-\frac{1}{2}\text{arccosh}^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{a}{b}\right);C_2=0 \tag{4.5.5a}$$

因此第一级近似解为

$$u_1(x,y)\approx\frac{1}{2}(b^2-y^2)\left[1-\frac{\cosh\sqrt{5/2}(x/b)}{\cosh\sqrt{5/2}(a/b)}\right] \tag{4.5.5b}$$

方程 (4.5.3a) 的精确解由式 (4.2.34d) 给出. 数值计算表明, Kantorovich 法得到的一次近似解式 (4.5.5b) 比 Ritz 法得到的解式 (4.2.32b) 有所改善.

**例 4.5.2**　用变分法求

$$G:\left[y=\phi_{1,2}(x)=\mp\frac{x}{\sqrt{3}};x=b\right] \tag{4.5.6a}$$

围成的三角形区域 (如图 4.5.2) 中二维 Poisson 方程第一类边值问题的近似解

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-1,(x,y)\in G \tag{4.5.6b}$$

在三角形的边界 $u=0$. 相应的泛函为

$$J(u)=\int_0^b\int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2u\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{4.5.6c}$$

显然解应该关于 $y$=0 对称, 又必须满足边界 $y=\phi_{1,2}(x)$ 条件, 因此取

$$\psi_1(x,y)=y^2-\frac{x^2}{3} \tag{4.5.7a}$$

令一次近似解 $u_1(x,y)=\xi(x)\psi_1(x,y)$, 代入式 (4.5.6c)

$$\begin{aligned}J(u)&=\int_0^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\left\{\left[-\frac{2}{3}x\xi+\left(y^2-\frac{x^2}{3}\right)\xi'\right]^2+4y^2\xi^2-2\left(y^2-\frac{x^2}{3}\right)\xi\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\frac{8\sqrt{3}}{405}\int_0^b[2x^5\xi'^2+10x^4\xi\xi'+30x^3\xi^2+15x^3\xi]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.5.7b}$$

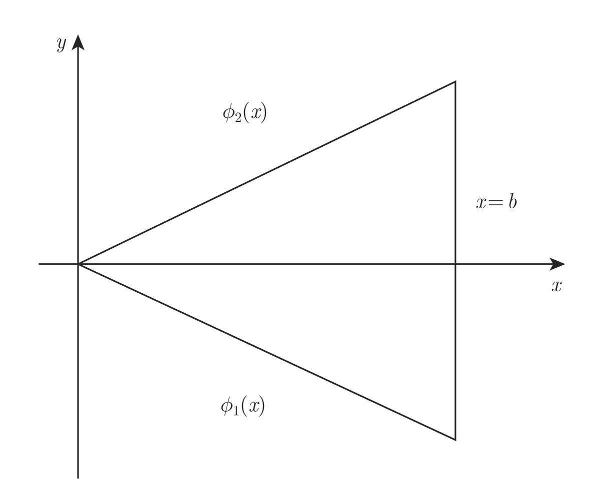



图 4.5.2 三角形区域

该泛函的 Euler 方程为

$$x^2\xi''+5x\xi'-5\xi=\frac{15}{4} \tag{4.5.8a}$$

方程的通解为

$$\xi(x)=C_1x+C_2\frac{1}{x^5}-\frac{3}{4} \tag{4.5.8b}$$

由于要求在 $x$=0 处有限, 故 $C_2=0$. 由 $u_1(b,y)=0$ 得 $C_1=3/(4b)$. 最后得到

$$u_1(x,y)\approx-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(y^2-\frac{x^2}{3}\right) \tag{4.5.8c}$$

### 4.5.2 最速下降法与有界正定算子

在 4.2 节中把求解算子方程

$$\boldsymbol{L}\psi = f \tag{4.5.9a}$$

归结为求泛函 $J(\psi)$ 的极小问题. 为简单, 设 $\psi$ 和 $f$ 都是实函数

$$J(\psi) = (\boldsymbol{L}\psi, \psi) - 2(\psi, f) \tag{4.5.9b}$$

把 $J(\psi)$ 看作 $\psi$ 空间中的一个曲面, 则求 $J(\psi)$ 的极小相当于求曲面上的最低点相对应的坐标 $\psi_0$, 即是方程 (4.5.9a) 的解. 用逐次逼近法来求出 $\psi_0$. 为此选初始点 $\psi_1$, 如果 $\boldsymbol{L}\psi_1 = f$, 则 $\psi_1$ 即是 $\psi_0$, 但如果 $\boldsymbol{L}\psi_1 - f = v_1 \neq 0$, 则可以把 $\psi_1$ 作为第一次近似解. 问题是以什么样的方式由 $\psi_1$ 向 $\psi_0$ 点的逼近是最快呢? 想象三维曲面情形: 由一点向另一点的逼近方式是多种多样的. 最速下降法的意义就是由 $\psi_1$ 向 $\psi_0$ 逼近方法是最快的!

注意: 以多元函数 $f(\boldsymbol{r})$ 的变化为例, $\Delta f(\boldsymbol{r}) = \nabla f \cdot \Delta \boldsymbol{r}$, 故当 $\Delta \boldsymbol{r}$ 与梯度 $\nabla f$ 方向相同时变化最大. 同样, 对泛函 $J$ 的变化

$$\delta J = J(\psi + \delta\psi) - J(\psi) = 2(\delta\psi, \boldsymbol{L}\psi - f) \tag{4.5.9c}$$

当 $\delta\psi$ 与 $\boldsymbol{L}\psi - f$ 相等时变化最大, 故 $v_1 = \boldsymbol{L}\psi_1 - f$ 可看作是 $J(\psi)$ 在点 $\psi_1$ 的梯度, 在梯度方向变化速度最快. 因此, 我们沿梯度方向进行搜索, 取第二次近似解

$$\psi_2 = \psi_1 + t_1 v_1 \tag{4.5.9d}$$

其中 $v_1 = \boldsymbol{L}\psi_1 - f \neq 0$. 如果 $\psi_2 = \psi_0$ 则 $\psi_0 - \psi_1 = t_1 v_1$, 因此 $t_1 v_1$ 表示第一次近似解与真解的” 距离”. 设 $\psi_2 \neq \psi_0$, 则 $t_1$ 表示向真解 $\psi_0$ 逼近的速度. 最速下降法就是求 $t_1$ 使 $\psi_2$ 向 $\psi_0$ 逼近的速度最快.

把第二次近似解 $\psi_2$ 代入式 (4.5.9b), 选取 $t_1$ 使 $J(\psi_2)$ 极小

$$\begin{aligned} J(\psi_2) =& [\boldsymbol{L}(\psi_1 + t_1 v_1), \psi_1 + t_1 v_1] - 2(f, \psi_1 + t_1 v_1) \\ =& (\boldsymbol{L}\psi_1, \psi_1) + 2t_1(\boldsymbol{L}\psi_1, v_1) + t_1^2(\boldsymbol{L}v_1, v_1) \\ & - 2(f, \psi_1) - 2t_1(f, v_1) \end{aligned} \tag{4.5.10a}$$

其中利用了 $\boldsymbol{L}$ 的 Hermite 性: $(\boldsymbol{L}\psi_1, v_1) = (\psi_1, \boldsymbol{L}v_1)$. 一旦 $\psi_1$ 选定, $v_1$ 也决定, 上式中 $J(\psi_2)$ 是 $t_1$ 的函数, 求极小

$$\frac{\mathrm{d}J(\psi_2)}{\mathrm{d}t_1} = 2(\boldsymbol{L}\psi_1, v_1) - 2(f, v_1) + 2t_1(\boldsymbol{L}v_1, v_1) = 0 \tag{4.5.10b}$$

即求得

$$t_1 = -\frac{(\boldsymbol{L}\psi_1 - f, v_1)}{(\boldsymbol{L}v_1, v_1)} = -\frac{(v_1, v_1)}{(\boldsymbol{L}v_1, v_1)} \tag{4.5.11a}$$

如果算子 $\boldsymbol{L}$ 正定

$$\frac{\mathrm{d}^2 J}{\mathrm{d}t_1^2} = 2(\boldsymbol{L}v_1, v_1) > 0 \tag{4.5.11b}$$

故式 (4.5.11a) 的 $t_1$ 精确使 $J(\psi_2)$ 取极小. 于是, 第二次近似解

$$\psi_2 = \psi_1 - \frac{(v_1, v_1)}{(\boldsymbol{L}v_1, v_1)} v_1 \tag{4.5.11c}$$

向精确解 $\psi_0$ 逼近速度最快. 如果 $\boldsymbol{L}\psi_2 - f = v_2 \neq 0$, 可取第三次近似解

$$\psi_3 = \psi_2 + t_2 v_2 \tag{4.5.12a}$$

同样, 可求得

$$t_2 = -\frac{(v_2, v_2)}{(\boldsymbol{L}v_2, v_2)} \tag{4.5.12b}$$

一般, 如果第 $n$ 个近似解为 $\psi_n$, $\boldsymbol{L}\psi_n - f = v_n \neq 0$, $(n+1)$ 次近似解为

$$\psi_{n+1} = \psi_n + t_n v_n \tag{4.5.13a}$$

而 $t_n$ 由下式决定

$$t_n = -\frac{(v_n, v_n)}{(\boldsymbol{L}v_n, v_n)} \tag{4.5.13b}$$

因此, 可以得到一个近似解的序列 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \cdots$. 问题是在什么条件下, $\{\psi_n\}$ 收敛到精确解 $\psi_0$?

可以证明, 如果算子 $\boldsymbol{L}$ 正定且有界, 即对任一允许函数 $\psi$, 存在正数 $m > 0$ 和 $M > 0$, 满足

$$m||\psi||^2 \leqslant (\boldsymbol{L}\psi, \psi) \leqslant M||\psi||^2 \tag{4.5.14a}$$

则序列 $\{\psi_n\}$ 收敛到精确解 $\psi_0$, 收敛速度估计为

$$\|\psi_{n+1} - \psi_0\| \leqslant \|\psi_1 - \psi_0\| \cdot \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \tag{4.5.14b}$$

由于最速下降法要求算子 $\boldsymbol{L}$ 正定且有界, 故通常 $\boldsymbol{L}$ 是积分算子, 即 $\boldsymbol{L}\psi = f$ 是积分方程. 积分方程的理论将在下一章介绍, 这里给出一个上述方法应用的例子.

**例 4.5.3** 在 $L^2(0, \pi)$ 上考虑积分方程

$$\psi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)\psi(s)\mathrm{d}s = f(x) \tag{4.5.15a}$$

其中 $f(x) \in L^2(0,\pi)$. 显然算子 $\boldsymbol{L}$ 有形式

$$\boldsymbol{L}\psi = \psi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)\psi(s)\mathrm{d}s \tag{4.5.15b}$$

内积 $(\boldsymbol{L}\psi_1, \psi_2)$ 定义为 (见第五章)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{L}\psi_1, \psi_2) &= \int_0^{\pi} \left[\psi_1(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)\psi_1(s)\mathrm{d}s\right] \psi_2(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \psi_1(x)\psi_2(x)dx - \lambda \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x+s)\psi_1(x)\psi_2(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \left[\psi_2(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)\psi_2(s)\mathrm{d}s\right] \psi_1(x)\mathrm{d}x = (\psi_1, \boldsymbol{L}\psi_2)\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称算子. 下面证明 $\boldsymbol{L}$ 正定且有界: 因 $(\boldsymbol{L}\psi, \psi)$ 有下式决定

$$(\boldsymbol{L}\psi, \psi) = \int_0^{\pi} \psi^2(x)\mathrm{d}x - \lambda \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x+s)\psi(s)\psi(x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \tag{4.5.15c}$$

利用 Schwarz 不等式, 对任意 $f, g \in L^2(0,\pi)$ 有关系

$$\left[\int_0^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_0^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x \int_0^{\pi} g^2(x)\mathrm{d}x \tag{4.5.16a}$$

取

$$f(x) = \int_0^{\pi} \sin(x+s)\psi(s)\mathrm{d}s; g(x) = \psi(x) \tag{4.5.16b}$$

则

$$\begin{aligned}&\left\{\int_0^{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin(x+s)\psi(s)\mathrm{d}s\right] \psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2 \\ \leqslant &\int_0^{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin(x+s)\psi(s)\mathrm{d}s\right]^2 \mathrm{d}x \cdot \int_0^{\pi} \psi^2(x)\mathrm{d}x \\ \leqslant &\int_0^{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin^2(x+s)\mathrm{d}s \cdot \int_0^{\pi} \psi^2(s)\mathrm{d}s\right] \mathrm{d}x \cdot \int_0^{\pi} \psi^2(x)\mathrm{d}x \\ = &\frac{\pi^2}{2} \left[\int_0^{\pi} \psi^2(x)\mathrm{d}x\right]^2\end{aligned}$$

得到第二步不等式, 再一次利用了 Schwartz 不等式. 于是有

$$\left[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x+s)\psi(s)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right]^2 \leqslant \frac{\pi^2}{2} \left[\int_0^{\pi} \psi^2(x)\mathrm{d}x\right]^2 \tag{4.5.16c}$$

或者

$$\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x+s)\psi(s)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \psi^2(x)\mathrm{d}x \tag{4.5.16d}$$

由式 (4.5.15c)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{L}\psi,\psi) &\geqslant \int_0^{\pi}\psi^2(x)\mathrm{d}x-\lambda\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x+s)\psi(s)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right| \\ &\geqslant \int_0^{\pi}\psi^2(x)\mathrm{d}x-\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\psi^2(x)\mathrm{d}x=\left(1-\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right)(\psi,\psi)\end{aligned} \tag{4.5.17a}$$

另一方面

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{L}\psi,\psi) &\leqslant \int_0^{\pi}\psi^2(x)\mathrm{d}x+\lambda\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x+s)\psi(s)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_0^{\pi}\psi^2(x)\mathrm{d}x+\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\psi^2(x)\mathrm{d}x=\left(1+\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right)(\psi,\psi)\end{aligned} \tag{4.5.17b}$$

故从上二式可得

$$\left(1-\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right)||\psi||^2\leqslant(\boldsymbol{L}\psi,\psi)\leqslant\left(1+\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right)||\psi||^2 \tag{4.5.18a}$$

比较式 (4.5.14a), 显然有

$$m=\left(1-\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right);M=\left(1+\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right) \tag{4.5.18b}$$

故当 $\lambda<\sqrt{2}/\pi$, $\boldsymbol{L}$ 正定且有界, 可用最速下降法. 如果 $\lambda>\sqrt{2}/\pi$

$$(\boldsymbol{L}\psi,\psi)\geqslant k||\psi||^2 \tag{4.5.18c}$$

其中 $k=1-\lambda\pi/\sqrt{2}<0$, 称算子 **$\boldsymbol{L}$具有下界**.

回到我们的问题, 用最速下降法解积分方程 (4.5.15a). 取 $\lambda=0.1$ 和 $f(x)=1$

$$\psi(x)-0.1\int_0^{\pi}\sin(x+s)\psi(s)\mathrm{d}s=1 \tag{4.5.19a}$$

因上式第二项系数为 0.1 可看作小项, 于是取第一次近似解 $\psi_1(x)=1$ 则

$$v_1=\boldsymbol{L}\psi_1-f=1-0.1\int_0^{\pi}\sin(x+s)\cdot1\cdot\mathrm{d}s-1=-0.2\cos x \tag{4.5.19b}$$

$$t_1=-\frac{(v_1,v_1)}{(\boldsymbol{L}v_1,v)}=\frac{-0.04\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2x\mathrm{d}x}{(\boldsymbol{L}v_1,v)}=\frac{-0.02\pi}{(\boldsymbol{L}v_1,v)} \tag{4.5.19c}$$

容易求得 $(\boldsymbol{L}v_1,v_1)=0.02\pi$, 故 $t_1=-1$, 于是第二次近似解为

$$\psi_2=\psi_1+t_1v_1=1+0.2\cos x \tag{4.5.20a}$$

则

$$v_2 = \boldsymbol{L}\psi_2 - f = 0.01\pi \sin x \tag{4.5.20b}$$

而

$$t_2 = -\frac{(v_2, v_2)}{(\boldsymbol{L}v_2, v_2)} = +1 \tag{4.5.20c}$$

故第三次近似解为

$$\psi_3 = \psi_2 + t_2 v_2 = 1 + 0.2\cos x + 0.01\pi \sin x \tag{4.5.21a}$$

可以求得 (见第五章), 方程 (4.5.19a) 的严格解为

$$\psi(x) = 1 + \frac{0.2}{1 - 0.0025\pi^2}\cos x + \frac{0.01\pi}{1 - 0.0025\pi^2}\sin x \tag{4.5.21b}$$

可见第三次迭代后近似解就相当接近严格解了.

### 4.5.3　共轭梯度法

首先介绍 $\boldsymbol{L}$-正交及 $\boldsymbol{L}$-正交序列概念. 在 4.2 节中, 定义带算子 $\boldsymbol{L}$ 内积

$$\langle u|\boldsymbol{L}|v\rangle = (\boldsymbol{L}u, v) = (u, \boldsymbol{L}v) \tag{4.5.22a}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是正的 Hermite 对称算子, 新的范数为

$$||u||_{\boldsymbol{L}}^2 = \langle u|\boldsymbol{L}|u\rangle = (\boldsymbol{L}u, u) \tag{4.5.22b}$$

对函数序列 $\{p_1, p_2, \cdots\}$, 如果带算子内积正交

$$\langle p_i|\boldsymbol{L}|p_j\rangle = 0, \quad (i \neq j) \tag{4.5.22c}$$

这样的序列称为 $\boldsymbol{L}$-正交序列或**共轭方向序列**(可见共轭序列是正交序列的推广). 如果序列 $\{e_i\}$ 线性独立但不 $\boldsymbol{L}$-正交, 则可以通过 Gram-Schmidt 过程求 $\boldsymbol{L}$-正交序列

$$\begin{aligned}
&p_1 = e_1 \\
&p_2 = e_2 - \frac{\langle e_2|\boldsymbol{L}|p_1\rangle}{\langle p_1|\boldsymbol{L}|p_1\rangle}p_1 \\
&\cdots\cdots \\
&p_n = e_n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\langle e_n|\boldsymbol{L}|p_k\rangle}{\langle p_k|\boldsymbol{L}|p_k\rangle}p_k; (n > 1)
\end{aligned} \tag{4.5.23a}$$

事实上, 令

$$p_n = e_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k p_k; (n > 1) \tag{4.5.23b}$$

上式用 $p_j$ 两边求带算子内积

$$\langle p_j|\boldsymbol{L}|p_n\rangle = \langle p_j|\boldsymbol{L}|e_n\rangle + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \langle p_j|\boldsymbol{L}|p_k\rangle \tag{4.5.23c}$$

当 $j < n$, 要求 $\langle p_j|\boldsymbol{L}|p_n\rangle = 0$, 同样 $j \neq k$ 时 $\langle p_j|\boldsymbol{L}|p_k\rangle = 0$, 因此从上式可求得

$$a_k = -\frac{\langle p_k|\boldsymbol{L}|e_n\rangle}{\langle p_k|\boldsymbol{L}|p_k\rangle} \tag{4.5.23d}$$

即得到式 (4.5.23a).

考虑定义在 Hilbert 空间上的二次泛函

$$J(\psi) = (\psi, \boldsymbol{L}\psi) - 2(f, \psi) \tag{4.5.24a}$$

如果 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称的算子且正定有界, 即对任一允许函数 $\psi$, 存在正数 $m > 0$ 和 $M > 0$, 满足式 (4.5.14a), 那么使泛函 $J(\psi)$ 取极小的唯一函数 $\psi_0$ 是方程

$$\boldsymbol{L}\psi_0 = f \tag{4.5.24b}$$

的唯一解. 设想通过迭代过程逼近使泛函 $J(\psi)$ 极小的真解 $\psi_0$, 也就是上式的解. 迭代初始点假定为 $\psi_1$, 显然 $v_1 = \boldsymbol{L}\psi_1 - f \neq 0$, 否则 $\psi_1$ 就是解 $\psi_0$. 取第 $n$ 次近似解为

$$\psi_{n+1} = \psi_n + t_n p_n \tag{4.5.24c}$$

在最速下降法中, 搜索方向为 $J(\psi)$ 在点 $\psi_n$ 的梯度方向 $p_n = v_n = \boldsymbol{L}\psi_n - f$, 下降速度由式 (4.5.14b) 估计. 事实上, 最速下降方向仅仅代表了 $J(\psi)$ 的局部性质, 局部来说, 最速下降方向确实是 $J(\psi)$ 下降数值最快的方向, 但从全局来看, 最速下降法并不是收敛速度最快的方向. 特别是当 $\psi_n$ 逼近真解 $\psi_0$ 时, 收敛速度更慢.

共轭梯度法的基本思想是把共轭性与最速下降法相结合, 利用已知点处的梯度构造一组共轭方向, 并沿此组方向进行搜索, 求出 $J(\psi)$ 的极小点.

假定搜索产生的函数序列为 $\{\psi_n\}$, 相应的梯度方向序列为 $\{v_n\}$(其中 $v_n = \boldsymbol{L}\psi_n - f$), 我们用 Gram-Schmidt 过程来生成一组 $\boldsymbol{L}$-共轭的方向序列 $\{p_n\}$

$$\begin{aligned} &p_1 = v_1 = \boldsymbol{L}\psi_1 - f \\ &p_2 = v_2 + a_2 p_2 \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4.5.25a}$$

$$p_n = v_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k p_k \tag{4.5.25b}$$

由式 (4.5.23d) 得到

$$a_k = -\frac{\langle p_k|\boldsymbol{L}|v_n\rangle}{\langle p_k|\boldsymbol{L}|p_k\rangle} \tag{4.5.25c}$$

注意: $p_n$ 的生成仅依赖于前 $n$ 个梯度方向, 即 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$. 把 $p_n$ 作为搜索方向代入式 (4.5.24c), 然后求逼近速度 $t_n$. 由

$$\begin{aligned} J(\psi_{n+1}) =& [\boldsymbol{L}(\psi_n + t_n p_n), \psi_n + t_n p_n] - 2(f, \psi_n + t_n p_n) \\ =& (\boldsymbol{L}\psi_n, \psi_n) + 2t_n(\boldsymbol{L}\psi_n, p_n) + t_n^2(\boldsymbol{L}p_n, p_n) \\ & - 2(f, \psi_n) - 2t_n(f, p_n) \end{aligned} \tag{4.5.26a}$$

的极小条件

$$\frac{\mathrm{d}J(\psi_n)}{\mathrm{d}t_n} = 2(\boldsymbol{L}\psi_n, p_n) - 2(f, p_n) + 2t_n(\boldsymbol{L}p_n, p_n) = 0 \tag{4.5.26b}$$

求得

$$t_n = -\frac{(\boldsymbol{L}\psi_n - f, p_n)}{(\boldsymbol{L}p_n, p_n)} = -\frac{(v_n, p_n)}{(\boldsymbol{L}p_n, p_n)} = -\frac{(v_n, p_n)}{\langle p_n|\boldsymbol{L}|p_n\rangle} \tag{4.5.26c}$$

因此, 共轭梯度法的过程可总结如下:

(1) 选定初始函数 $\psi_1$, 求泛函 $J(\psi)$ 在点 $\psi_1$ 的梯度 $p_1 = v_1 = \boldsymbol{L}\psi_1 - f$ 作为 $\boldsymbol{L}$-共轭的方向序列 $\{p_i\}$ 的第一个元 $p_1$. 由式 (4.5.24c) 得到

$$\psi_2 = \psi_1 - \frac{(v_1, p_1)}{\langle p_1|\boldsymbol{L}|p_1\rangle} p_1 \tag{4.5.27a}$$

(2) 求泛函 $J(\psi)$ 在点 $\psi_2$ 的梯度 $v_2 = \boldsymbol{L}\psi_2 - f$, 然后求 $\boldsymbol{L}$-共轭的方向序列 $\{p_i\}$ 的第二个元 $p_2$

$$p_2 = v_2 - \frac{\langle p_1|\boldsymbol{L}|v_2\rangle}{\langle p_1|\boldsymbol{L}|p_1\rangle} \tag{4.5.27b}$$

由式 (4.5.24c) 得到

$$\psi_3 = \psi_2 - \frac{(v_2, p_2)}{\langle p_2|\boldsymbol{L}|p_2\rangle} p_2 \tag{4.5.27c}$$

(3) 一般如果求得 $\psi_n$, 然后求梯度 $v_n = \boldsymbol{L}\psi_n - f$, 于是 $\psi_{n+1}$ 由下式决定

$$\psi_{n+1} = \psi_n - \frac{(v_n, p_n)}{\langle p_n|\boldsymbol{L}|p_n\rangle} p_n \tag{4.5.28a}$$

其中

$$p_n = v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle p_k|\boldsymbol{L}|v_n\rangle}{\langle p_k|\boldsymbol{L}|p_k\rangle} p_k \tag{4.5.28b}$$

可以证明序列 $\{\psi_i\}$ 收敛得 “真” 解 $\psi_0 = \boldsymbol{L}^{-1}f$. 共轭梯度法所需总计算量略大于最速下降法, 但在收敛速度方面却有显著的改进.

### 4.5.4 矩量法和本征值问题

设把算子方程 $\boldsymbol{L}\psi = f$ 的解用完备的基函数系 $\{\psi_i\}$ 展开为

$$\psi^M = \sum_{i=1}^{M} a_i \psi_i \tag{4.5.29a}$$

代入虚功方程 $(\boldsymbol{L}\psi, v) = (f, v)$ 得到

$$\sum_{i=1}^{M} a_i (\boldsymbol{L}\psi_i, v) = (f, v) \tag{4.5.29b}$$

其中 $v$ 是允许函数类的任意函数. 为求系数 $a_i$, Galerkin 法取任意函数 $v$ 为前 $M$ 个基函数, 即 $v = \psi_j, (j = 1, 2, \cdots, M)$. 事实上, 函数 $v$ 的选取有一定的任意性, 设 $w_j(\boldsymbol{r})$, $(j = 1, 2, \cdots, M)$ 为线性独立的 $M$ 个函数 (称为**权函数**), 取 $v = w_j(\boldsymbol{r})$, 代入方程 (4.5.29b), 则得到决定展开系数 $a_i$ 的 $M$ 个代数方程

$$\sum_{i=1}^{M} a_i (\boldsymbol{L}\psi_i, w_j) = (f, w_j), (j = 1, 2, \cdots, M) \tag{4.5.29c}$$

上式是决定 $M$ 个展开系数 $a_i, (i = 1, 2, \cdots, M)$ 的线性代数方程. 该法称为**矩量法**.

显然, 基函数与权函数的选择对解的近似程度十分重要. 与 4.2.4 小节的讨论类似, 基函数分为全域基函数和子域基函数. 在矩量法中, 最简单的子域基函数是脉冲基: 设区域 $G$ 分成 $M$ 个不相交的子区域 $G_j, (j = 1, 2, \cdots, M)$, 则

$$\psi_j(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \psi_{0j}, & \boldsymbol{r} \in G_j \\ 0, & \boldsymbol{r} \notin G_j \end{cases} \tag{4.5.29d}$$

其中 $\psi_{0j}$ 在子区域 $G_j$ 内为常数. 至于权函数的选择, 一般分三类:

(1) 权函数与基函数相同, 就是 Galerkin 法, 故矩量法也称为**广义 Galerkin 法**;

(2) 权函数取为 Dirac Delta 函数, 这样就很容易求方程 (4.5.29c) 的内积, 把 $G$ 分成 $M$ 个不相交的子区域 $G_j, (j = 1, 2, \cdots, M)$, 取

$$w_j(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j), & \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_j \in G_j \\ 0, & \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_j \notin G_j \end{cases} \tag{4.5.30a}$$

则 $(f, w_j) = f(\boldsymbol{r}_j)$ 和 $(\boldsymbol{L}\psi_k^G, w_j) = [\boldsymbol{L}\psi_k^G, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j)]$(实际上并没有这么简单, 见下面讨论);

(3) 权函数取为误差函数, 即

$$w_j(\boldsymbol{r}) = 2\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_j}, (j = 1, 2, \cdots, M) \tag{4.5.30b}$$

其中 $\varepsilon = \boldsymbol{L}\psi^n - f$ 为误差函数, 对精确解 $\boldsymbol{L}\psi = f$, 故 $\varepsilon = 0$. 此时矩量法相当于最小二乘法. 事实上, 最小二乘法为求展开系数 $a_j$ 使均方误差极小, 即

$$F \equiv \int_G \varepsilon^2 \mathrm{d}\tau = \min \tag{4.5.30c}$$

把 $\varepsilon = \boldsymbol{L}\psi^M - f$ 和 $\psi^M = \sum_{k=1}^{M} a_k \psi_k^G$ 代入上式得 $F = F(a_1, a_2, \cdots, a_M)$, 故极小条件为

$$\frac{\partial F(a_1, a_2, \cdots, a_M)}{\partial a_j} = 0 \tag{4.5.31a}$$

或者直接由式 (4.5.30c) 得到

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} \equiv 2\int_G \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_j} \varepsilon \mathrm{d}\tau = 2\int_G (\boldsymbol{L}\psi^M - f)\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_j} \mathrm{d}\tau = 0 \tag{4.5.31b}$$

取 $w_j(\boldsymbol{r}) = 2\partial\varepsilon/\partial a_j$ 并利用式 (4.5.29a), 上式简化为

$$\sum_{k=1}^{M} a_k \int_G w_j \boldsymbol{L}\psi_k^G \mathrm{d}\tau = \int_G f w_j \mathrm{d}\tau \tag{4.5.31c}$$

写成内积的形式就是方程 (4.5.29c), 故矩量法与最小二乘法相同. 由方程 (4.5.29a)

$$\varepsilon = \boldsymbol{L}\psi^M - f = \sum_{j=1}^{M} a_j \boldsymbol{L}\psi_j - f \tag{4.5.31d}$$

故

$$w_j(\boldsymbol{r}) = 2\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_j} = 2\boldsymbol{L}\psi_j, (j = 1, 2, \cdots, M) \tag{4.5.32a}$$

代入方程 (4.5.29c)

$$\sum_{k=1}^{M} a_k (\boldsymbol{L}\psi_k, \boldsymbol{L}\psi_j) = (f, \boldsymbol{L}\psi_j), (j = 1, 2, \cdots, M) \tag{4.5.32b}$$

上式可以直接由 $||\boldsymbol{L}\psi - f||^2$ 极小得到. 事实上, 把式 (4.5.29a) 代入 $||\boldsymbol{L}\psi^M - f||^2$ 应得

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{L}\psi^M - f||^2 &= (\boldsymbol{L}\psi^M, \boldsymbol{L}\psi^M) - 2(\boldsymbol{L}\psi^M, f) + (f, f) \\ &= \sum_{i,j=1}^{M} a_i a_j (\boldsymbol{L}\psi_i, \boldsymbol{L}\psi_j) - 2\sum_{j=1}^{n} a_j (\boldsymbol{L}\psi_j, f) + (f, f) \end{aligned} \tag{4.5.32c}$$

由 $||\boldsymbol{L}\psi^M - f||^2$ 极小就可以得到方程 (4.5.32b).

值得指出的是: 对微分方程, 例如三维 S-L 型算子 $\boldsymbol{L}=-\nabla[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$, 双线性形式为

$$D(\psi_j,w_i)=(\boldsymbol{L}\psi_j,w_i)=\int_G[p(\boldsymbol{r})(\nabla\psi_j)\cdot(\nabla w_i)+q(\boldsymbol{r})\psi_j w_i]\mathrm{d}\tau$$

因此, (1) 选择脉冲基或者 Dirac Delta 函数为权函数都是不适合的; (2) 如果选线性插值函数 (例如展开式 (4.4.2b) 或者 (4.4.13b)), 则权函数也不能取为误差函数, 否则就得到 $(\boldsymbol{L}\psi_k,\boldsymbol{L}\psi_j)\equiv 0$ 的不合理结果; (3) 如果取权函数为基函数, 就是 Galerkin 法, 不增加新的内容.

事实上, 对微分算子的边值问题, 一般是先利用 Green 函数转化成积分方程, 然后再用矩量法求解. 这时, 选择脉冲基或者 Dirac Delta 函数为权函数是可以的. 下面以静电学的具体例子来说明矩量法.

**例 4.5.4**　考虑无限大空间的一块厚度近似为零的正方形导体板, 边长为 $2a$, 位于 $z=0$ 平面, 板中心在坐标原点, 如图 4.5.3. 导体板的电势为常数 $V$, 总电荷为常数 $Q$, 求电荷面密度的分布 $\sigma(x,y)$.

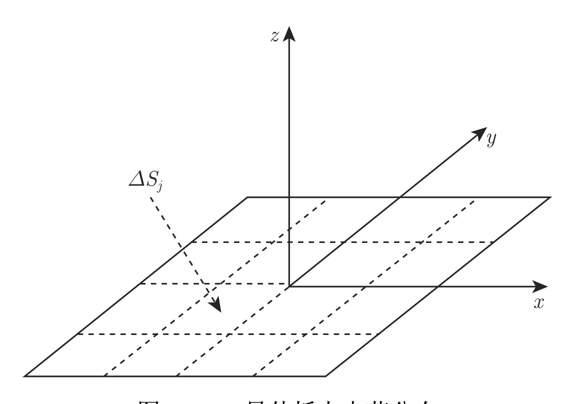



图 4.5.3　导体板上电荷分布

设待求的电荷面密度分布 $\sigma(x,y)$, 边值问题为

$$\begin{gathered}-\nabla^2\varPhi(x,y,z)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,y,z)\\ \varPhi(x,y,z)|_{\partial G}=V\end{gathered}\tag{4.5.33a}$$

其中 $\varepsilon_0$ 是介电常数, $\partial G:[|x|\leqslant a,|y|\leqslant a,z=0]$ 为导体板表面, $\varPhi(x,y,z)$ 为无限大空间的电势分布, 电荷密度分布可表示为

$$\rho(x,y,z)=\begin{cases}\sigma(x,y)\delta(z), & (x,y,z)\in\partial G\\ 0, & (x,y,z)\notin\partial G\end{cases}\tag{4.5.33b}$$

显然, 从边值问题的角度来说, 方程 (4.5.33a) 的求解是非常困难的. 首先利用 Laplace 算子的基本解, 把边值问题式 (4.5.33a) 转化为积分方程, 则无限大空间一点的电势为

$$\begin{aligned}\varPhi(x,y,z)&=\int_G\frac{\rho(x',y',z')}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'dz'\\&=\iint_S\frac{\sigma(x',y')}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\end{aligned}\tag{4.5.34a}$$

其中 $S$: $|x|<a$ 和 $|y|<a$ 是导体板表面. 导体板的等电位边界条件是 $\varPhi(x,y,0)=V$, 故得到积分方程

$$\iint_S\frac{\sigma(x',y')}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=V\tag{4.5.34b}$$

上式为待求函数 $\sigma(x,y)$ 的积分方程 (见第五章讨论), 定义积分算子

$$\boldsymbol{L}\psi(x,y)=\iint_S\frac{\psi(x',y')}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\tag{4.5.35a}$$

函数 $\boldsymbol{L}\psi$ 和 $v$ 的内积定义为

$$(\boldsymbol{L}\psi,v)\equiv\iint_S\iint_S\frac{\psi(x',y')v(x,y)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\tag{4.5.35b}$$

于是方程 (4.5.34b) 可以写成 $\boldsymbol{L}\sigma=f$, 其中 $f(x,y)=V$. 故相应的虚功方程为

$$\iint_S\iint_S\frac{\sigma(x',y')w_j(x,y)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}=\iint_S f(x,y)w_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{4.5.36a}$$

其中 $w_j(x,y)$ 为权函数. 把导体板划分为 $M$ 个正方形小块 $\Delta S_j,(j=1,2,\cdots,M)$, 脉冲基函数选为

$$\psi_j(x,y)=\begin{cases}1,&(x,y)\in\Delta S_j\\0,&(x,y)\notin\Delta S_j\end{cases}\tag{4.5.36b}$$

把待求函数 $\sigma(x,y)$ 用基函数展开, 近似为

$$\sigma(x,y)\approx\sum_{j=1}^{M}a_j\psi_j(x,y)\tag{4.5.37a}$$

代入方程 (4.5.36a) 得到

$$\sum_{i=1}^{M}a_i\psi_i\iint_S\beta_i(x,y)w_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S f(x,y)w_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{4.5.37b}$$

其中

$$\beta_i(x,y) \equiv \iint_{\Delta S_i} \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \tag{4.5.37c}$$

另一方面, 取权函数为 Dirac Delta 函数

$$w_j(x,y) = \begin{cases} \delta(x-x_j)\delta(y-y_j), & (x,y),(x_j,y_j) \in \Delta S_j \\ 0, & (x,y),(x_j,y_j) \notin \Delta S_j \end{cases} \tag{4.5.38a}$$

其中 $(x_j,y_j)$ 是第 $j$ 个正方形小块 $\Delta S_j,(j=1,2,\cdots,M)$ 的中心点. 上式代入方程 (4.5.37b) 得到

$$\sum_{i=1}^{M} \beta_{ij} a_i = V,(j=1,2,\cdots,M) \tag{4.5.38b}$$

其中

$$\beta_{ij} \equiv \beta_i(x_j,y_j) = \iint_{\Delta S_i} \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x_j-x')^2+(y_j-y')^2}} \tag{4.5.38c}$$

显然 $\beta_{ij}$ 是小方块 $\Delta S_i$ 上的电荷在小方块 $\Delta S_j$ 中心处产生的电势, 可以近似为

$$\beta_{ij} \approx \frac{\Delta S_i}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2}},(i \neq j) \tag{4.5.39a}$$

当 $i=j$ 时, $\beta_{ii}$ 是小方块 $\Delta S_i$ 上的电荷在自身中心处产生的电势, 即

$$\beta_{ij} \equiv \beta_i(x_j,y_j) = \int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{2b}{\pi\varepsilon_0}\ln(1+\sqrt{2}) \tag{4.5.39b}$$

其中 $b$ 为小方块 $\Delta S_i$ 的边长, 满足 $2b=2a/\sqrt{M}$. 由线性代数方程组式 (4.5.38b) 得到系数 $a_j$ 后代入式 (4.5.37a) 就能得到电荷面密度的分布 $\sigma(x,y)$.

**矩量法解本征值问题** 对本征值问题 $\boldsymbol{L}\psi=\lambda\rho\psi$, 取 $f=\lambda\rho\psi$ 代入式 (4.5.29b), 并且再利用展开式 (4.5.29a) 得到

$$\sum_{j=1}^{M} a_j(\boldsymbol{L}\psi_j,v) = \lambda\sum_{j=1}^{M} a_j(\rho\psi_j,v) \tag{4.5.40a}$$

取权函数 $v=w_j(\boldsymbol{r}),(j=1,2,\cdots,M)$ 代入上式

$$\sum_{k=1}^{M} a_k[(\boldsymbol{L}\psi_k,w_j)-\lambda(\rho\psi_k,w_j)]=0,(j=1,2,\cdots,M) \tag{4.5.40b}$$

故本征值满足方程

$$\det[(\boldsymbol{L}\psi_k,w_j)-\lambda(\rho\psi_k,w_j)]=0 \tag{4.5.40c}$$

最后, 把矩量法与有限元近似作一个比较：

(1) 有限元法要离散整个空间, 而矩量法的解可以通过离散包围空间的表面得到, 也就是说, 矩量法的维数要比有限元法少一维, 极大地减小了矩量法中未知量的数目, 这一点在三维问题中尤为重要;

(2) 在把微分方程化成积分方程过程中, 由于用到格林函数, 矩量法中的矩阵是满阵, 而有限元法中得出的矩阵是稀疏矩阵, 计算效率高, 需要的内存小, 这是矩量法的缺点;

(3) 在解开放区域问题中, 有限元法要求截断无限区域成为有限的区域, 因此需要在截断处构造近似边界, 而矩量法无需吸收边界条件或完善匹配层所作的近似.

本小节中关于静电学的例子完全反映了这些性质.

## 习 题 四

4.1 求泛函

$$J(y)=\int_0^1 (12xy+yy'+{y'}^2)\mathrm{d}x$$

的极值函数, 使其通过二个定点.

4.2 求泛函

$$J(y)=\int_a^b \frac{\sqrt{1+{y'}^2}}{v(x,y)}\mathrm{d}x$$

的 Euler 方程.

4.3 设泛函

$$J(\psi)=\int_a^b\int_a^b K(s,t)\psi(s)\psi(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_a^b\psi^2(s)\mathrm{d}s-2\int_a^b\psi(s)f(s)\mathrm{d}s$$

其中 $K(s,t)=K(t,s)$. 证明上述泛函取极值的必要条件为 $\psi(t)$ 满足积分方程 (见第五章)

$$\psi(t)+\int_a^b K(s,t)\psi(s)\mathrm{d}s=f(t)$$

4.4 求下列泛函的 Euler 方程

(a) $J(u)=\displaystyle\int_G [a(x,y)u_x^2+b(x,y)u_y^2+c(x,y)u^2+2fu]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(b) $J(u)=\displaystyle\int_G \sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

4.5 求下列泛函的 Euler 方程

(a) $J(u)=\displaystyle\iint_G [(u_{xx}+u_{yy})^2-2(1-\mu)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(b) $J(u)=\displaystyle\iint_G [(u_{xx}+u_{yy})^2-2(1-\sigma)(u_{xx}-u_{yy}-u_{xy}^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中 $\mu$ 和 $\sigma$ 为常数. 注意参数 $\mu$ 和 $\sigma$ 在 Euler 方程中的作用.

4.6 证明二阶偏微分算子

$$\boldsymbol{L}u\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+q(x,y)u,(x,y)\in G$$

是自共轭算子, 即证明 $(\boldsymbol{L}u, v) = (u, \boldsymbol{L}v) + \boldsymbol{B}(u, v)$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 为边界积分算子.

4.7 考虑单位球内的本征值问题

$$\nabla^2\psi + \lambda\psi = 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1$$
$$\psi|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$$

证明最小本征值为 $\lambda_{\min} = \pi^2$; 利用 $\psi_1(r, \vartheta, \varphi) = 1 - r$ 估计最小本征值.

4.8 考虑本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \lambda\psi = 0, 0 < x < \pi$$
$$\psi'(0) = \psi(\pi) = 0$$

证明最小本征值为 $\lambda_0 = 0.25$, 而第二个本征值为 $\lambda_1 = 2.25$; 利用

$$\psi_1(x) = \pi^2 - x^2; \quad \psi_2(x) = \pi^3 - x^3$$

估计最小本征值 $\lambda_0$ 和第二个本征值为 $\lambda_1$.

4.9 估计下列本征值问题的最小本征值的大小

$$\nabla^2\psi + \lambda\psi = 0, (x, y) \in G$$
$$\psi|_{\partial G} = 0, (x, y) \in \partial G$$

其中区域 $G$ 为下列椭圆的内部, $\partial G$ 为其边界

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

且假定 $a < b$.

4.10 用 Ritz 法求下列边值问题的第 $n$ 次近似

$$\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4} = 1, x \in (0, l); u|_{x=0,l} = \left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=0,l} = 0$$

提示: 泛函为 $J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^l u\mathrm{d}x$; 取 $\psi_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{l}$.

4.11 用 Galerkin 法求下列边值问题的二级近似

$$\nabla^4u = 1, (x, y) \in G; u|_{\partial G} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0$$

其中区域 $G$ 为环域 $1 < x^2 + y^2 < 4$, $\partial G$ 为环的边界.

提示: 取 $w = (x^2 + y^2 - 1)[4 - (x^2 + y^2)]$, $u(x, y) = w^2[a_1 + a_2(x^2 + y^2)]$.

4.12 设 $G$ 是 $y = \pm kx$ 及 $x = a$ 和 $x = b$ 围成的梯形, 用 Kantorovich 法解边值问题

$$\nabla^2u = -1, (x, y) \in G; u|_{\partial G} = 0$$

# 第 5 章　积分方程及其近似方法

本章介绍积分方程及求解的近似方法, 主要内容有: 5.1 节介绍积分方程的形成和分类, 讨论 Abel 方程的解以及第一类积分方程的适定性; 5.2 节介绍求解积分方程的几种常用近似方法, 包括迭代法、有限迭近似、矩量法和 Galerkin 法, 以及 Nyström 方法; 5.3 节介绍 $L^2[a,b]$ 空间中积分方程的基本理论, 讨论平方可积核积分方程的基本性质; 5.4 节从积分方程的角度讨论积分变换, 特别是 Fourier 积分变换, 以及应用积分变换求解特殊形状的积分方程；最后, 在 5.5 节介绍一个重要的数值方法, 即边界元近似方法.

## 5.1　积分方程的形成及分类

由第三章, 利用 Green 函数可以把各种微分方程的定解问题化成积分方程. 从许多实际的物理问题, 也可直接得到各种形式的积分方程. 本节列举若干典型的例子, 讨论各种积分方程的形成及其分类.

### 5.1.1　Volterra 积分方程的形成

考虑二阶线性常微分方程的 Cauchy 问题

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_0(x)y=f(x),\ (x>0)\\ y|_{x=0}=0;\ y'|_{x=0}=0\end{gathered}\tag{5.1.1a}$$

设 $f(x)$ 和 $a_i(x)$, $(i=0,1)$ 是连续函数, 并且 $a_i(x)$ 有连续的一阶导数. 对方程 (5.1.1a) 的第一式积分二次并利用第二式得到

$$y(x)+\int_0^x\int_0^\xi\left[a_1(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0(t)y(t)\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi=\int_0^x\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi\tag{5.1.1b}$$

上式中积分相当于在三角形区内作二重积分, 如图 5.1.1, 交换积分次序可得

$$\int_0^x\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi=\int_0^x f(t)\int_t^x\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t\equiv g(x)$$

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^\xi a_1(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi&=\int_0^x a_1(t)y(t)\mathrm{d}t-\int_0^x y(t)\frac{\mathrm{d}a_1(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\int_t^x\mathrm{d}\xi\\&=\int_0^x y(t)\left[a_1(t)-(x-t)\frac{\mathrm{d}a_1(t)}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\int_0^x \int_0^\xi a_0(t)y(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi = \int_0^x a_0(t)y(t)\int_t^x \mathrm{d}\xi\mathrm{d}t = \int_0^x (x-t)a_0(t)y(t)\mathrm{d}t$$

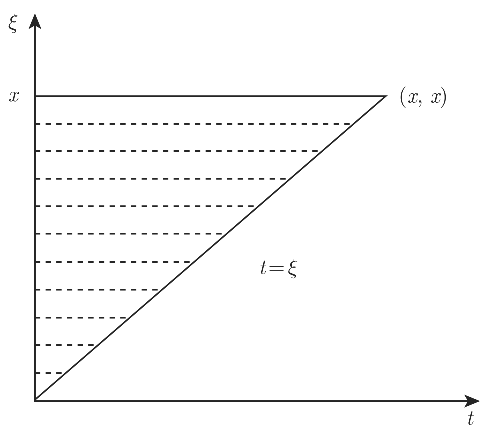



图 5.1.1　变换积分次序

于是, 方程 (5.1.1b) 变成

$$y(x) + \int_0^x \left[a_1(t) - (x-t)\frac{\mathrm{d}a_1(t)}{\mathrm{d}t} + a_0(t)(x-t)\right] y(t)\mathrm{d}t = g(x) \tag{5.1.1c}$$

令 $k(x,t)$ 为

$$\begin{aligned} k(x,t) &\equiv a_1(t) - (x-t)\frac{\mathrm{d}a_1(t)}{\mathrm{d}t} + a_0(t)(x-t) \\ &= \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \frac{\partial^k [a_k(t)(x-t)]}{\partial t^k} \end{aligned} \tag{5.1.1d}$$

于是, 方程 (5.1.1c) 变成

$$y(x) + \int_0^x k(x,t)y(t)\mathrm{d}t = g(x) \tag{5.1.2a}$$

其中 $k(x,t)$ 称为**积分核**. 因此, 我们把 Cauchy 问题化成了积分方程, 其意义很明显, 因为方程 (5.1.2a) 的讨论要比方程 (5.1.1a) 容易得多 (例如解的存在性讨论往往这样做). 形如方程 (5.1.2a) 的积分方程称为**第二类 Volterra 积分方程**. 与此对应, 称具有下列形式的方程

$$\int_0^x k(x,t)y(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{5.1.2b}$$

为**第一类 Volterra 积分方程**, 其中 $k(x,t)$ 和 $f(x)$ 已知, 而 $y(t)$ 未知. 第一类 **Volterra** 积分方程的简单例子可有下列物理问题推得.

**例 5.1.1** 如图 5.1.2, 设一质点 $M$ 由于重力的作用, 由 $(\xi,\eta)$ 点在垂直平面内沿曲线 $x=x(y)$ 无摩擦运动到 $(\xi_0,0)$ 点 $(\eta>0,\xi_0\geqslant 0)$. 显然运动所需时间是 $\eta$ 的函数 $t=t(\eta)$. 如果已知 $t=t(\eta)$, 求 $M$ 运动的轨迹 $x=x(y)$. $M$ 运动的速度大小 $v$ 满足

$$v^2=2g(\eta-y),\quad 0\leqslant y\leqslant\eta \tag{5.1.3a}$$

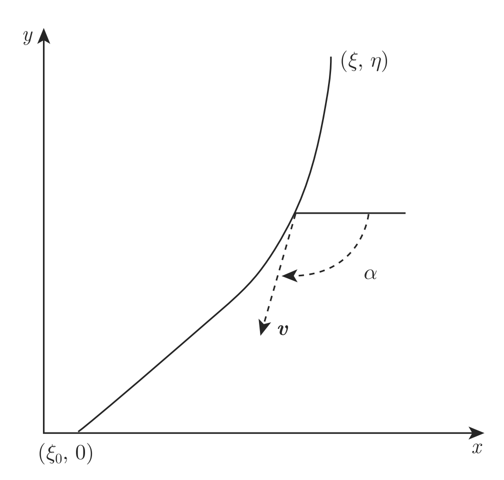



图 5.1.2 质点由 $(\xi,\eta)$ 点运动到 $(\xi_0,0)$ 点

其中 $g$ 为重力加速度. 设 $\alpha(x,y)$ 是速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与 $x$ 轴的夹角, 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=v\sin\alpha=\sqrt{2g(\eta-y)}\sin\alpha \tag{5.1.3b}$$

即

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2g(\eta-y)}\sin\alpha}\mathrm{d}y \tag{5.1.3c}$$

两边积分并令 $\psi(y)=1/\sin\alpha(x,y)|_{x=x(y)}$ 得到

$$t(\eta)=\int_\eta^0\frac{\psi(y)}{\sqrt{2g(\eta-y)}}\mathrm{d}y=-\int_0^\eta\frac{\psi(y)}{\sqrt{2g(\eta-y)}}\mathrm{d}y \tag{5.1.4a}$$

令 $f(\eta)=-\sqrt{2g}t(\eta)$ 得积分方程

$$\int_0^\eta\frac{\psi(y)}{\sqrt{\eta-y}}\mathrm{d}y=f(\eta) \tag{5.1.4b}$$

一旦从上式求得 $\psi(y)$, 利用

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\mathrm{arctan}\alpha=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1}=\sqrt{\psi^2(y)-1} \tag{5.1.4c}$$

可求得 $M$ 运动的曲线 $x = x(y)$. 方程 (5.1.4b) 是第一类 Volterra 积分方程, 具有积分核 $k(\eta, y) = 1/\sqrt{(\eta - y)}$. 它是更普遍的一类方程, 即 Abel 方程的特例

$$\int_0^x \frac{\psi(y)}{(x-y)^\alpha}\mathrm{d}y = f(x) \tag{5.1.4d}$$

其中 $0 < \alpha < 1$, $f(x)$ 是连续函数, 满足自恰条件: $f(0) = 0$.

一般来说, 第一类 Volterra 方程比第二类 Volterra 方程更难求解. 但在一定条件下, 第一类方程可化成第二类方程. 考虑 $k(x, y)$ 和 $f(x)$ 连续可导, 对方程 (5.1.2b) 两边求导

$$k(x,x)\psi(x) + \int_0^x \frac{\partial k(x,y)}{\partial x}\psi(y)\mathrm{d}y = f'(x) \tag{5.1.5a}$$

设 $k(x, x) \neq 0$, 两边除以 $k(x, x)$

$$\psi(x) + \int_0^x \frac{\partial \ln k(x,y)}{\partial x}\psi(y)\mathrm{d}y = \frac{f'(x)}{k(x,x)} \tag{5.1.5b}$$

因此, 方程 (5.1.5b) 化成了方程 (5.1.2a) 的形式, 其中新核为

$$k_1(x,y) = \frac{\partial \ln k(x,y)}{\partial x} \tag{5.1.5c}$$

显然上述方法不适合于 Abel 方程, 因为 $k(x, x) \to \infty$, 但 Abel 方程可用其他方法求解 (见 5.1.5 小节的讨论).

第一类 Volterra 积分方程的另一个例子是信号处理中具有卷积核的方程

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.1.5d}$$

其中 $x(t)$ 是 $t$ 时刻输入系统的信号, $h(t - \tau)$ 是线性系统的脉冲响应, $y(t)$ 是输出, 已知 $y(t)$ 和 $h(t - \tau)$ 求 $x(t)$.

**弱奇性积分方程**　显然, 积分方程 (5.1.4d) 的核作为二元函数在直线 $y = x$ 有奇性. 一般如果积分方程的核函数具有形式

$$k(x,y) = \frac{\ln^\beta(x-y)}{(x-y)^\alpha}H(x,y) \tag{5.1.6a}$$

其中 $H(x, y)$ 为有界函数, 称为**奇性核**. 如果 $\alpha = 0$ 和 $\beta = 0$, 称相应的方程为连续核积分方程；当 $0 < \alpha < 1$ 和 $\beta > 0$ 时, 称具有这种核的方程为**弱奇性**积分方程, 它的解具有较好的性质；当 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 0$ 时, 称为 **Cauchy 核**, 其积分为 Cauchy 主值积分, 相应的方程称为**奇性积分方程**；当 $\alpha > 1$ 和 $\beta = 0$ 时, 称为**超奇性核**, 相应的方程称为**超奇性积分方程**, 以后将不作专门讨论.

弱奇性核的第一类 Volterra 积分方程也可以按照下面方法转换为第二类 Volterra 积分方程, 例如广义 Abel 方程

$$\int_0^x \frac{H(x,y)}{(x-y)^\alpha}\psi(y)\mathrm{d}y = f(x),\ (0<\alpha<1) \tag{5.1.6b}$$

上式改变形式为

$$\int_0^\eta (\eta-y)^{-\alpha}H(\eta,y)\psi(y)\mathrm{d}y = f(\eta) \tag{5.1.6c}$$

二边乘 $(x-\eta)^{\alpha-1}$ 后对 $\eta$ 积分得到

$$\int_0^x\int_0^\eta \frac{H(\eta,y)}{(x-\eta)^{1-\alpha}(\eta-y)^\alpha}\psi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta = \int_0^x (x-\eta)^{\alpha-1}f(\eta)\mathrm{d}\eta \tag{5.1.6d}$$

上式左边积分变换次序得

$$\int_0^x L(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y = g(x) \tag{5.1.7a}$$

其中

$$L(x,y) \equiv \int_y^x \frac{H(\eta,y)}{(x-\eta)^{1-\alpha}(\eta-y)^\alpha}\mathrm{d}\eta = \int_0^1 \frac{H[y+\xi(x-y),y]}{(1-\xi)^{1-\alpha}\xi^\alpha}\mathrm{d}\xi \tag{5.1.7b}$$

得到上式, 作了变换 $\eta = y+\xi(x-y)$, 方程 (5.1.7a) 右边为

$$g(x) \equiv \int_0^x (x-\eta)^{\alpha-1}f(\eta)\mathrm{d}\eta = x^\alpha\int_0^1 \frac{f(x\xi)}{(1-\xi)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\xi \tag{5.1.7c}$$

显然, 若 $H(x,x)\neq 0$, 则

$$L(x,x) = H(x,x)\int_0^1 \frac{1}{(1-\xi)^{1-\alpha}\xi^\alpha}\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}H(x,x)\neq 0 \tag{5.1.8a}$$

故对方程 (5.1.7a) 的二边关于 $x$ 求导得到, 并且除以 $L(x,x)$ 得到

$$\psi(x) + \int_0^x \frac{1}{L(x,x)}\cdot\frac{\partial L(x,y)}{\partial x}\psi(y)\mathrm{d}y = \frac{g(x)}{L(x,x)} \tag{5.1.8b}$$

故我们把弱奇性的第一类 Volterra 积分方程 (5.1.6b) 转化成了弱奇性的第二类 Volterra 积分方程 (5.1.8b).

数学上可证明具有连续核或者弱奇异核的第一、二类 Volterra 积分方程的解存在且唯一.

### 5.1.2 Fredholm 积分方程的形成

具有下列形式的积分方程称为**第二类 Fredholm 积分方程**

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.1.9a}$$

其中 $f(x)$ 和 $k(x,y)$ 为已知函数, $\lambda$ 为常数, 而 $\psi(x)$ 待求. 与此相应, **第一类 Fredholm 积分方程**定义为

$$\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y=f(x) \tag{5.1.9b}$$

其中 $f(x)$ 和 $k(x,y)$ 为已知函数, 而 $\psi(x)$ 待求.

为方便, 把方程 (5.1.9a) 和 (5.1.9b) 写成算子方程的形式

$$\psi=f+\lambda\boldsymbol{K}\psi;\quad \boldsymbol{K}\psi=g \tag{5.1.10a}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为积分算子

$$\boldsymbol{K}\psi\equiv\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.1.10b}$$

对高维积分算子也可以类似定义, 令 $G$ 是 $n$ 维实空间 $R^n$ 中的有界区域, 线性 Fredholm 积分算子的一般形式定义为

$$\boldsymbol{K}\psi\equiv\int_G k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}' \tag{5.1.10c}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$、$\boldsymbol{r}'=(x_1',x_2',\cdots,x_n')$ 和 $\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}'=\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\cdots\mathrm{d}x_n'$, 积分核具有形式

$$k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\ln^\beta|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^\alpha}\cdot H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{5.1.10d}$$

其中 $H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是 $G\times G$ 上的连续函数. 如果 $\alpha=\beta=0$, 称 $\boldsymbol{K}$ 是连续核积分算子; 如果 $\beta\geqslant 0$ 和 $0\leqslant\alpha<n$, 称 $\boldsymbol{K}$ 是**弱奇异积分算子**(注意: 此时 $\beta$ 可任意); 如果 $\beta=0$ 和 $\alpha=n$, 称 $\boldsymbol{K}$ 是**奇异积分算子**, 此时式 (5.1.10c) 的积分为 Cauchy 主值积分; 如果 $\alpha>n$, 称 $\boldsymbol{K}$ 是**超奇异积分算子**. 数学上可证明具有连续核或者弱奇异核的第一、二类 Fredholm 积分方程的解存在且唯一. 从物理问题中导出的积分方程一般具有连续核或者弱奇异核, 如下面的式 (5.1.14b)、(5.1.16c) 和 (5.1.22d) 都是弱奇异核的积分方程, 故我们主要讨论这种情况.

利用 Green 函数, 微分方程的边值问题一般可化成第一、二类 Fredholm 积分方程. 我们举几个数学物理问题中常见的例子来说明.

**例 5.1.2** 考虑一维边值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}-\lambda\rho(x)\psi(x)=f(x),\ x\in(0,l)$$
$$\psi|_{x=0}=0;\ \psi|_{x=l}=0 \tag{5.1.11a}$$

相应的 Green 函数为

$$G(x,\xi)=\frac{1}{l}\begin{cases}x(l-\xi), & 0\leqslant x\leqslant\xi\leqslant l\\ \xi(l-x), & 0\leqslant\xi\leqslant x\leqslant l\end{cases} \tag{5.1.11b}$$

于是方程 (5.1.11a) 化成下列积分方程

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{5.1.12a}$$

因 $\rho(x)\geqslant 0$, 令

$$\psi=\sqrt{\rho(x)}y(x),\ k(x,\xi)=G(x,\xi)\sqrt{\rho(\xi)\rho(x)} \tag{5.1.12b}$$

于是得到第二类积分方程

$$\psi(x)=F(x)+\lambda\int_0^l k(x,\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{5.1.12c}$$

其中 $F(x)=f(x)\sqrt{\rho(x)}$. 因 $G(x,\xi)=G(\xi,x)$, 故 $k(x,\xi)=k(\xi,x)$, 上式称为具有对称核的积分方程.

**例 5.1.3**　微观粒子散射问题转化为积分方程. 设能量为 $E$、质量为 $m$ 的粒子束由 $z=-\infty$ 向散射中心 $A$ 入射, 粒子与散射中心 $A$ 的相互作用势为 $U(\boldsymbol{r})$, 如图 5.1.3, 忽略入射粒子间的相互作用, 则入射粒子束可用波函数 $\psi_i(\boldsymbol{r})=\psi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ (其中 $k^2=2mE/\hbar^2$ 为入射粒子的波数平方), $|\psi_0|^2$ 表示入射粒子束的强度. 经 $A$ 散射后, 总的波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 由二部分叠加而成：入射波 $\psi_i(\boldsymbol{r})$ 和散射波 $\psi_s(\boldsymbol{r})$, 即 $\psi(\boldsymbol{r})=\psi_i(\boldsymbol{r})+\psi_s(\boldsymbol{r})$. 位于 $\vartheta$ 方向的探测仪器检测到的粒子正比于 $|\psi_s(\boldsymbol{r})|^2$, 散射问题就是求散射波 $\psi_s(\boldsymbol{r})$.

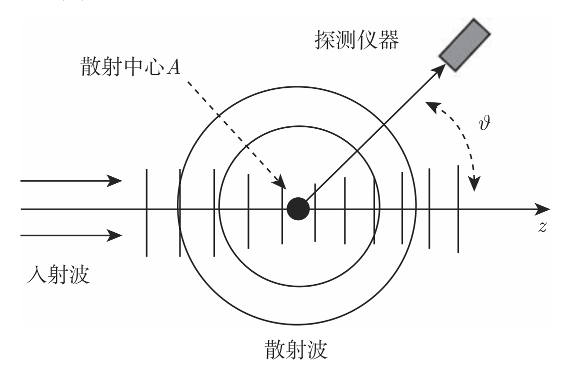



图 5.1.3　微观粒子束的散射

总波函数 $\psi$ 满足 Schrödinger 方程

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r})+k^2\psi(\boldsymbol{r})=\frac{2m}{\hbar^2}U(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) \tag{5.1.13a}$$

定义 Green 函数为 Helmholtz 算子的基本解

$$-(\nabla^2+k^2)g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{5.1.13b}$$

上式的解已由式 (3.3.31c) 给出

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{5.1.13c}$$

偏微分方程 (5.1.13a) 可化成积分方程

$$\psi(\boldsymbol{r})=\psi_0(\boldsymbol{r})-\frac{2m}{\hbar^2}\int g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{5.1.13d}$$

其中 $\psi_0(\boldsymbol{r})$ 是齐次方程

$$(\nabla^2+k^2)\psi_0=0 \tag{5.1.14a}$$

的通解. 对散射问题, 取 $\psi_0(\boldsymbol{r})$ 为入射波的波函数, 即 $\psi_0(\boldsymbol{r})=\psi_i(\boldsymbol{r})$. 于是方程 (5.1.13d) 写成

$$\psi(\boldsymbol{r})=\psi_i(\boldsymbol{r})-\frac{2m}{\hbar^2}\int g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{5.1.14b}$$

称为 **Lippman-Schwinger 积分方程**, 其中 $\psi_i(\boldsymbol{r})$ 和 $U(\boldsymbol{r})$ 为已知函数, 而 $\psi(\boldsymbol{r})$ 为待求函数, 显然方程 (5.1.14b) 是三维第二类 Fredholm 积分方程, 积分算子 $\boldsymbol{K}$ 为

$$\boldsymbol{K}\psi\equiv-\frac{2m}{\hbar^2}\int g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{5.1.14c}$$

积分方程 (5.1.14b) 可用迭代法求近似解, 得到有意义的结果, 见 5.2.2 小节中例 5.2.4 讨论.

**例 5.1.4** 任意形状缺陷对声波的散射. 如图 5.1.4, 设散射体 $G$ 的表面为 $S$, 在频率域内 (忽略时间因子 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, 其中 $\omega$ 是圆频率), 入射声波和散射声波分别为 $\psi_i(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi_s(\boldsymbol{r})$, 总的声场为

$$\psi(\boldsymbol{r})=\psi_i(\boldsymbol{r})+\psi_s(\boldsymbol{r}) \tag{5.1.15a}$$

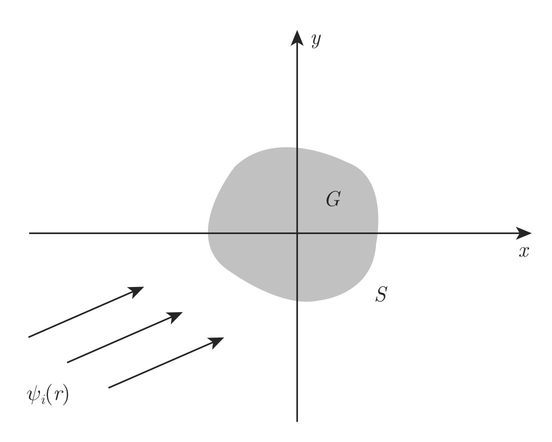



图 5.1.4 具有任意形状的散射体对入射波的散射, 为了方便, 图中仅画出二维截面

为了简单, 设散射体是刚性的, 表面满足的边界条件为 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的法向导数为零, Helmholtz 方程的外边值问题为

$$\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r}) \equiv -(\nabla^2 + k_0^2)\psi(\boldsymbol{r}) = 0,\ \boldsymbol{r} \in \bar{G}$$

$$\left.\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_S = 0;\ \lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty}|\boldsymbol{r}|\left[\frac{\partial\psi_s(\boldsymbol{r})}{\partial|\boldsymbol{r}|} - \mathrm{i}k_0\psi_s(\boldsymbol{r})\right] = 0 \tag{5.1.15b}$$

其中 $k_0$ 是波数, $\bar{G}$ 是 $G$ 的外部. 由方程 (5.5.9b)(见 5.5.1 小节讨论, 入射波相当于由体源产生), 散射体 $G$ 外的空间一点 $P$ 的声场 $\psi(\boldsymbol{r})$ 可由表面 $S$ 上的声场以及声场的法向导数表示

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_i(\boldsymbol{r}) + \iint_S \left[\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S} - g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\right]\mathrm{d}S' \tag{5.1.16a}$$

其中 $\boldsymbol{n}_S$ 是散射体表面法向, $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为无限大空间的 Green 函数, 由式 (5.1.13c) 表示.

对刚性散射体, 利用边界条件

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_i(\boldsymbol{r}) + \iint_S \psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\mathrm{d}S' \tag{5.1.16b}$$

当观测点 $P$ 接近表面 $S$ 时, 利用 Kirchhoff 公式 (5.5.9b) 得到

$$\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_i(\boldsymbol{r}) + \iint_S \psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\mathrm{d}S',\ (\boldsymbol{r} \in S) \tag{5.1.16c}$$

上式右边积分理解为主值积分. 显然, 上式为第二类 Fredholm 积分方程, 一旦得到 $\psi(\boldsymbol{r})|_S$, 再代入方程 (5.1.16b) 右边的面积分, 就可以得到空间 $\boldsymbol{r}$ 点的散射场 $\psi_s(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r}) - \psi_i(\boldsymbol{r})$.

利用边界条件, 方程 (5.1.16c) 也可转化为第一类 Fredholm 积分方程, 事实上, 对方程 (5.1.16b) 简单微分可以得到

$$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}=\frac{\partial\psi_i(\boldsymbol{r})}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial n}\iint_S\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\mathrm{d}S',\ (\boldsymbol{r}\in\bar{G}) \tag{5.1.17a}$$

当观测点 $P$ 接近表面 $S$ 时

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial n_S}=\frac{\partial\psi_i(\boldsymbol{r})}{\partial n_S}+\frac{\partial}{\partial n_S}\iint_S\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\mathrm{d}S',\ (\boldsymbol{r}\in S) \tag{5.1.17b}$$

注意：上式中先求法向导数 $\partial/\partial n$, 然后在 $S$ 上取值；不能简单地理解为对方程 (5.1.16c) 微分得到, 因为方程 (5.1.16c) 中的变量 $\boldsymbol{r}$ 已经在 $S$ 上取值, 不能再进行微分运算得到法向导数. 利用边界条件, 得到 $\psi(\boldsymbol{r})|_S$ 满足的第一类 Fredholm 积分方程

$$-\frac{\partial\psi_i(\boldsymbol{r})}{\partial n_S}=\frac{\partial}{\partial n_S}\iint_S\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\mathrm{d}S',\ (\boldsymbol{r}\in S) \tag{5.1.17c}$$

对任意的表面 $S$, 积分方程 (5.1.16c) 或 (5.1.17c) 的解析求解是困难的, 只能通过矩量法 (见例 5.1.5) 或边界元近似求数值解 (见 5.5.3 小节讨论).

注意：由式 (5.1.13c), 三维 Green 函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的奇性为 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\sim 1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$, 故 $\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')/\partial n'_S\sim 1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^\alpha$, $(\alpha<3)$. 因此方程 (5.1.16c) 是弱奇异积分方程; 但是 $\partial^2 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')/\partial n'_S\partial n_S\sim 1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^\alpha$, $(\alpha>3)$, 故方程 (5.1.17c) 是奇异或者超奇性积分方程, 在利用边界元近似方法求积分时比较困难.

对简单的形状, 可利用正交函数展开求解积分方程 (5.1.17c), 设缺陷为半径 $a$ 的刚性球体. 设入射波为 $z$ 方向传播的平面波, 利用平面波在球坐标中展开公式

$$\begin{aligned}\psi_i(r,\vartheta)&=\psi_{0i}\exp(\mathrm{i}k_0 z)=\psi_{0i}\exp(\mathrm{i}k_0 r\cos\vartheta)\\&=\psi_{0i}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l P_l(\cos\vartheta)j_l(k_0 r)\end{aligned} \tag{5.1.18a}$$

另一方面, Green 函数由式 (3.3.62b) 表示, 于是

$$\left.\frac{\partial\psi_i(r,\vartheta)}{\partial n_S}\right|_S=\left.\frac{\partial\psi_i(r,\vartheta)}{\partial r}\right|_{r=a}=\psi_{0i}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l P_l(\cos\vartheta)\left.\frac{\mathrm{d}j_l(k_0 r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a} \tag{5.1.18b}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\right|_S=\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial r'}\right|_{r'=a}&=-\mathrm{i}k_0\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\\&\cdot Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')h_l^{(1)}(k_0 r)\left.\frac{\mathrm{d}j_l(k_0 r')}{\mathrm{d}r'}\right|_{r'=a}\end{aligned} \tag{5.1.18c}$$

由于对称性, 总声场与 $\varphi$ 无关, 在球面上可展开成

$$\psi(\boldsymbol{r}')|_{r'=a} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos\vartheta') \tag{5.1.19a}$$

把以上三式代入方程 (5.1.17c) 得到 (作为习题, 注意在半径为 $a$ 的球面上, $\mathrm{d}S' = a^2\sin\vartheta'\mathrm{d}\vartheta'\mathrm{d}\varphi'$)

$$\begin{aligned}\psi_{0i}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathrm{i}^n[j_n(k_0a)]'P_n(\cos\vartheta) = \frac{\mathrm{i}k_0^2a^2}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}B_n[h_n^{(1)}(k_0a)]'\\ \cdot[j_n(k_0a)]'P_n(\cos\vartheta)\end{aligned} \tag{5.1.19b}$$

其中特殊函数的导数定义为

$$[h_n^{(1)}(k_0a)]' = \left.\frac{\mathrm{d}h_n^{(1)}(k_0r)}{\mathrm{d}(k_0r)}\right|_{r=a};\ [j_n(k_0a)]' = \left.\frac{\mathrm{d}j_n(k_0r)}{\mathrm{d}(k_0r)}\right|_{r=a} \tag{5.1.19c}$$

得到上式, 利用了下列关系

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')\mathrm{d}\varphi' = \begin{cases}0, & m>0\\ 2\pi P_l(\cos\vartheta'), & m=0\end{cases}\\ &\int_0^{\pi} P_l(\cos\vartheta')P_n(\cos\vartheta')\sin\vartheta'\mathrm{d}\vartheta' = \begin{cases}0, & l\neq n\\ \dfrac{2}{2l+1}, & l=n\end{cases}\end{aligned} \tag{5.1.20a}$$

由 $P_n(\cos\vartheta)$ 的正交性, 从方程 (5.1.19b) 得到

$$\psi_{0i}(2l+1)\mathrm{i}^l = \mathrm{i}k_0^2a^2B_n[h_n^{(1)}(k_0a)]' \tag{5.1.20b}$$

因此

$$B_n = -\frac{\psi_{0i}}{k_0^2a^2[h_n^{(1)}(k_0a)]'}(2l+1)\mathrm{i}^{n+1} \tag{5.1.21a}$$

进一步, 把上式代入方程 (5.1.19a) 得到球面上的声压 $\psi(\boldsymbol{r}')|_{r'=a}$, 然后再代入方程 (5.1.16b) 得到散射场为

$$\begin{aligned}\psi_s(\boldsymbol{r}) &= \psi(\boldsymbol{r}) - \psi_i(\boldsymbol{r}) = \iint_S \psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\mathrm{d}S'\\ &= -\psi_{0i}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l\frac{j_l(k_0a)}{[h_l^{(1)}(k_0a)]'}h_l^{(1)}(k_0r)P_l(\cos\vartheta)\end{aligned} \tag{5.1.21b}$$

由此可见, 在用积分方程方法求散射场时, 过程比较复杂, 优点是对复杂形状的散射体, 积分方程方法比较适合数值计算, 进一步讨论见 5.5.3 小节和 7.4.2 小节讨论.

**例 5.1.5**　电磁波在导体柱面的散射. 为了简单, 考虑二维电磁波被无限长等截面导体柱的散射, 柱截面方程为 $\Gamma:\rho=\Gamma(\varphi)$. 设入射波电场为 $E_z^i(\rho,\varphi)$ (极化方向为 $z$ 方向), 如图 5.1.5. 物理过程为: 入射电场 $E_z^i(\rho,\varphi)$ 在导体柱表面激发 $z$ 方向的感应电流 $J_z$, 该感应电流又向外辐射电磁波, 形成散射波 $E_z^s(\rho,\varphi)$, 总电场为入射电场与散射电场之和 $E_z=E_z^i+E_z^s$. 外边值问题为

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2E_z(\rho,\varphi)+k_0^2E_z(\rho,\varphi)=-\mathrm{i}k_0\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}J_z(\rho,\varphi)\\
&E_z(\rho,\varphi)|_\Gamma=[E_z^i(\rho,\varphi)+E_z^s(\rho,\varphi)]_\Gamma=0\\
&\lim_{\rho\to\infty}\sqrt{\rho}\left[\frac{\partial E_z^s(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-\mathrm{i}k_0E_z^s(\rho,\varphi)\right]=0
\end{aligned}
\tag{5.1.22a}
$$

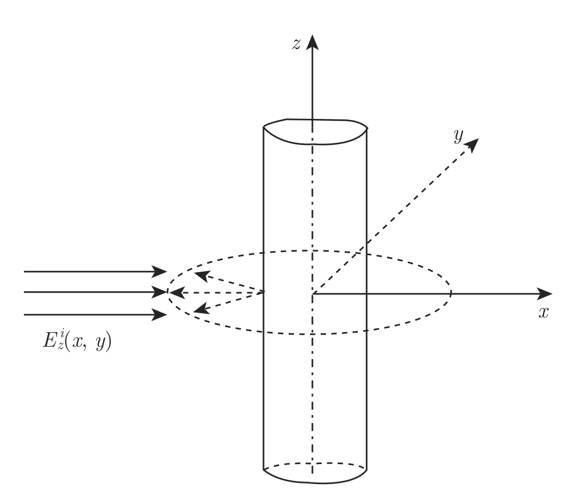



图 5.1.5　电磁波在等截面柱体上的散射

其中 $k_0$ 为电磁波波数, $\varepsilon_0$ 和 $\mu_0$ 为真空电导率和磁导率, $J_z(\rho,\varphi)$ 为感应电流, 仅存在于导体表面, 可以表示成

$$
J_z(\rho,\varphi)=\begin{cases}J_z(\boldsymbol{\rho})\delta[\rho-\Gamma(\varphi)], & \boldsymbol{\rho}\in\Gamma\\ 0, & \boldsymbol{\rho}\notin\Gamma\end{cases}
\tag{5.1.22b}
$$

利用二维基本解式 (3.3.33c), 方程 (5.1.22a) 的第一式的解可写为

$$
E_z^s(\rho,\varphi)=-\frac{k_0}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\iint_S J_z(\rho',\varphi')H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)\mathrm{d}S'
$$

$$= -\frac{k_0}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\iint_S J_z(\boldsymbol{\rho}')\delta[\rho' - \Gamma(\varphi')]H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|)\mathrm{d}S'$$

$$= -\frac{k_0}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int_\Gamma J_z(\boldsymbol{\rho}')H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|)\mathrm{d}\Gamma' \tag{5.1.22c}$$

其中前二个积分在导体柱的截面 $S$ 上进行, 最后一个积分为沿表面 $\Gamma$ 的线积分. 注意: Green 函数的选择保证了 Sommerfeld 辐射条件, 即方程 (5.1.22a) 的第三式. 由方程 (5.1.22a) 的第二式得到柱表明满足的积分方程

$$E_z^i(\rho, \varphi)|_\Gamma = \frac{k_0}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int_\Gamma J_z(\boldsymbol{\rho}')H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|)\mathrm{d}\Gamma',\ (\boldsymbol{\rho} \in \Gamma) \tag{5.1.22d}$$

显然, 上式是待求函数 $J_z(\boldsymbol{\rho})|_\Gamma$ 的二维第一类 Fredholm 积分方程, 一旦求得 $J_z(\boldsymbol{\rho})|_\Gamma$, 由式 (5.1.22c), 就可以求得整个空间的散射场.

类似于 4.5.4 小节的例 4.5.4, 方程 (5.1.22d) 可用矩量法求近似解. 设柱表面 $\Gamma$ 分成 $N$ 个小段 $\Delta\Gamma_j$, $(j = 1, 2, \cdots N)$, 每个小段的中点坐标为 $(x_j, y_j)$. 采用最简单的脉冲基函数

$$\psi_j(\rho, \varphi) = \begin{cases} 1, & (\rho, \varphi) \in \Delta\Gamma_j \\ 0, & (\rho, \varphi) \notin \Delta\Gamma_j \end{cases} \tag{5.1.23a}$$

和 Dirac Delta 权函数.

$$w_j(x, y) = \begin{cases} \delta(x - x_j)\delta(y - y_j), & (x, y),\ (x_j, y_j) \in \Delta\Gamma_j \\ 0, & (x, y),\ (x_j, y_j) \notin \Gamma S_j \end{cases} \tag{5.1.23b}$$

令

$$J_z(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^N a_j\psi_j(\rho, \varphi),\ (\rho, \varphi) \in \Gamma \tag{5.1.23c}$$

由矩量法 (见 4.5.4 小节), 第一类 Fredholm 积分方程 (5.1.22d) 离散化后变成

$$[l_{ij}][a_j] = [g_i] \tag{5.1.24a}$$

其中列矩阵 $[a_j] = [a_1, a_2, \cdots, a_N]^\mathrm{T}$, $[g_i] = [E_z^i(x_1, x_1), E_z^i(x_2, x_2), \cdots, E_z^i(x_N, x_N)]^\mathrm{T}$, 而 $N \times N$ 矩阵 $[l_{ij}]$ 的元为

$$l_{ij} = \frac{k_0}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int_{\Delta\Gamma_i} H_0^{(1)}\left[k_0\sqrt{(x - x_j)^2 + (y - x_j)^2}\right]\mathrm{d}\Gamma \tag{5.1.24b}$$

一旦从方程 (5.1.24a) 求得 $[a_j]$, 就可以由式 (5.1.23c) 求得表面电流密度 $J_z$, 从而由式 (5.1.22c) 得到散射场 $E_z^s(\rho, \varphi)$.

当导体柱面是半径为 $R$ 的圆柱面时, 积分方程 (5.1.22d) 可用正交函数展开法严格求解. 方程 (5.1.22d) 简化为

$$E_z^i(R,\varphi)=\frac{k_0R}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int_0^{2\pi}J_z(R,\varphi')H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)\mathrm{d}\varphi' \tag{5.1.25a}$$

其中 $J_z(R,\varphi)$ 为圆柱表面的电流密度. 设入射波是 $x$ 方向传播的平面波, 利用平面波在极坐标中的展开公式

$$\begin{aligned}E_z^i(\rho,\varphi)&=E_{0z}^i\exp(\mathrm{i}k_0x)=E_{0z}^i\exp(\mathrm{i}k_0\rho\cos\varphi)\\&=E_{0z}^i\left[J_0(k_0\rho)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^nJ_n(k_0\rho)\cos n\varphi\right]\end{aligned} \tag{5.1.25b}$$

由对称性, 把方程 (5.1.25a) 中的 $J_z(R,\varphi)$ 用 $\{\cos n\varphi\}$ 展开为

$$J_z(R,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos n\varphi \tag{5.1.25c}$$

上二式代入方程 (5.1.25a) 得到

$$\begin{aligned}&\frac{k_0R}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_0^{2\pi}H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)\cos n\varphi'\mathrm{d}\varphi'\\&=E_{0z}^i\left[J_0(k_0R)+2\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^nJ_n(k_0R)\cos n\varphi\right]\end{aligned} \tag{5.1.25d}$$

利用 Hankel 函数的展开式 (3.3.67b), 且注意到在柱面上 $\boldsymbol{\rho}'=(R,\varphi')$ 和 $\boldsymbol{\rho}=(R,\varphi)$

$$H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}J_m(k_0R)H_m^{(1)}(k_0R) \tag{5.1.26a}$$

代入方程 (5.1.25d) 且完成角度积分后得到

$$\begin{aligned}&E_{0z}^i\left[J_0(k_0R)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^nJ_n(k_0R)\cos n\varphi\right]\\&=\frac{k_0R}{8\pi}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sum_{n=0}^{\infty}c_nJ_n(k_0R)H_n^{(1)}(k_0R)\cos n\varphi\end{aligned} \tag{5.1.26b}$$

得到上式利用了关系 $J_{-n}(k_0R)=(-1)^nJ_n(k_0R)$ 和 $H_{-n}^{(1)}(k_0R)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}H_n^{(1)}(k_0R)$. 因此, 我们得到

$$c_n=\frac{8\pi}{k_0R}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\varepsilon_n\mathrm{i}^n}{H_n^{(1)}(k_0R)}\cdot E_{0z}^i \tag{5.1.26c}$$

其中 $\varepsilon_0=1$ 和 $\varepsilon_n=2$, $(n>0)$. 上式代入式 (5.1.25c), 得到表面电流密度

$$J_z(R,\varphi)=\frac{8\pi}{k_0R}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot E_{0z}^i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\mathrm{i}^n}{H_n^{(1)}(k_0R)}\cos n\varphi \tag{5.1.27a}$$

代入式 (5.1.22c) 得到散射场

$$\begin{aligned}E_z^s(\rho,\varphi)&=\frac{k_0R}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int_0^{2\pi}J_z(R,\varphi')H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)\mathrm{d}\varphi'\\&=E_{0z}^i\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\mathrm{i}^nJ_n(k_0R)\cdot\frac{H_n^{(1)}(k_0\rho)}{H_n^{(1)}(k_0R)}\cdot H_n^{(1)}(k_0\rho)\cos n\varphi\end{aligned} \tag{5.1.27b}$$

得到上式利用了式 (3.3.67b), 且注意到, 当 $\boldsymbol{\rho}'=(R,\varphi')$ 和 $\boldsymbol{\rho}=(\rho,\varphi)$ 时

$$H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\cdot J_m(k_0R)H_m^{(1)}(k_0\rho) \tag{5.1.27c}$$

### 5.1.3 积分-微分方程的形成

同时含有未知函数的积分和微分的方程称为积分-微分方程, 在物理问题中经常遇到, 我们举具体的例子说明.

**例 5.1.6** 在研究生物介质等非牛顿流体中声波传播时, 声压 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 满足的方程为

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}D^s\psi \tag{5.1.28a}$$

其中 $\beta$ 和 $s$, $(0<s<1)$ 为常数, $D^s\psi$ 称为 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 的分数导数 (见 5.4.2 小节讨论), 由卷积积分定义

$$D^s\psi\equiv\frac{1}{\Gamma(-s)}\int_{-\infty}^{t}\frac{\psi(\boldsymbol{r},\tau)}{(t-\tau)^{s+1}}\mathrm{d}\tau \tag{5.1.28b}$$

方程 (5.1.28a) 称为**分数阶波动方程**, 实际上是一个积分-微分方程, $D^s\psi$ 由时间卷积积分定义, 故具有时间 "记忆" 功能, 即 $t$ 时刻的声压场与 $(-\infty,t)$ 内的声压场都有关联. 也可以通过空间卷积积分写出分数 Laplace 波动方程

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)-\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=\beta\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla^2)^{\gamma/2}\psi \tag{5.1.29a}$$

其中 $\beta$ 和 $\gamma$, $(0<\gamma<2)$ 为常数, 分数 Laplace 算子由空间卷积积分定义 (见 5.4.2 小节讨论)

$$(-\nabla^2)^{\gamma/2}\psi\equiv-\frac{\gamma(\gamma+1)\Gamma(\gamma)}{2\pi^2}\sin\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)\int\frac{\psi(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{3+\gamma}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{5.1.29b}$$

**例 5.1.7** 设位于 $xOy$ 平面上的无限大、均匀膜, 在 $z$ 方向的简谐点力源 (强度为 $f_0$ 的外力作用于原点, 时间因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, $\omega$ 为圆频率) 激发下, 膜作垂直于膜平面的横向振动, 振动方程由方程 (4.1.49a) 给出. 另一方面, 膜的振动将向空间 ($z>0$ 和 $z<0$ 半空间) 辐射声波; 反过来, 辐射的声波又作用于膜而影响膜的振动, 因此膜振动和辐射声波相互耦合. 考虑耦合后, 在极坐标下, 膜位移 $u_z(\rho)$ 满足方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right)+\frac{\omega^2}{c_M^2}u_z=-\frac{f_0}{\sigma c_M^2}\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}+\frac{2}{\sigma c_M^2}\psi(\rho,z)|_{z=0} \tag{5.1.30a}$$

其中 $c_M=\sqrt{\tau/\sigma}$ 是膜中横波的波速, $\sigma$ 和 $\tau$ 分别是膜的面密度和膜中的张力, $u_z$ 是膜的 $z$ 方向振动位移, $\psi(\rho,z)$ 是圆柱坐标中声压的空间分布, 满足 Helmholtz 方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c_0^2}\psi=0,\quad (z>0) \tag{5.1.30b}$$

其中 $c_0$ 为空气中的声速. 在膜与流体的接触面上, 满足的边界条件为速度连续, 即

$$-\mathrm{i}\omega u_z(\rho)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\rho_0}\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=0} \tag{5.1.30c}$$

其中 $\rho_0$ 是流体的体密度. 方程 (5.1.30a)、(5.1.30b) 和 (5.1.30c) 构成膜振动-声辐射系统的定解问题.

利用式 (3.3.51b), 不难得到膜振动辐射的声场为

$$\psi(\rho,z)=2\frac{\rho_0\omega^2}{4\pi}\iint u_z(\rho')\frac{\exp(\mathrm{i}k_0R_1)}{R_1}\mathrm{d}S' \tag{5.1.31a}$$

其中 $R_1$ 为膜上一点 $\boldsymbol{\rho}'=(\rho',\varphi')$ 到观测点 $\boldsymbol{r}=(\rho,\varphi,z)$ 的距离: $R_1=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}'|$, $k_0=\omega/c_0$ 为声波波数. 上式代入方程 (5.1.30a) 得到积分-微分方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial u_z(\rho)}{\partial\rho}\right]+k_M^2u_z(\rho)=-\frac{f_0}{\sigma c_M^2}\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}+\frac{4\rho_0\omega^2}{\sigma c_M^2}\cdot\iint u_z(\rho')\frac{\exp(\mathrm{i}k_0R_2)}{4\pi R_2}\mathrm{d}S' \tag{5.1.31b}$$

其中 $R_2$ 为膜上一点 $\boldsymbol{\rho}'=(\rho',\varphi')$ 到膜上另一点 $\boldsymbol{\rho}=(\rho,\varphi)$ 的距离: $R_2=|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|$, $k_M=\omega/c_M$ 为膜横振动的波数. 一旦从方程 (5.1.31b) 求得膜的位移 $u_z(\rho)$, 由式 (5.1.31a), 就可以计算空间声压分布 $\psi(\rho,z)$.

积分-微分方程 (5.1.31b) 可用积分变换求解, 二边作零阶 Hankel 变换

$$\begin{aligned}u_z(\rho)&=\int_0^\infty u_z(k_\rho)J_0(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho\\ u_z(k_\rho)&=\int_0^\infty u_z(\rho)J_0(k_\rho\rho)\rho\mathrm{d}\rho\end{aligned} \tag{5.1.32a}$$

得到

$$左 = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right) + k_M^2 u_z\right] J_0(k_\rho\rho)\rho\mathrm{d}\rho = (k_M^2 - k_\rho^2)u_z(k_\rho) \tag{5.1.32b}$$

$$\begin{aligned} 右 &= \int_0^\infty \left[-\frac{f_0}{\sigma c_M^2}\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} + \frac{4\rho_0 k_M^2}{\sigma}\iint u_z(\rho')\frac{\exp(\mathrm{i}k_0 R_2)}{4\pi R_2}\mathrm{d}S'\right] J_0(k_\rho\rho)\rho\mathrm{d}\rho \\ &= -\frac{f_0}{2\pi\sigma c_M^2} + \frac{4\rho_0 k_M^2}{\sigma}\int_0^\infty \left[\iint u_z(\rho')\frac{\exp(\mathrm{i}k_0 R_2)}{4\pi R_2}\mathrm{d}S'\right] J_0(k_\rho\rho)\rho\mathrm{d}\rho \end{aligned} \tag{5.1.32c}$$

注意到 $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}'|_{z=0} = |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|$, 取式 (3.3.63c) 中 $z = z' = 0$

$$\frac{\exp(\mathrm{i}k_0 R_2)}{4\pi R_2} = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\sum_{m'=-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^\infty \frac{1}{\sigma}J_m(\lambda\rho')J_m(\lambda\rho)\lambda\mathrm{d}\lambda\right]\exp[\mathrm{i}m'(\varphi - \varphi')] \tag{5.1.33a}$$

代入式 (5.1.32c), 完成角度方向积分后得到

$$\begin{aligned} 右 &= -\frac{f_0}{2\pi\sigma c_M^2} + \frac{2\mathrm{i}\rho_0 k_M^2}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}}\int_0^\infty u_z(\rho')J_0(k_\rho\rho')\rho'\mathrm{d}\rho' \\ &= -\frac{f_0}{2\pi\sigma c_M^2} + \frac{2\mathrm{i}\rho_0 k_M^2}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}}u_z(k_\rho) \end{aligned} \tag{5.1.33b}$$

其中用到归一化关系

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)J_0(k_\rho\rho)\rho\mathrm{d}\rho = \frac{1}{k_\rho}\delta(\lambda - k_\rho) \tag{5.1.33c}$$

因此

$$(k_M^2 - k_\rho^2)u_z(k_\rho) = -\frac{f_0}{2\pi\sigma c_M^2} + \frac{2\mathrm{i}\rho_0 k_M^2}{\sigma}\cdot\frac{u_z(k_\rho)}{\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}} \tag{5.1.34a}$$

即

$$u_z(k_\rho) = -\frac{f_0}{2\pi\sigma c_M^2}\frac{\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}}{F(k_\rho)} \tag{5.1.34b}$$

其中

$$F(k_\rho) \equiv (k_M^2 - k_\rho^2)\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2} - \frac{2\mathrm{i}\rho_0 k_M^2}{\sigma} \tag{5.1.34c}$$

最后得到原点存在点力源时激发的膜位移

$$u_z(\rho) = -\frac{f_0}{2\pi\sigma c_M^2}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{k_0^2-k_\rho^2}}{F(k_\rho)}J_0(k_\rho\rho)k_\rho \mathrm{d}k_\rho \tag{5.1.35a}$$

注意到被积函数关于 $k_\rho$ 对称, 故上式可改成

$$u_z(\rho) = -\frac{f_0}{4\pi\sigma c_M^2}\int_{\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}^{\infty}\frac{\sqrt{k_0^2-k_\rho^2}}{F(k_\rho)}H_0^{(1)}(k_\rho\rho)k_\rho \mathrm{d}k_\rho \tag{5.1.35b}$$

讨论：①当不考虑膜与声场的耦合时, 即 $F(k_\rho)\approx(k_M^2-k_\rho^2)\sqrt{k_0^2-k_\rho^2}$

$$u_z(\rho) \approx -\frac{f_0}{4\pi\sigma c_M^2}\int_{\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}^{\infty}\frac{1}{k_M^2-k_\rho^2}H_0^{(1)}(k_\rho\rho)k_\rho \mathrm{d}k_\rho \tag{5.1.35c}$$

上式可用复变函数积分：实轴上有二个一阶极点 $k_\rho^{\pm}=\pm(k_M+\mathrm{i}\delta)$ (注意：引进小的 $\delta$ 表示波的衰减), 取上半平面的围道 (如图 5.1.6), 围道中只有一个一阶极点 $k_\rho^{+}=k_M+\mathrm{i}\delta$, 得到

$$u(\rho)\approx \mathrm{i}\frac{f_0}{4\sigma c_M^2}H_0^{(1)}(k_M\rho) \tag{5.1.35d}$$

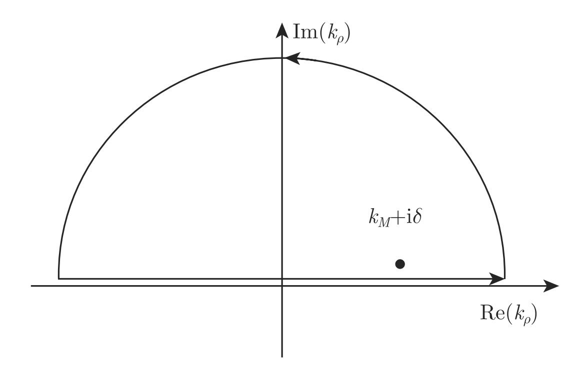



图 5.1.6 上半平面的一个极点

上式与方程 (3.3.34d) 类似, 实际上是膜横振动方程的 Green 函数解 (除系数不同外)；②当考虑膜与声场的耦合时, 积分由二部分组成：上半平面的极点和分枝点 $k_0+\mathrm{i}\delta$ (如图 5.1.7). 极点由下列方程决定 $F(k_\rho)=0$, 或者

$$(k_M^2-k_\rho^2)^2(k_0^2-k_\rho^2)+4\left(\frac{\rho_0 k_M^2}{\sigma}\right)^2=0 \tag{5.1.36a}$$

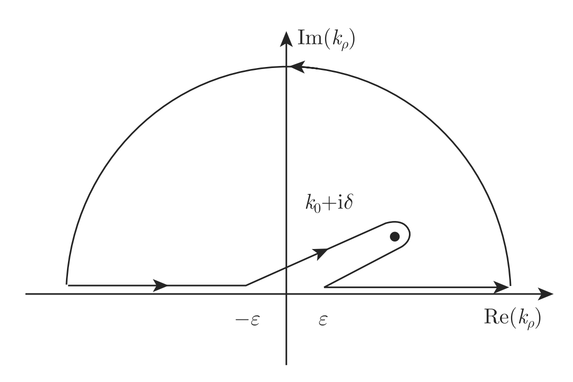



图 5.1.7 上半平面的一个分枝点

显然上式是一个关于 $k_\rho^2$ 的三次代数方程, 存在一个实根 $k_\rho^{(1)}$ 和二个共轭复根 $k_\rho^{(2)}$, $k_\rho^{(3)}=k_\rho^{*(2)}$. 在实轴上方存在二个极点 $k_\rho^{(1)}+\mathrm{i}\delta$ 和 $k_\rho^{(2)}$(虚部大于零的那个复根, 即 $\mathrm{Im}k_\rho^{(2)}>0$), 因此

$$u(\rho)=-\mathrm{i}\frac{f_0}{2\sigma c_M^2}\left\{\sum_{j=1}^{2}\frac{k_\rho^{(j)}\sqrt{k_0^2-k_\rho^{(j)2}}}{[\partial F(k_\rho)/\partial k_\rho]_{k_\rho=k_\rho^{(j)}}}H_0^{(1)}\left(k_\rho^{(j)}\rho\right)+\text{Branch Part}\right\} \quad (5.1.36\text{b})$$

枝线积分只能通过数值积分进行.

### 5.1.4 非线性积分方程的形成

从式 (5.1.10b) 可看出, 算子 $\boldsymbol{K}$ 是线性算子, 即具有性质

$$\boldsymbol{K}(\alpha\psi_1+\beta\psi_2)=\alpha\boldsymbol{K}\psi_1+\beta\boldsymbol{K}\psi_2 \quad (5.1.37\text{a})$$

故 Fredholm 方程 (5.1.10a) 是线性积分方程. 当物理问题涉及到非线性效应时, 往往可推得非线性积分方程. 非线性积分方程有各种不同的形式, 例如

$$\psi(x)+\int_a^b k(x,y)F[y,\psi(y)]\mathrm{d}y=0 \quad (5.1.37\text{b})$$

其中 $k(x,y)$ 和 $F$ 为已知函数, 而 $F$ 关于 $\psi$ 是非线性的. 上式称为 **Hammerstein 积分方程**. 更一般的非线性方程为 **Urysohn 积分方程**

$$\psi(x)+\int_a^b k[x,y,\psi(x)]\mathrm{d}y=g(x) \quad (5.1.37\text{c})$$

其中非线性项直接出现在积分核中. 导致 Hammerstein 积分方程的一个简单例子是非线性边值问题.

**例 5.1.8** 考虑非线性边值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}=F[x,\psi(x)]+f_1(x),\ (0<x<l)$$
$$\psi|_{x=0}=\psi|_{x=l}=0 \tag{5.1.38a}$$

利用 Green 函数

$$G(x,y)=\frac{1}{l}\begin{cases} x(l-y), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant l \\ y(l-x), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant l\end{cases} \tag{5.1.38b}$$

可把方程 (5.1.38a) 化成

$$\psi(x)=f(x)+\int_0^l F[y,\psi(y)]G(x,y)\mathrm{d}y \tag{5.1.38c}$$

其中 $f(x)\equiv\int_0^l G(x,y)f_1(y)\mathrm{d}y$.

**例 5.1.9** 单摆振动方程

$$-\frac{\mathrm{d}^2\psi(t)}{\mathrm{d}t^2}-\alpha^2\sin\psi(t)=g_1(t) \tag{5.1.39a}$$

式中 $t$ 表示时间变量. 如果 $g_1(t)$ 是周期为 2 的奇函数, 我们求上式周期为 2 的解, 这个条件等价于边界条件 $\psi|_{t=0}=\psi|_{t=1}=0$. 于是, 取 $F[t,\psi(t)]=\alpha^2\sin\psi(t)$, 代入方程 (5.1.38c) 得到

$$\psi(t)=g(t)+\alpha^2\int_0^1\sin\psi(y)G(t,y)\mathrm{d}y \tag{5.1.39b}$$

其中 $g(t)\equiv\int_0^1 G(t,y)g_1(y)\mathrm{d}y$, 令 $\chi(t)=\psi(t)-g(t)$, 则 $\chi(t)$ 满足下列 Hammerstein 方程

$$\chi(t)=\alpha^2\int_0^1\sin[g(y)+\chi(y)]G(t,y)\mathrm{d}y \tag{5.1.39c}$$

**例 5.1.10** 考虑不均匀地质的二维分布, 如图 5.1.8 所示, 在 $z=-H$ 附近有一地质密度的分界面, 在 $D$ 区密度为 $\rho_2$, 而在其他区域密度为 $\rho_1$, 其中 $D$ 的分界线为 $z=\psi(x)-H$. 物理问题是: 已测得地面 $z=0$ 处由于地质不均匀引起的重力变化 $\Delta g$

$$\Delta g=-\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0} \tag{5.1.40a}$$

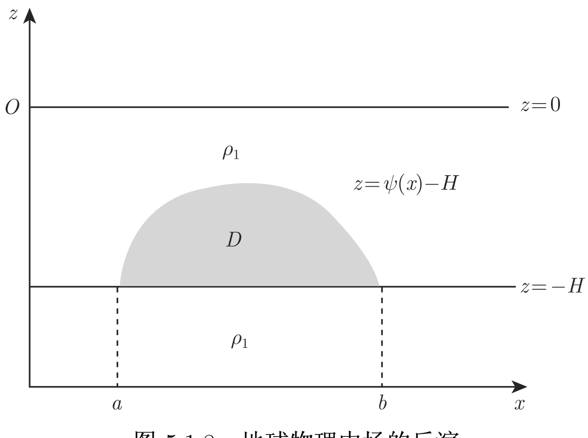



图 5.1.8 地球物理中场的反演

其中 $U(x,z)$ 是由于密度不均匀性 $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ 产生的势场, 满足二维 Poisson 方程

$$\nabla^2 U = -2\pi\Delta\rho \tag{5.1.40b}$$

希望反演分界面的形状 $z = \psi(x) - H$. 利用二维 Laplace 算子的 Green 函数

$$G(x,z,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\eta)^2}} \tag{5.1.41a}$$

方程 (5.1.40b) 的解为

$$U(x,z) = \int_D \Delta\rho \ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\eta)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{5.1.41b}$$

上式代入式 (5.1.40a) 得到

$$\begin{aligned}\Delta g &= \left.\left[\int_a^b\int_{-H}^{-H+\psi(\xi)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\eta)^2}}\right)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\right]\right|_{z=0}\\ &= \Delta\rho\int_a^b \ln\frac{(x-\xi)^2+H^2}{(x-\xi)^2+[H-\psi(\xi)]^2}\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{5.1.41c}$$

令 $f(x) = \Delta g/\Delta\rho$, 得到关于 $\psi(\xi)$ 的积分方程

$$\int_a^b \ln\frac{(x-\xi)^2+H^2}{(x-\xi)^2+[H-\psi(\xi)]^2}\mathrm{d}\xi = f(x) \tag{5.1.41d}$$

显然, 上式具有 Urysohn 积分方程的形式. 研究表明上式解关于 $f(x)$ 的微小变化不稳定, 而 $f(x)$ 表示物理测量的量, 总存在一定的误差. 初看起来上述问题似乎没有多大的意义, 但实际问题却存在. 这种不适定问题的讨论是目前应用数学的一个重要方向, 产生了一套求解不适定问题的理论和方法, 我们将在第七章中作初步介绍.

### 5.1.5　Abel 方程及第一类积分方程的不适定性讨论

与微分方程定解问题的适定性一样, 如果一个积分方程的解存在, 且唯一, 并且在某种意义上来说是稳定的, 则称这个积分方程是适定的. 如果有一个条件不满足, 则称为不适定的. 下面阐明第一类积分方程是不适定的.

考虑 Abel 方程 (5.1.4d), 首先求出它的解, 然后证明解对 $f(x)$ 的微小变动是不稳定的. 对方程 (5.1.4d) 式两边乘 $(z-x)^{-\beta}$ 并对 $x$ 从 0 到 $z$ 积分得到

$$\int_0^z \int_0^x \frac{\psi(y)}{(x-y)^\alpha}\mathrm{d}y \frac{1}{(z-x)^\beta}\mathrm{d}x = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^\beta}\mathrm{d}x \tag{5.1.42a}$$

左式积分变换次序, 先对 $x$ 求积分, 再对 $y$ 求积, 如图 5.1.9

$$\int_0^z \left[\int_y^z \frac{\mathrm{d}x}{(x-y)^\alpha (z-x)^\beta}\right]\psi(y)\mathrm{d}y = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^\beta}\mathrm{d}x \tag{5.1.42b}$$

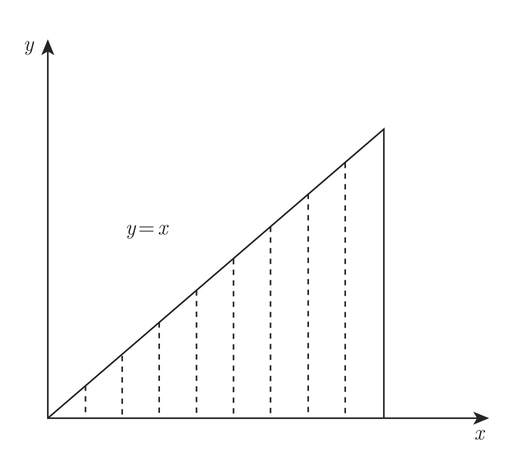



图 5.1.9　左边积分交换次序

令 $x = y + (z-y)u$, 则

$$\begin{aligned}\int_y^z \frac{\mathrm{d}x}{(x-y)^\alpha (z-x)^\beta} &= \int_0^1 \frac{(z-y)\mathrm{d}u}{(z-y)^\alpha u^\alpha (z-y)^\beta (1-u)^\beta} \\ &= (z-y)^{-\alpha-\beta+1}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha (1-u)^\beta} = (z-y)^{-\alpha-\beta+1}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}\end{aligned} \tag{5.1.42c}$$

因此

$$\int_0^z (z-y)^{1-\alpha-\beta}\psi(y)\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^\beta}\mathrm{d}x \tag{5.1.42d}$$

如取 $\beta=1-\alpha$, 则上式变成

$$\begin{aligned}\int_0^z \psi(y)\mathrm{d}y &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^{1-\alpha}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^z \frac{f(y)}{(z-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{5.1.43a}$$

两边求导即得 Abel 方程的解

$$\psi(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y \tag{5.1.43b}$$

其中利用了 $\Gamma$-函数性质: $\Gamma(1)=1$ 和 $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\pi/\sin\alpha\pi$. 分部积分后得到

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(y)\mathrm{d}(x-y)^{\alpha} \\ &= \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}}+\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^x \frac{f'(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^x \frac{f'(y)\mathrm{d}y}{(x-y)^{1-\alpha}}\end{aligned} \tag{5.1.43c}$$

得到上式的第二个等式, 利用了自恰条件, 即 $f(0)=0$.

**例 5.1.11** 求 Abel 等时问题的解, 即求解方程 (5.1.4b) ($\alpha=1/2$), 且函数 $f(\eta)=C$(常数), 即尽管质点 $M$ 从不同高度下降, 但到达最低点 ($y=0$, 方程 (5.1.4b) 是定义在 $y\in[0,\eta]$ 区间上的) 的时间相同. 注意: 质点 $M$ 的高度 $\eta$ 必须大于零, 否则自恰条件 $f(0)=0$ 不可能满足. 由方程 (5.1.43b), 方程 (5.1.4b) 的解为

$$\psi(y)=\frac{C}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{1/2}}\mathrm{d}\eta=\frac{C}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}} \tag{5.1.44a}$$

由关系 $\psi(y)=1/\sin\alpha(x,y)|_{x=x(y)}$ 得到

$$\frac{C}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sin\alpha} \tag{5.1.44b}$$

即

$$y=\frac{C^2}{\pi^2}\sin^2\alpha=\frac{C^2}{2\pi^2}(1-\cos 2\alpha) \tag{5.1.44c}$$

又由方程 (5.1.4c) 得到 (注意: 此时的 $\alpha$ 可看作曲线的参数)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x &= \mathrm{ctan}\alpha\mathrm{d}y=\frac{2C^2}{\pi^2}\mathrm{ctan}\alpha\cos\alpha\sin\alpha d\alpha \\ &= \frac{C^2}{\pi^2}(1+\cos 2\alpha)d\alpha\end{aligned} \tag{5.1.45a}$$

因此

$$x=\frac{C^2}{\pi^2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)+C_1 \tag{5.1.45b}$$

故 Abel 等时问题的解为摆线的一部分

$$x=\frac{C^2}{\pi^2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)+C_1;\ y=\frac{C^2}{2\pi^2}(1-\cos 2\alpha) \tag{5.1.45c}$$

图 5.1.10 表明, 三个不同高度 $A$, $B$ 和 $C$ 的质点, 到达最低点 $D$ 所需时间相同, 计算中取 $C_1=2$ 和 $C=\pi$ 以及 $\alpha\in[0,\pi/2]$. 与例 4.1.1 的最速降线问题比较, 可见, 摆线不仅是最速降线而且是等时线!

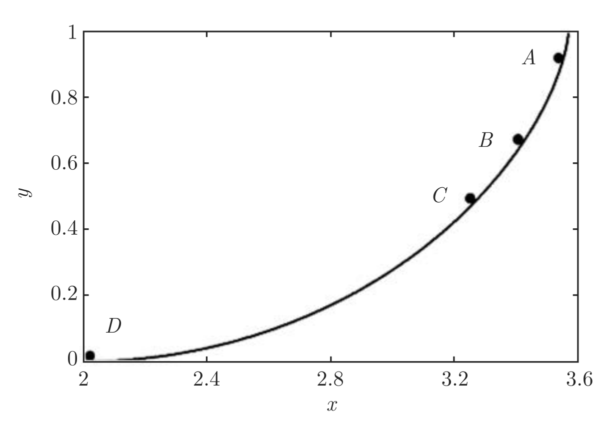



图 5.1.10　不同高度 $A, B$ 和 $C$ 的质点, 到达最低点 $D$ 所需时间相同

**稳定性讨论**　下面来说明 Abel 方程的解 (5.1.43b) 对 $f(x)$ 的微小变化是不稳定的. 设 $\tilde{f}(x)$

$$\tilde{f}(x)=f(x)+\delta f \tag{5.1.46a}$$

相应的解为 $\tilde{\psi}(x)=\psi(x)+\delta\psi$, 取

$$\delta f(x)=\varepsilon\sin\left(\frac{N}{\varepsilon}x\right) \tag{5.1.46b}$$

显然 $\delta f$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\delta f(y)}{\mathrm{d}y}=N\cos\left(\frac{N}{\varepsilon}y\right) \tag{5.1.46c}$$

设 $x\in$[0,1], 容易看出

$$||\tilde{f}(x)-f(x)||=||\delta f||\leqslant\varepsilon \tag{5.1.47a}$$

而由式 (5.1.43c), 解的变化为

$$||\tilde{\psi}(x)-\psi(x)||=||\delta\psi||\sim N \tag{5.1.47b}$$

故当 $\varepsilon \to 0$ 时, $||\delta f|| \to 0$, 但 $||\delta\psi|| \sim N$ 可任意大. 因此, 式 (5.1.43c) 或者 (5.1.43b) 对 $f(x)$ 的变动是不稳定的. 于是, Abel 方程在古典意义上是不适定的.

对第一类 Fredholm 方程也可作相似的讨论, 考虑第一类 Fredholm 方程

$$\int_0^1 k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y = f(x), (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{5.1.48a}$$

设

$$\tilde{f}(x) = f(x) + N\int_0^1 k(x,y)\sin\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}y \tag{5.1.48b}$$

则解 $\tilde{\psi}(x)$ 为

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) + N\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{5.1.48c}$$

显然对于任意固定的 $N$, 只要 $\varepsilon$ 取得足够小

$$||\tilde{f}(x) - f(x)|| = |N|\sqrt{\int_0^1 \left[\int_0^1 k(x,y)\sin\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}y\right]^2 \mathrm{d}x} \sim \varepsilon|N| \tag{5.1.49a}$$

就可任意小, 但解的偏差

$$||\tilde{\psi}(x) - \psi(x)|| = |N|\sqrt{\int_0^1 \sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}x} \to \frac{|N|}{\sqrt{2}} \tag{5.1.49b}$$

却可任意大. 因此第一类 Fredholm 方程是不适定的.

第一类积分方程的不稳定性是不难理解的. 以方程 (5.1.9b) 为例, 左边的积分起到平滑作用, 积分后形成的函数较光滑, 而右边函数如果不满足一定的光滑性是不可能等于左边的.

必须指出的是, 积分方程的稳定性 (或者适定性) 与积分算子的定义域关系密切, 简单的例子是定义在平方可积空间 $L^2(-\infty,\infty)$ 上的 Fourier 积分算子 (以及 Laplace 算子和 Hankel 算子, 见 5.4 节讨论), 不仅是适定的, 而且是保范的算子. 另外, 定义在无限空间的积分方程 (5.1.16b) 和 (5.1.22c) 也是适定的, 至少在简单的散射体情况, 我们得到了它们的稳定解, 即式 (5.1.21b) 和 (5.1.27b).

## 5.2 第二类 Fredholm 积分方程的近似方法

本节讨论积分方程的几种常用近似解法: 迭代法、有限秩近似、矩量法和 Galerkin 法, 以及直接求积法 (Nyström 方法). 主要讨论第二类 Fredholm 积分方程, 而第二类 Volterra 方程可看作第二类 Fredholm 积分方程的特例, 因为只要令下列方程

$$\psi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.1a}$$

的积分核为

$$k(x,y)=\begin{cases}0, & a\leqslant x\leqslant y\leqslant b\\ \tilde{k}(x,y), & a\leqslant y\leqslant x\leqslant b\end{cases}\tag{5.2.1b}$$

方程 (5.2.1a) 即可变成第二类 Volterra 方程.

### 5.2.1 第二类 Fredholm 方程的迭代法

考虑方程 (5.2.1a) 或写成算子形式的方程

$$\psi=f+\lambda\boldsymbol{K}\psi\tag{5.2.2a}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为积分算子

$$\boldsymbol{K}\psi\equiv\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y\tag{5.2.2b}$$

当 $\lambda$ 足够小 (含义见后讨论) 时, 设想方程的解可表示成小参数 $\lambda$ 的幂级数

$$\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\psi_n(x)\tag{5.2.3a}$$

代入方程 (5.2.2a), 比较 $\lambda$ 的同次幂系数可得

$$\begin{aligned}&\psi_0(x)=f\\&\psi_1(x)=\boldsymbol{K}\psi_0=\boldsymbol{K}f\\&\cdots\\&\psi_n(x)=\boldsymbol{K}\psi_{n-1}=\boldsymbol{K}^n f\end{aligned}\tag{5.2.3b}$$

如果定义第 $n$ 次**迭代核**

$$\begin{aligned}&k_1(x,y)=k(x,y)\\&k_2(x,y)=\int_a^b k(x,y_1)k(y_1,y)\mathrm{d}y_1=\int_a^b k_1(x,y_1)k(y_1,y)\mathrm{d}y_1\\&\cdots\\&k_n(x,y)=\int_a^b k_{n-1}(x,y_1)k(y_1,y)\mathrm{d}y_1\end{aligned}\tag{5.2.3c}$$

第 $n$ 次迭代解可表示成

$$\psi_n(x)=\int_a^b k_n(x,y)f(y)\mathrm{d}y\tag{5.2.4a}$$

代入方程 (5.2.3a) 得到方程 (5.2.2a) 的形式解

$$\begin{aligned}\psi(x)&=f(x)+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b k_{n+1}(x,y)\lambda^n f(y)\mathrm{d}y\\&=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,y,\lambda)f(y)\mathrm{d}y=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\boldsymbol{K}^n f\end{aligned}\tag{5.2.4b}$$

其中

$$R(x,y,\lambda) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}(x,y)\lambda^n \tag{5.2.4c}$$

由于 $R(x,y,\lambda)$ 不依赖于 $f(x)$, 故称 $R(x,y,\lambda)$ 为方程 (5.2.2a) 的**解核**. 一般称式 (5.2.4b) 为 **Born 级数**或 **Neumann 级数**. 现在的问题是, 在什么条件下式 (5.2.4b) 中的无穷级数收敛且收敛到方程 (5.2.2a) 的解? 设 $|k(x,y)|$ 的最大值为有限的正数 $M$

$$|k(x,y)| \leqslant M < \infty \tag{5.2.5a}$$

于是, 由式 (5.2.3c)

$$\begin{aligned}
&|k_1(x,y)| = |k(x,y)| < M \\
&|k_2(x,y)| \leqslant M\int_a^b |k_1(x,y)|\mathrm{d}y \leqslant M^2(b-a)^1 \\
&\cdots \\
&|k_n(x,y)| \leqslant M^n(b-a)^{n-1} \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{5.2.5b}$$

式 (5.2.4c) 中无穷级数收敛的条件是

$$\frac{|k_{n+1}(x,y)\lambda^n|}{|k_n(x,y)\lambda^{n-1}|} = \frac{|M^{n+1}(b-a)^n\lambda^n|}{|M^n(b-a)^{n-1}\lambda^{n-1}|} < 1 \tag{5.2.5c}$$

即 $M(b-a)|\lambda| < 1$. 因此当 $\lambda$ 满足

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \tag{5.2.5d}$$

式 (5.2.4c) 关于 $\lambda$ 的幂级数绝对且一致收敛. 但上式仅仅是充分条件, 并非必要条件. 可举两例来证明之.

**例 5.2.1** 设 $k(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$, 其中 $\alpha(x)$ 和 $\beta(y)$ 是两个任意连续函数且满足正交条件

$$\int_a^b \alpha(x)\beta(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{5.2.6a}$$

这时

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}f = \int_a^b k_1(x,y)f(y)\mathrm{d}y = \alpha(x)\int_a^b \beta(y)f(y)\mathrm{d}y \equiv C\alpha(x) \\
&\boldsymbol{K}^2 f = \int_a^b k_2(x,y)f(y)\mathrm{d}y = C\alpha(x)\int_a^b \beta(y)\alpha(y)\mathrm{d}y = 0 \\
&\cdots \\
&\boldsymbol{K}^n f = \boldsymbol{K}^{n-2}(\boldsymbol{K}^2 f) = 0
\end{aligned} \tag{5.2.6b}$$

其中 $C$ 为常数. 于是式 (5.2.4b) 中只有前两项, 故方程有解

$$\psi(x) = f(x) + \boldsymbol{K}f(x) = f(x) + \lambda C\alpha(x) \tag{5.2.6c}$$

无需用到条件式 (5.2.5d).

**例 5.2.2**　Volterra 核

$$k(x,y) = \begin{cases} 0, & a \leqslant x \leqslant y \leqslant b \\ \tilde{k}(x,y), & a \leqslant y \leqslant x \leqslant b \end{cases} \tag{5.2.7a}$$

记

$$M = \max|\tilde{k}(x,y)|; \quad A = \int_a^b |f|\mathrm{d}x \tag{5.2.7b}$$

这时有

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{K}f| &= \left|\int_a^x \tilde{k}(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant AM \\ |\boldsymbol{K}^2 f| &= \left|\int_a^x \tilde{k}(x,y)(\boldsymbol{K}f)\mathrm{d}y\right| \leqslant A\int_a^x M^2\mathrm{d}y = AM^2(x-a) \end{aligned} \tag{5.2.7c}$$

用归纳法可证明, 一般有

$$|\boldsymbol{K}^n f| \leqslant AM^n \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{5.2.7d}$$

事实上, 当 $n = 1$ 和 2 时上式成立, 设 $n = k$ 时成立

$$|\boldsymbol{K}^k f| \leqslant AM^k \frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{5.2.8a}$$

对 $n = k + 1$

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{K}^{k+1} f| &= |\boldsymbol{K}^k(\boldsymbol{K}f)| = |\boldsymbol{K}(\boldsymbol{K}^k f)| \leqslant \int_a^x AM^k \frac{(y-a)^{k-1}}{(k-1)!} M\mathrm{d}y \\ &= AM^{k+1}\frac{(x-a)^k}{k!} \end{aligned} \tag{5.2.8b}$$

即有

$$|\boldsymbol{K}^{k+1} f| \leqslant AM^{k+1} \frac{(x-a)^{(k+1)-1}}{[(k+1)-1]!} \tag{5.2.8c}$$

故当 $n = k + 1$ 时, 式 (5.2.7d) 也成立. 于是对任意 $n$, 式 (5.2.7d) 均成立.

因此, 级数解式 (5.2.4b) 存在对任何 $M < \infty$ 都收敛的控制级数

$$\lambda AM + \lambda^2 AM^2(b-a) + \cdots + \lambda^n AM^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \tag{5.2.9a}$$

第 $n+1$ 项与 $n$ 项之比:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\lambda^{n+1}AM^{n+1}(b-a)^n}{n!}}{\dfrac{\lambda^n AM^n(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda M(b-a)}{n}=0 \tag{5.2.9b}$$

因此, 式 (5.2.9a) 作为 $\lambda$ 的幂级数, 收敛半径为无穷大, 即对任何 $\lambda$, 第二类 Volterra 方程总有解式 (5.2.4b).

### 5.2.2 Banach 空间中第二类 Fredholm 方程的迭代技术

上节的讨论受到一个很严格的条件限制, 即要求

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)} \tag{5.2.10a}$$

如果积分区间无穷大或半无穷, 上式要求 $|\lambda|<0$, 显然这是不可能的. 因此, 有可能没有核能满足不等式 (5.2.10a). 对于无穷区间问题来说, 用 $M=\max|k(x,y)|$ 来代替 $k(x,y)$, 对式 (5.2.4b) 和式 (5.2.4c) 作收敛讨论是过分粗糙的近似. 下面我们将要证明不等式 (5.2.10a) 可被宽得多的条件来代替. 例如, 如果我们把问题限制在 Hilbert 空间, 具体说 $L^2(a,b)$ 中讨论, 则不等式 (5.2.10a) 可被下式来代替

$$|\lambda|\cdot\int_a^b\int_a^b|k(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<1 \tag{5.2.10b}$$

其中区间可是无穷或半无穷, 故只要求 $k(x,y)$ 平方可积就可以了.

为了进行下面的讨论, 首先介绍几个基本概念.

(1) **Banach 空间** 在第二章中, 我们定义 Hilbert 空间为完备的内积向量空间, 特别关心的是 $L^2(a,b)$ 函数空间. 内积的引进具有十分重要的意义, 它使我们可以讨论两个向量之间的 "夹角", 由内积引出的 "范数"$||u||^2=(u,u)$ 则使我们可以讨论向量 "长度". 我们把一个向量的长度称为 "范数"(假如存在的话). 有的向量空间不能定义内积, 但仍然可以定义 "长度" 即可引进 "范数". 向量空间 $V$ 的范数定义为一个实数, 它对应于 $V$ 的任一元素 $f$, 存在 $||f||$ 满足下列三条公理

(a) 对所有 $f,g\in V$, 有 $||f+g||\leqslant||f||+||g||$;

(b) $||f||\geqslant0$, 当且仅当 $f=0$ 时等号成立;

(c) 对于数域 ($V$ 在它上面定义) 中的任何纯量 $a$: $||af||=|a|\cdot||f||$.

能够定义范数的向量空间称为**赋范向量空间**, 例如 $L^2[a,b]$ 空间即是赋范向量空间, 范数可由内积导出

$$||f||^2=(f,f)=\int_a^b|f|^2\mathrm{d}x \tag{5.2.11a}$$

在向量空间上定义了范数, 就可讨论向量序列的收敛性问题. 对于赋范向量空间 $V$ 中的一个序列 $\{f_n\}$, 如果

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0, \quad (f \in V) \tag{5.2.11b}$$

则称序列 $\{f_n\}$ 按范数收敛于 $f$. 如果序列 $\{f_n\}$ 对给定的任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个正整数 $N$, 只要 $m > N$, $n > N$ 时都有

$$||f_n - f_m|| < \varepsilon \tag{5.2.11c}$$

那么称序列 $\{f_n\}$ 为一个**柯西序列** (Cauchy Sequences). 进一步, 如果一个赋范向量空间的每个 Cauchy 序列都收敛到此空间中的一个元素, 则称 $V$ 为完备的赋范向量空间, 亦称为 **Banach 空间**. 一个熟悉的 Banach 空间的例子是 $[a, b]$ 上的连续函数空间 $C[a, b]$, 范数可以定义为

$$||f|| = \max|f(x)|, \quad x \in [a, b] \tag{5.2.11d}$$

显然, 所有的 Hilbert 空间, 范数可有内积引出 $||f|| = (f, f)$.

(2) **有界线性变换**　对作用于赋范向量空间 $V$ 的变换 (或算子) $\boldsymbol{K}$, 若满足

(a) 对于所有 $f,\ g \in V$

$$\boldsymbol{K}(f + g) = \boldsymbol{K}f + \boldsymbol{K}g \tag{5.2.12a}$$

(b) 对于所有 $f \in V$, 以及数域 ($V$ 在它上面定义) 中的所有纯量 $a$

$$\boldsymbol{K}(af) = a\boldsymbol{K}f \tag{5.2.12b}$$

(c) 存在一个常数 $M$, 使对于所有的 $f \in V$

$$||\boldsymbol{K}f|| \leqslant M||f|| \tag{5.2.12c}$$

称 $\boldsymbol{K}$ 为**有界线性变换**, 或**有界线性算子**.

(3) **算子 $\boldsymbol{K}$ 的范数**　如果 $\boldsymbol{K}$ 是作用于 $V$ 上的有界线性变换, 满足 $||\boldsymbol{K}f|| \leqslant M||f||$ 的最小正数 $M$ 称为**算子 $\boldsymbol{K}$ 的范数**, 记作 $||\boldsymbol{K}||$,

$$||\boldsymbol{K}|| = \sup_{f\in V}\frac{||\boldsymbol{K}f||}{||f||} \tag{5.2.13a}$$

可以证明由上式定义的 $||\boldsymbol{K}||$ 确实满足范数的三条公理, 事实上

$$\begin{aligned} ||(\boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2)f|| &= ||\boldsymbol{K}_1 f + \boldsymbol{K}_2 f|| \leqslant ||\boldsymbol{K}_1 f|| + ||\boldsymbol{K}_2 f|| \\ &\leqslant ||\boldsymbol{K}_1|| \cdot ||f|| + ||\boldsymbol{K}_2|| \cdot ||f|| \\ &= (||\boldsymbol{K}_1|| + ||\boldsymbol{K}_2||) \cdot ||f|| \end{aligned} \tag{5.2.13b}$$

即有

$$||\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2|| \leqslant ||\boldsymbol{K}_1||+||\boldsymbol{K}_2|| \tag{5.2.13c}$$

$||\boldsymbol{K}||$ 满足范数的其他公理是容易证明的. 一个 Banach 空间上的所有有界线性变换的集合也构成一个完备的赋范向量空间, 因而也是一个 Banach 空间. 引入算子 $\boldsymbol{K}$ 的范数后, 也可讨论算子序列的收敛性问题, 对于一个算子序列 $\{\boldsymbol{K}_n\}$, 当

$$\lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{K}_n-\boldsymbol{K}||=0 \tag{5.2.13d}$$

我们说算子序列 $\{\boldsymbol{K}_n\}$ 按范数收敛于算子 $\boldsymbol{K}$.

介绍了上述几个概念, 特别是定义了算子的范数后, 我们可以讨论 Banach 空间中积分方程的迭代技术, 并给出十分简洁的结果, 而且讨论也适合于无穷区间情形. 把积分方程写成算子方程形式

$$\psi=f+\lambda\boldsymbol{K}\psi \tag{5.2.14a}$$

假定算子 $\boldsymbol{K}$ 是作用于 Banach 空间 $B$ 上的有界线性算子, $f\in B$, 上式的解可形式地写成

$$\psi=\frac{1}{(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})}f \tag{5.2.14b}$$

假如 $\lambda\boldsymbol{K}$ 在某种意义上足够小, 则 $(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})^{-1}$ 可展成 $\lambda\boldsymbol{K}$ 的级数

$$\frac{1}{(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})}=\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{K}+\lambda^2\boldsymbol{K}^2+\cdots+\lambda^n\boldsymbol{K}^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\boldsymbol{K}^n \tag{5.2.14c}$$

于是, 由式 (5.2.14b) 可得

$$\psi=f+\lambda\boldsymbol{K}f+\lambda^2\boldsymbol{K}^2f+\cdots+\lambda^n\boldsymbol{K}^nf+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\boldsymbol{K}^nf \tag{5.2.14d}$$

上式与式 (5.2.4b) 完全一致. 下面来证明 (5.2.14d) 确是方程 (5.2.14a) 的解. 为此, 首先证明部分和序列 $\{\psi_n\}$ 是个 Cauchy 序列. 令

$$\psi_n=\sum_{m=0}^{n}\lambda^m\boldsymbol{K}^mf \tag{5.2.15a}$$

设 $\mu<\nu$, 则有

$$\begin{aligned}||\psi_\nu-\psi_\mu||&=||\sum_{m=\mu+1}^{\nu}\lambda^m\boldsymbol{K}^mf|| \leqslant \sum_{m=\mu+1}^{\nu}||\lambda^m\boldsymbol{K}^mf||\\&\leqslant \sum_{m=\mu+1}^{\nu}||\lambda^m\boldsymbol{K}^m||\cdot||f||\end{aligned} \tag{5.2.15b}$$

利用关系

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2 f|| &= ||\boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{K}_2 f)|| \leqslant ||\boldsymbol{K}_1|| \cdot ||\boldsymbol{K}_2 f|| \\ &\leqslant ||\boldsymbol{K}_1|| \cdot ||\boldsymbol{K}_2|| \cdot ||f||\end{aligned} \tag{5.2.15c}$$

因此

$$||\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2|| \leqslant ||\boldsymbol{K}_1|| \cdot ||\boldsymbol{K}_2|| \tag{5.2.15d}$$

作用 $m$ 次后取 $\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{K}_2$, 则可推出

$$||\boldsymbol{K}^m|| \leqslant ||\boldsymbol{K}||^m \tag{5.2.16a}$$

代入式 (5.2.15b) 应有

$$\begin{aligned}||\psi_\nu - \psi_\mu|| &\leqslant \sum_{m=\mu+1}^{\nu} \lambda^m ||\boldsymbol{K}||^m ||f|| \\ &= ||f|| \cdot ||\lambda\boldsymbol{K}||^{\mu+1} \sum_{m=0}^{\nu-\mu-1} ||\lambda\boldsymbol{K}||^m\end{aligned} \tag{5.2.16b}$$

假定 $||\lambda\boldsymbol{K}|| < 1$ 则

$$\sum_{m=0}^{\nu-\mu-1} ||\lambda\boldsymbol{K}||^m \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} ||\lambda\boldsymbol{K}||^m = \frac{1}{1-||\lambda\boldsymbol{K}||} \tag{5.2.16c}$$

代入式 (5.2.16b), 最后得

$$||\psi_\nu - \psi_\mu|| \leqslant ||f|| \cdot ||\lambda\boldsymbol{K}||^{\mu+1}(1-||\lambda\boldsymbol{K}||)^{-1} \tag{5.2.16d}$$

故当 $||\lambda\boldsymbol{K}|| < 1$ 时, 只要 $\mu$ 足够大, $||\psi_\nu - \psi_\mu||$ 总可任意小, 因此 $\{\psi_n\}$ 是 Cauchy 序列. 因为 $B$ 是 Banach 空间, 所以 $\{\psi_n\}$ 按范数收敛于 $B$ 中的一个元素 $\psi$, 同样 $\boldsymbol{K}\psi_n$ 按范数收敛于 $\boldsymbol{K}\psi$

$$\lim_{n\to\infty} ||\psi_n - \psi|| = 0;\ \lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{K}\psi_n - \boldsymbol{K}\psi|| = 0 \tag{5.2.17a}$$

但是

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{K}\psi_n &= \lambda\boldsymbol{K}\left[\sum_{m=0}^{n} (\lambda\boldsymbol{K})^m f\right] = \sum_{m=1}^{n+1} (\lambda\boldsymbol{K})^m f \\ &= \sum_{m=0}^{n+1} (\lambda\boldsymbol{K})^m f - f = \psi_{n+1} - f\end{aligned} \tag{5.2.17b}$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty} ||\lambda\boldsymbol{K}\psi_n - (\psi_{n+1} - f)|| = 0 \tag{5.2.17c}$$

即

$$\psi = f + \lambda \boldsymbol{K}\psi \tag{5.2.17d}$$

故只要满足条件 $||\lambda \boldsymbol{K}|| < 1$, 式 (5.2.14d) 确是方程 (5.2.14a) 的解. 此外, 式 (5.2.14d) 也是方程 (5.2.14a) 的唯一解. 证明：设方程 (5.2.14a) 存在二个解 $\psi_1$ 和 $\psi_2$

$$\psi_1 = f + \lambda \boldsymbol{K}\psi_1; \psi_2 = f + \lambda \boldsymbol{K}\psi_2 \tag{5.2.18a}$$

则

$$\psi_1 - \psi_2 = \lambda \boldsymbol{K}(\psi_1 - \psi_2) \tag{5.2.18b}$$

因此

$$||\psi_1 - \psi_2|| = ||\lambda \boldsymbol{K}(\psi_1 - \psi_2)|| \leqslant ||\lambda \boldsymbol{K}|| \cdot ||\psi_1 - \psi_2|| \tag{5.2.18c}$$

而 $||\lambda \boldsymbol{K}|| < 1$, 只有 $||\psi_1 - \psi_2|| = 0$, 等式才能成立, 因此 $\psi_1 = \psi_2$. 仍要指出的是并不是说当 $||\lambda \boldsymbol{K}|| > 1$ 时级数式 (5.2.14d) 必定发散, 式 $||\lambda \boldsymbol{K}|| < 1$ 也是充分条件. 但与上节相比, 这里的结果要广泛得多.

把上述结果用到 $L^2[a,b]$ 空间上, 算子 $\boldsymbol{K}$ 定义为

$$\boldsymbol{K}\psi = \int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y, \quad \psi(x) \in L^2[a,b] \tag{5.2.19a}$$

假定 $k(x,y)$ 作为 $x$ 和 $y$ 的函数平方可积

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \tag{5.2.19b}$$

利用 Schwartz 不等式应有

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{K}\psi|^2 &= \left[\left|\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y\right|\right]^2 \\ &\leqslant \int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}y \cdot \int_a^b |\psi(y)|^2 \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{5.2.19c}$$

即

$$|\boldsymbol{K}\psi|^2 \leqslant ||\psi||^2 \int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}y \tag{5.2.19d}$$

因此

$$|\boldsymbol{K}\psi|^2 \leqslant \int_a^b |\boldsymbol{K}\psi|^2 \mathrm{d}y \leqslant ||\psi||^2 \int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.2.20a}$$

故当 $k(x,y)$ 满足式 (5.2.19b) 时, $\boldsymbol{K}$ 是有界线性算子

$$||\boldsymbol{K}\psi|| \leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \cdot ||\psi|| \tag{5.2.20b}$$

因此, 算子 $\boldsymbol{K}$ 的范数 $||\boldsymbol{K}||$ 满足

$$||\boldsymbol{K}|| \leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{5.2.20c}$$

由 Born 级数收敛条件 $||\lambda\boldsymbol{K}|| < 1$ 得到

$$\lambda < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}} = \frac{1}{||k(x,y)||} \tag{5.2.20d}$$

注意: $||\boldsymbol{K}||$ 是算子 $\boldsymbol{K}$ 的范数, 而

$$\sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \equiv \ ||k(x,y)|| \tag{5.2.20e}$$

是 $k$ 作为 $x$ 和 $y$ 的二元函数的模.

**例 5.2.3**　考虑积分方程

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+y)\psi(y)\mathrm{d}y, \quad x \in [0,\pi] \tag{5.2.21a}$$

积分核 $k(x,y) = \sin(x+y)$. 取 $f(x) = 1$, 上式的 Born 级数解为

$$\psi(x) = 1 + 2\lambda\cos x + \pi\lambda^2 \sin x + \cdots + \cdots \tag{5.2.21b}$$

由式 (5.2.20d) 估计上式的收敛条件

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{2} \tag{5.2.21c}$$

因此, 当 $|\lambda| < \sqrt{2}/\pi$ 时, 式 (5.2.21b) 必定收敛. 另一方面, 方程 (5.2.21a) 可求严格解: 把方程 (5.2.21a) 改写成

$$\psi(x) = f(x) + \lambda\sin x \int_0^{\pi} \cos y\psi(y)\mathrm{d}y + \lambda\cos x \int_0^{\pi} \sin y\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.22a}$$

令

$$a = \int_0^{\pi} \cos y\psi(y)\mathrm{d}y;\ b = \int_0^{\pi} \sin y\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.22b}$$

方程 (5.2.22a) 两边分别以 $\sin x$ 和 $\cos x$ 相乘并积分可得 $a$ 和 $b$ 满足的代数方程

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x + \frac{\pi\lambda}{2}b \\ b &= \int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x + \frac{\pi\lambda}{2}a \end{aligned} \tag{5.2.22c}$$

当取 $f(x)=1$, 上式简化为

$$a=\frac{\pi\lambda}{2}b;\ b=2+\frac{\pi\lambda}{2}a \tag{5.2.22d}$$

于是解得

$$b=\frac{2}{1-\lambda^2\pi^2/4};\ a=\frac{\pi\lambda}{1-\lambda^2\pi^2/4} \tag{5.2.23a}$$

把 $a$ 和 $b$ 代入 (5.2.22a), 可得方程 (5.2.21a) 的严格解为

$$\psi(x)=1+\frac{\lambda^2\pi}{1-\pi^2\lambda^2/4}\sin x+\frac{2\lambda}{1-\pi^2\lambda^2/4}\cos x \tag{5.2.23b}$$

如果把上式展成 $\lambda$ 的幂级数, 收敛半径为 $|\lambda|<2/\pi$. 由此可见, 用式 (5.2.20d) 作收敛性讨论时, 只能给出收敛半径的下限. 当 $|\lambda|=\pm 2/\pi$ 时, 式 (5.2.23b) 已无意义, 进一步的讨论见 5.2.3 小节的例 5.2.5. 顺便指出, 当 $\lambda=0.1$ 时, 就是 4.5.2 小节中例 4.5.3 的结果. 因此, 对本例而言, 最速下降法与 Born 级数给出相同的结果, 而且二者均能得出一样的充分条件.

**例 5.2.4** 求 Lippman-Schwinger 方程 (5.1.14b) 的 Born 近似解. 设入射波为平面波 $\psi_i(\boldsymbol{r})=\psi_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$, 当平均作用势 $\bar{U}$ 较小 (意义下面讨论) 时可用叠代求解:

0 级近似, 即为入射波

$$\psi^{(0)}(\boldsymbol{r})\approx\psi_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{5.2.24a}$$

1 级近似, 即所谓 Born 近似

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{r})\approx\psi_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(\boldsymbol{r}')\psi^{(0)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{5.2.24b}$$

2 级近似

$$\psi^{(2)}(\boldsymbol{r})\approx\psi_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(\boldsymbol{r}')\psi^{(1)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{5.2.24c}$$

显然, 零级近似式 (5.2.24a) 没有给出散射信息, 散射波为零. 考虑一级 Born 近似式 (5.2.24b), 在远场条件下 $|\boldsymbol{r}|\gg|\boldsymbol{r}'|$, 分母可作近似 $1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\approx 1/|\boldsymbol{r}|$, 而分子作近似

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{r^2-2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'+r'^2}\approx r\left(1-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2}\right) \tag{5.2.25a}$$

代入式 (5.2.24b) 得到远场散射波为

$$\psi_s^{(1)}(\boldsymbol{r})\approx-\psi_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}\cdot\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{5.2.25b}$$

其中 $\boldsymbol{q} \equiv k\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ 为远场测量点 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量. 显然 $\hbar\boldsymbol{q}$ 是散射过程中粒子动量的转移. 定义散射振幅

$$f(\vartheta,\varphi) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{5.2.25c}$$

位于 $\vartheta$ 方向的探测仪器 (见图 5.1.3) 检测到的粒子正比于 $|f(\vartheta,\varphi)|^2$. 因 $k\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{k}$ 大小相等, 设 $\boldsymbol{k}$ 与 $k\boldsymbol{e}_r$ 的夹角为 $\vartheta$, 则 $q = 2k\sin(\vartheta/2)$. 当粒子与散射中心 $A$ 的相互作用势为有心力势 $U(\boldsymbol{r}) = U(r)$ 时, 积分过程中取 $\boldsymbol{q}$ 为 $z$ 方向, 式 (5.2.25c) 简化成

$$\begin{aligned}f(\vartheta,\varphi) &\approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr'\cos\vartheta'}\sin\vartheta'\mathrm{d}\vartheta'\int_0^{\infty}U(r')r'^2\mathrm{d}r'\\ &= -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^{\infty}r'U(r')\sin(qr')\mathrm{d}r' \equiv f(\vartheta)\end{aligned} \tag{5.2.26a}$$

可见散射振幅与 $\varphi$ 无关. 最后, 求得在 Born 近似下的散射振幅平方为

$$|f(\vartheta)|^2 = \left(\frac{2m}{\hbar^2 q}\right)^2\left|\int_0^{\infty}r'U(r')\sin(qr')\mathrm{d}r'\right|^2 \tag{5.2.26b}$$

下面简单说明 Born 近似的适用范围. 设有效作用半径 (力程) 和平均作用势分别为 $a$ 和 $\bar{U}$, Lippman-Schwinger 方程 (5.1.14b) 右边积分中用 $\psi_i$ 代替 $\psi$ 的条件显然是 $\psi \approx \psi_i$, 即波函数变化不大. 散射前粒子的动量在 $z$ 方向, 散射后产生 $x$ 和 $y$ 方向的分量 (但大小不变化, 称为弹性散射), 波函数变化较小意味着, $x$ 和 $y$ 方向的动量分量较小, 即 $\Delta p \ll \hbar/a$. 在力程范围内, 粒子动能变化 $\Delta E \sim \bar{U}$, 故 $\Delta p = m\Delta E/p \approx m\bar{U}/p$, 代入 $\Delta p \ll \hbar/a$ 得到 Born 近似的条件为 $m\bar{U}a/p \ll \hbar$. 即要求入射粒子有较大的动量. 因此 Born 近似一般适用于高能 ($\sim$ MeV) 入射粒子的散射. 作为例子, 考虑屏蔽 Coulomb 场中粒子的散射, 高速带电粒子 (电量为 $Z'e$) 被中性原子散射, 散射中心的原子核被核外电子屏蔽, 这种屏蔽的 Coulomb 场可表示为

$$U(r) = -\frac{Z'Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right) \tag{5.2.27a}$$

式中 $Z$ 和 $a$ 分别为散射中心的原子序和有效屏蔽半径. 上式代入式 (5.2.26b) 得到

$$\begin{aligned}|f(\vartheta)|^2 &= \left(\frac{2m}{\hbar^2 q}\frac{Z'Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left|\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{r'}{a}\right)\sin(qr')\mathrm{d}r'\right|^2\\ &= \left(\frac{2m}{\hbar^2}\frac{Z'Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{(q^2+1/a^2)^2}\end{aligned} \tag{5.2.27b}$$

若入射粒子能量很高：$qa = 2ka\sin(\vartheta/2) \gg 1$, 则上式可近似为

$$|f(\vartheta)|^2 = \left(\frac{mZ'Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{4(k\hbar)^4\sin^4(\vartheta/2)} \tag{5.2.27c}$$

即为经典的 Rutherford 散射公式. 注意：上式成立的条件与 $\vartheta$ 有关, 只有 $\vartheta$ 较大时才成立.

### 5.2.3 可分核方程和有限秩核近似

上小节研究了包含小算子的第二类 Fredholm 积分方程的迭代法, 但实际问题不一定满足条件, 故有必要发展一种更为普遍适用的方法. 本节介绍有限秩技术 (亦称可分核近似). 利用这种近似方法, 可以把积分方程转化成有限维矩阵 (有限秩一词的来源) 方程或者线性代数方程组.

首先考虑具有下列简单形式核的 Fredholm 积分方程

$$k(x,y) = p(x)q^*(y) \tag{5.2.28a}$$

其中取复共轭是为了讨论的方便. 假定 $p(x)$ 和 $q(x)$ 属于 $L^2[a,b]$, 并且

$$|\lambda|^2\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 1 \tag{5.2.28b}$$

由上节的结论, Born 级数式 (5.2.14d) 收敛, 故第二类 Fredholm 方程

$$\psi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.28c}$$

有解

$$\begin{aligned}\psi(x) =& f(x) + \lambda\int_a^b p(x)q^*(y)f(y)\mathrm{d}y \\ &+\lambda^2\int_a^b p(x)q^*(y_1)p(y_1)q^*(y_2)f(y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 + \cdots\end{aligned} \tag{5.2.29a}$$

令

$$(q,p) = \int_a^b q^*(y)p(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.29b}$$

则

$$\begin{aligned}\psi(x) &= f(x) + \lambda p(x)(q,f) + \lambda^2 p(x)(q,p)(q,f) + \cdots \\ &= f(x) + \lambda p(x)(q,f)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(q,p)^n\end{aligned} \tag{5.2.29c}$$

另一方面, 由条件式 (5.2.28b) 可证明

$$|\lambda(q,p)| < 1 \tag{5.2.30a}$$

事实上, 由 Schwartz 不等式

$$|(q,p)| \leqslant \sqrt{(q,q)(p,p)} = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} < \frac{1}{|\lambda|} \tag{5.2.30b}$$

故有

$$|\lambda(q,p)| \leqslant |\lambda| \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} < 1 \tag{5.2.30c}$$

于是, 级数式 (5.2.29c) 是一等比级数, 立即可求得

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \frac{(q,f)}{1-\lambda(q,p)} p(x) \tag{5.2.30d}$$

因此, 在假定条件式 (5.2.28b) 下, 我们从 Born 级数求得了解式 (5.2.30d). 事实上, 只要 $1-\lambda(q,p) \neq 0$, 上式总是方程 (5.2.28c) 和 (5.2.28a) 的解, 而无需加限制条件式 (5.2.28b). 又一次表明了式 (5.2.28b) 的充分性, 而非必要. 证明如下: 把方程 (5.2.28c) 写成形式

$$\begin{aligned} \psi(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b p(x) q^*(y) \psi(y) \mathrm{d}y \\ &= f(x) + \lambda p(x)(q,\psi) \end{aligned} \tag{5.2.31a}$$

用 $q^*$ 对上式两边求内积

$$(q,\psi) = (q,f) + \lambda(q,p)(q,\psi) \tag{5.2.31b}$$

即

$$(q,\psi)[1-\lambda(q,p)] = (q,f) \tag{5.2.31c}$$

当 $1-\lambda(q,p) \neq 0$

$$(q,\psi) = \frac{(q,f)}{1-\lambda(q,p)} \tag{5.2.31d}$$

代入式 (5.2.31a) 就得到式 (5.2.30d). 下面讨论 $1-\lambda(q,p)=0$ 情形, 由式 (5.2.30a) 知, 这恰好是级数式 (5.2.29c) 收敛区域的边界. 为了进一步考察其原因, 考虑齐次方程

$$\psi = \lambda p(x)(q,\psi) \tag{5.2.32a}$$

两边用 $q^*$ 取内积

$$(q,\psi)=\lambda(q,p)(q,\psi) \tag{5.2.32b}$$

显然, 当且仅当 $\lambda(q,p)=1$, 方程 (5.2.32a) 才有非零解, 这时 $(q,\psi)$ 可为任意常数, 因此方程 (5.2.32a) 有解

$$\psi=Cp(x),\quad 当\lambda(q,p)=1时 \tag{5.2.32c}$$

其中 $C$ 为任意常数. 由此可见, 当齐次方程 (5.2.32a) 有非零解时, 非齐次方程的解式 (5.2.30d) 不成立. 这时应有相容性关系

$$(q,f)=0 \tag{5.2.33a}$$

即要求 $q$ 与 $f$ 正交. 当上式满足时, 非齐次方程 (5.2.28c) 的解为

$$\psi(x)=f(x)+Bp(x) \tag{5.2.33b}$$

其中 $B$ 为任意常数.

**共轭算子**　为了进一步考察正交性条件式 (5.2.33a), 考虑积分算子 $\boldsymbol{K}$ 的**共轭算子** $\boldsymbol{K}^+$. 与第二章微分算子一样, $\boldsymbol{K}^+$ 定义为

$$(\boldsymbol{K}\psi_1,\psi_2)=(\psi_1,\boldsymbol{K}^+\psi_2) \tag{5.2.34a}$$

其中假定 $\boldsymbol{K}$ 是作用在 $L^2[a,b]$ 上的算子, 而 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 为 $L^2[a,b]$ 中的任意元素. 因

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{K}\psi_1,\psi_2)&=\int_a^b\left[\int_a^b k^*(x,y)\psi_1^*(y)\mathrm{d}y\right]\psi_2(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\psi_1^*(x)\left[\int_a^b k^*(y,x)\psi_2(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5.2.34b}$$

而

$$(\psi_1,\boldsymbol{K}^+\psi_2)=\int_a^b\psi_1^*(x)\left[\int_a^b k^+(x,y)\psi_2(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{5.2.34c}$$

其中 $k^+(x,y)$ 为共轭算子 $\boldsymbol{K}^+$ 的积分核. 上二式代入式 (5.2.34a) 得到

$$\int_a^b\psi_1^*(x)\int_a^b[k^+(x,y)-k^*(y,x)]\psi_2(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=0 \tag{5.2.35a}$$

从 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 的任意性, 可推得共轭算子 $\boldsymbol{K}^+$ 的核

$$k^+(x,y)=k^*(y,x) \tag{5.2.35b}$$

对式 (5.2.28a), 显然 $k^+(x,y)=q(x)p^*(y)$, 考虑算子 $\boldsymbol{K}$ 的共轭齐次方程

$$\psi^+=\lambda^*\boldsymbol{K}^+\psi^+ \tag{5.2.36a}$$

即

$$\psi^+=\lambda^* q(p,\psi^+) \tag{5.2.36b}$$

两边用 $p^*$ 取内积

$$(p,\psi^+)=\lambda^*(p,q)(p,\psi^+) \tag{5.2.36c}$$

故只有当 $\lambda^*(p,q)=1$ 时, 方程 (5.2.36b) 才有非零解

$$\psi^+(x)=Dq(x),\quad 当\lambda^*(p,q)=1时 \tag{5.2.37a}$$

因此, 正交性条件式 (5.2.33a) 可叙述成: $f$ 与共轭齐次方程 (5.2.36b) 的非零解正交.

综合上面的讨论, 可以得出如下结论.

(1) 当 $\lambda^*(p,q)\neq 1$ 时, 共轭算子 $\boldsymbol{K}^+$ 的齐次方程 (5.2.36b) 只有零解, 方程 (5.2.28c) 有唯一解 (5.2.30d);

(2) 当 $\lambda^*(p,q)=1$ 时, 方程 (5.2.28c) 有解的条件是, $f$ 与齐次共轭方程 (5.2.36a) 的非零解正交, 且解为

$$\psi(x)=f(x)+Ap(x) \tag{5.2.37b}$$

其中 $p(x)$ 为齐次方程 (5.2.32a) 的非零解.

**Fredholm 择一定理**: 进一步考虑具有下列较复杂积分核的积分算子 $\boldsymbol{K}_N$

$$k_N(x,y)=\sum_{n=1}^{N}p_n(x)q_n^*(y) \tag{5.2.38a}$$

设 $\boldsymbol{K}_N$ 作用在 $L^2[a,b]$, $\boldsymbol{K}_N$ 的共轭算子 $\boldsymbol{K}_N^+$ 具有核

$$k_N^+(x,y)=k_N^*(y,x)=\sum_{n=1}^{N}q_n(x)p_n^*(y) \tag{5.2.38b}$$

由对方程 (5.2.28c) 和 (5.2.28a) 讨论的启示, 我们同时考虑两个方程

$$\psi=\lambda\boldsymbol{K}_N\psi+f \tag{5.2.39a}$$

及共轭齐次方程

$$\psi^+=\lambda^*\boldsymbol{K}_N^+\psi^+ \tag{5.2.39b}$$

上二式可写成

$$\psi = f + \lambda \sum_{n=1}^{N} p_n(q_n, \psi);\ \psi^+ = \lambda^* \sum_{n=1}^{N} q_n(p_n, \psi^+) \tag{5.2.39c}$$

为了求解式 (5.2.39c) 的第一个方程, 只要求得常数集合 $a_n \equiv (q_n, \psi)$ 即可, 故用 $q_m^*$, $(m = 1, 2, ..., N)$ 取其两边的内积

$$(q_m, \psi) = (q_m, f) + \lambda \sum_{n=1}^{N} (q_m, p_n)(q_n, \psi) \tag{5.2.40a}$$

$$(m = 1, 2, \cdots, N)$$

令 $a_{mn} = (q_m, p_n)$ 和 $b_m = (q_m, f)$, 上式变成

$$a_m - \lambda \sum_{n=1}^{N} a_{mn} a_n = b_m,\ (m = 1, 2, \cdots, N) \tag{5.2.40b}$$

用矩阵表示, 可写成

$$(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{A})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{5.2.40c}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元 $[\boldsymbol{A}]_{mn} = a_{mn}$, $(m, n = 1, 2, \cdots, N)$, $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_N]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_N]^{\mathrm{T}}$ 为列矢量. 类似地, 设 $\tilde{a}_n = (p_n, \psi^+)$, 则式 (5.2.39c) 的第二个方程, 即齐次共轭变成

$$\tilde{a}_m - \lambda^* \sum_{n=1}^{N} (p_m, q_n)\tilde{a}_n = 0 \tag{5.2.41a}$$

利用 $(p_m, q_n) = (q_n, p_m)^* = a_{nm}^*$, 上式变成

$$\tilde{a}_m - \lambda^* \sum_{n=1}^{N} a_{nm}^* \tilde{a}_n = 0 \tag{5.2.41b}$$

写成矩阵的形式

$$(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{A})^+ \tilde{\boldsymbol{a}} = 0 \tag{5.2.41c}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{a}} = [\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_N]^{\mathrm{T}}$, $(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{A})^+$ 为 $(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{A})$ 的共轭矩阵

$$(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{A})^+ = \overline{(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{A})^*} \tag{5.2.41d}$$

因此, 我们把积分方程 (5.2.39a) 和 (5.2.39b) 的讨论转化成二个代数方程 (5.2.40c) 及 (5.2.41c). 由线性代数知道, 当且仅当对于齐次共轭方程 (5.2.41c) 的所有非零解 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交

$$(\boldsymbol{b}, \tilde{\boldsymbol{a}}) = 0 \tag{5.2.42a}$$

亦即

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^* \tilde{a}_n = 0 \tag{5.2.42b}$$

方程 (5.2.40c) 才有解, 相应地, 积分方程 (3.2.39a) 也仅在此条件下才有解. 由 $\tilde{a}_n$ 和 $b_n$ 的定义, 上式即为

$$\sum_{n=1}^{N} (q_n, f)^*(p_n, \psi^+) = \sum_{n=1}^{N} (f, q_n)(p_n, \psi^+) = 0 \tag{5.2.43a}$$

利用 $\boldsymbol{K}_N^+$ 的定义式 (5.2.38b), 上式即为

$$(f, \boldsymbol{K}_N^+ \psi^+) = 0 \tag{5.2.43b}$$

假如 $\psi^+ \neq 0$, 由齐次共轭方程 (5.2.39b), 上式变成

$$(f, \psi^+) = 0 \tag{5.2.43c}$$

即如果 $f$ 与齐次共轭方程 (5.2.39b) 的所有非零解 $\psi^+$ 正交, 那么, 方程 (5.2.39a) 的解存在; 当齐次共轭方程 (5.2.39b) 只有零解 $\psi^+ \equiv 0$, 上式恒成立, 于是方程 (5.2.39a) 的解总存在且唯一. 从方程 (5.2.40c) 和 (5.2.41c) 也可看出: 如果共轭方程 (5.2.41c) 只有零解, 则逆矩阵 $(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{A})^{-1}$ 存在, 于是方程 (5.2.40c) 有唯一解

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{b} \tag{5.2.43d}$$

总结上述讨论, 我们可以得到下列定理, 即所谓 **Fredholm 择一定理**.

(1) 假如 $\boldsymbol{K}_N$ 是有限秩线性算子, 而 $\psi_j^+$, $(j = 1, 2, \cdots, J)$ 满足齐次共轭方程

$$\lambda^* \boldsymbol{K}_N^+ \psi_j^+ = \psi_j^+ \tag{5.2.44a}$$

那么, 当且仅当 $f$ 与所有 $\psi_j^+$ 正交 (即 $(f, \psi_j^+) = 0$) 时, 非齐次方程

$$\psi = f + \lambda \boldsymbol{K}_N \psi \tag{5.2.44b}$$

才有解, 如果齐次共轭方程 (5.2.44a) 的解 $\psi_j^+ \equiv 0$, 那么非齐次方程 (5.2.44b) 的解 $\psi$ 唯一.

(2) 假如 $\boldsymbol{K}_N$ 是有限秩线性算子, 而 $\psi_j$, $(j = 1, 2, \cdots, J)$ 满足齐次共轭方程 (注意: $\boldsymbol{K}_N$ 和 $\boldsymbol{K}_N^+$ 互为共轭)

$$\lambda \boldsymbol{K}_N \psi_j = \psi_j \tag{5.2.45a}$$

那么, 当且仅当 $g$ 与所有 $\psi_j$ 正交 (即 $(g,\psi_j)=0$) 时, 非齐次方程

$$\psi^+ = g + \lambda^* \boldsymbol{K}_N^+ \psi^+ \tag{5.2.45b}$$

才有解; 如果齐次共轭方程 (5.2.45a) 的解 $\psi_j \equiv 0$, 那么非齐次方程 (5.2.45b) 的解 $\psi^+$ 唯一.

(3) 二个互为共轭的齐次方程

$$\lambda \boldsymbol{K}_N \psi_j = \psi_j;\ \lambda^* \boldsymbol{K}_N^+ \psi_j^+ = \psi_j^+ \tag{5.2.45c}$$

有相同数目的线性独立解.

上述定理的 (2) 和 (3) 部分是不难证明的. 下面考察非齐次方程 (5.2.44b) 的可解性与算子 $\boldsymbol{K}_N$ 的本征值的关系. 设算子 $\boldsymbol{K}_N$ 的本征函数和相应的本征值分别为 $\psi_\mu$ 和 $\lambda_\mu$, 本征方程

$$\psi_\mu = \lambda_\mu \boldsymbol{K}_N \psi_\mu \tag{5.2.46a}$$

可化成

$$(\boldsymbol{I} - \lambda_\mu \boldsymbol{A})\boldsymbol{a} = 0 \tag{5.2.46b}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元 $[\boldsymbol{A}]_{mn} = (q_m, p_n) \equiv a_{mn}$, $(m,n=1,2,\cdots N)$, $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_N]^{\mathrm{T}}$ 和 $a_n \equiv (q_n, \psi)$. 于是, 本征值 $\lambda_\mu$ 满足下列行列式方程

$$\det[\boldsymbol{I} - \lambda_\mu \boldsymbol{A}] = 0 \tag{5.2.46c}$$

比较上式与式 (5.2.43d) 可知: 当 $\lambda$ 不等于本征值 $\lambda_\mu$ 时, $(\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{A})$ 是满秩矩阵, 故 $(\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{A})^{-1}$ 存在, 于是方程 (5.2.40c) 的解存在且唯一; 当 $\lambda$ 等于某一本征值 $\lambda_\mu$ 时, $(\boldsymbol{I} - \lambda_\mu\boldsymbol{A})^{-1}$ 不存在, 方程 (5.2.40c) 有解的条件即为式 (5.2.42a). 这个结果与 Fredholm 择一定理是一致的.

**例 5.2.5** 考虑积分方程 (5.2.21a), 积分核 $k(x,y) = \sin(x+y)$. 本征方程为

$$\psi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+y)\psi(y)\mathrm{d}y,\ x \in [0,\pi] \tag{5.2.47a}$$

上式改写成

$$\psi(x) = \lambda \sin x \int_0^{\pi} \cos y \psi(y)\mathrm{d}y + \lambda \cos x \int_0^{\pi} \sin y \psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.47b}$$

令

$$a = \int_0^{\pi} \cos y \psi(y)\mathrm{d}y;\ b = \int_0^{\pi} \sin y \psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.47c}$$

方程 (5.2.47b) 两边分别以 $\sin x$ 和 $\cos x$ 相乘并积分得到 $a$ 和 $b$ 满足的方程

$$a=\frac{\pi\lambda}{2}b;\quad b=\frac{\pi\lambda}{2}a \tag{5.2.47d}$$

于是本征值满足 $(\pi\lambda/2)^2=1$, 故二个本征值 $\lambda_{1,2}=\pm2/\pi$, 以及 $a=\pm b$. 相应的本征函数分别为

$$\psi_+(x)=\frac{2a}{\pi}(\sin x+\cos x);\ \psi_+(x)=\frac{2a}{\pi}(\sin x-\cos x) \tag{5.2.47e}$$

其中常数 $a$ 可由归一化条件决定. 最后得到

$$\begin{aligned}\psi_+(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\\ \psi_-(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned} \tag{5.2.48a}$$

当 $\lambda=\lambda_{1,2}$ 时, 方程 (5.2.21a) 有解的条件是 $f(x)$ 与本征函数正交, 并且解为

$$\psi(x)=f(x)+C_1\psi_+(x)+C_2\psi_-(x) \tag{5.2.48b}$$

**预解算子**　假定非齐次方程 (5.2.44b) 存在唯一解 (即 $\lambda\neq\lambda_\mu$), 则 $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$, 亦即

$$\begin{aligned}a_n\equiv(q_n,\psi)&=\sum_{m=1}^{N}[(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{A})^{-1}]_{nm}b_m\\ &=\sum_{m=1}^{N}[(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{A})^{-1}]_{nm}(q_m,f)\end{aligned} \tag{5.2.49a}$$

代入式 (5.2.39c) 的第一个方程得

$$\psi=f+\lambda\sum_{m,n=1}^{N}p_n[(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{A})^{-1}]_{nm}(q_m,f) \tag{5.2.49b}$$

上式即为非齐次方程 (5.2.44b) 之解. 故求解积分方程 (5.2.44b) 归结为计算一个给定矩阵的逆. 形式上, 上式可以写成

$$\psi=(\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{R}_N)f \tag{5.2.49c}$$

其中

$$\boldsymbol{R}_N\equiv\sum_{n,m=1}^{N}[(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{A})^{-1}]_{n,m}p_nq_m^* \tag{5.2.49d}$$

称为算子 $\boldsymbol{K}_N$ 的**预解算子**. 可以证明 $(\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{R}_N)=(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K}_N)^{-1}$, 因此 $(\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{R}_N)$ 确实是 $(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K}_N)$ 的逆算子.

**有限秩核近似** 讨论有限秩积分算子的意义在于: $L^2[a,b]$ 中任一积分算子 $\boldsymbol{K}$ 的核 $k(x,y)$, 如果它是平方可积的, 则总可以用一个有限秩的线性算子 $\boldsymbol{K}_N$ 按范数来任意逼近. 最简单的逼近方式是多项式逼近

$$k_N(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N}A_{nm}x^ny^m \tag{5.2.50a}$$

根据第二章的讨论, $\{x^ny^m\}$ 构成完备系, 故

$$\lim_{N\to\infty}||k(x,y)-k_N(x,y)||=0 \tag{5.2.50b}$$

因此, 可以作适当的切断近似, 来求解平方可积核积分方程的近似解. 设 $k(x,y)$ 平方可积, 则总可取形式

$$k(x,y)=k_N(x,y)+\Delta k(x,y) \tag{5.2.50c}$$

其中 $k_N(x,y)$ 是有限秩的, 而 $\Delta k(x,y)$ 是逼近中的误差. 当 $N$ 取足够大时, 由 Bessel 不等式知, $\Delta k(x,y)$ 可任意小, 于是 $\Delta k(x,y)$ 可作为小算子来处理. 因此可以把有限秩近似与小算子迭代法结合起来, 求积分方程的近似解, 并利用这种方法来讨论解的性质. 这将是下一节的任务之一. 当然, 也可用其他近似方法把核作有限秩近似, 如 Taylor 级数展开法, 插值法和正交函数展开法, 等等.

**Taylor 级数展开法** 对形如 $k(x,y)=\sin(xy)$ 或 $k(x,y)=\exp(xy)$ 的核, 用 Taylor 级数展开法作有限秩近似比较方便, 我们以具体例子来说明.

**例 5.2.6** 考虑定义在 [0,1/2] 区间上的积分方程

$$\psi(x)=\int_0^{1/2}\sin(xy)\psi(y)\mathrm{d}y+f(x) \tag{5.2.51a}$$

显然, 在 [0,1/2] 区间上, 核 $k(x,y)=\sin(xy)$ 是平方可积的, 展成 Taylor 级数

$$\sin(xy)=xy-\frac{x^3y^3}{6}+\frac{x^5y^5}{120}-\cdots \tag{5.2.51b}$$

在 [0,1/2] 内上述级数收敛很快, 故取前 2 项即可. 于是得到可分核近似方程

$$\psi(x)-\int_0^{1/2}\left(xy-\frac{1}{6}x^3y^3\right)\psi(y)\mathrm{d}y=f(x) \tag{5.2.51c}$$

上式改写成

$$\psi(x)=f(x)+ax+bx^3 \tag{5.2.51d}$$

其中

$$a\equiv\int_0^{1/2}y\psi(y)\mathrm{d}y;\ b\equiv-\frac{1}{6}\int_0^{1/2}y^3\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.52a}$$

分别用 $x$ 和 $x^3$ 乘方程 (5.2.51d) 二边并对 $x$ 在 [0,1/2] 区间上积分得到

$$\begin{aligned} a &= f_1 + \frac{1}{24}a + \frac{1}{160}b \\ b &= f_2 - \frac{1}{960}a - \frac{1}{5376}b \end{aligned} \tag{5.2.52b}$$

其中 $f_1 \equiv \int_0^{1/2} xf(x)\mathrm{d}x$ 和 $f_2 \equiv -\frac{1}{6}\int_0^{1/2} x^3 f(x)\mathrm{d}x$. 容易得到

$$\begin{aligned} a &\approx 1.043277\left(\frac{5377}{5376}f_1 + \frac{1}{160}f_2\right) \\ b &\approx 1.043277\left(-\frac{1}{960}f_1 + \frac{23}{24}f_2\right) \end{aligned} \tag{5.2.52c}$$

上式代入 (5.2.51d) 就可求得方程的近似解. 对这种近似方法作误差估计较为复杂, 故略去.

**插值法** 考虑定义在区域 $G$ 上的第二类 Fredholm 积分方程

$$\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) + \int_G k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r} \in G \tag{5.2.53a}$$

把区域 $G$ 分成 $N$ 个不相交的子区域 $G_j$, $(j = 1, 2, \cdots, N)$(如矩形、长方体、三角形或三棱柱, 等等), 每个子区域 $G_j$, $(j = 1, 2, \cdots, N)$ 的脉冲基函数选为 (其中 $V_j$ 是子区域 $G_j$ 的体积.)

$$e_j(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1/\sqrt{V_j}, & \boldsymbol{r} \in G_j \\ 0, & \boldsymbol{r} \notin G_j \end{cases} \tag{5.2.53b}$$

则积分核 $k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 关于变量 $\boldsymbol{r}'$ 可插值近似为

$$k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \approx k_N(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{j=1}^{N} k(\boldsymbol{r}, M_j)\sqrt{V_j}e_j(\boldsymbol{r}') \tag{5.2.53c}$$

其中 $M_j$ 为子区域 $G_j$, $(j = 1, 2, \cdots, N)$ 的中心点. 上式代入方程 (5.2.53a)

$$\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) + \sum_{j=1}^{N} a_j k(\boldsymbol{r}, M_j), \quad \boldsymbol{r} \in G \tag{5.2.54a}$$

其中系数 $a_j$ 是子区域 $G_j$ 上的平均

$$a_j \equiv \sqrt{V_j}\int_G e_j(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' = \int_{G_j} \psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{5.2.54b}$$

方程 (5.2.54a) 可用上述的有限秩近似方法解之.

进一步, 积分核 $k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 关于变量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 可同时插值近似为

$$k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\approx k_N(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{i,j=1}^{N}k(M_i,M_j)\sqrt{V_iV_j}e_i(\boldsymbol{r})e_j(\boldsymbol{r}') \tag{5.2.55a}$$

代入方程 (5.2.53a) 得到

$$\psi(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})+\sum_{i,j=1}^{N}a_jk(M_i,M_j)\sqrt{V_i}e_i(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in G \tag{5.2.55b}$$

上式二边乘 $e_l(\boldsymbol{r})$, $(l=1,2,\cdots,N)$ 并且在区域 $G$ 上积分得到

$$a_l=\int_{G_l}f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}+\sum_{j=1}^{N}a_jV_lk(M_l,M_j)\qquad (l=1,2,\cdots,N) \tag{5.2.55c}$$

即

$$\sum_{j=1}^{N}[\delta_{lj}-V_lk(M_l,M_j)]a_j=\int_{G_l}f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\qquad (l=1,2,\cdots,N) \tag{5.2.55d}$$

上式一旦解出, 代入方程 (5.2.55b) 就可以得到方程 (5.2.53a) 的近似解. 这种对变量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 同时插值的优点是离散矩阵元生成无需积分, 缺点是近似精度较低.

**正交函数展开法** 设 $k(x,y)$ 平方可积, 可以选取 $L^2[a,b]$ 上的一个完备的正交归一系 $\{\psi_n\}$ 作展开

$$k(x,y)=\sum_{m,l=1}^{\infty}a_{ml}\psi_m(x)\psi_l(y) \tag{5.2.56a}$$

其中

$$a_{lm}=\int_a^b\int_a^b k(x,y)\psi_m^*(x)\psi_l^*(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.2.56b}$$

级数式 (5.2.56a) 的收敛性有 Bessel 不等式保证, 故可取有限秩近似

$$k(x,y)\approx k_N(x,y)=\sum_{m,l=1}^{N}a_{ml}\psi_m(x)\psi_l(y) \tag{5.2.56c}$$

实用中常取 $\{\psi_n\}$ 为脉冲基函数

$$\psi_n^{(N)}(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{N}{l}}, & a+(n-1)\dfrac{l}{N}\leqslant x\leqslant a+n\dfrac{l}{N}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{5.2.57a}$$

其中 $l=(b-a)$, 而 $n=1,2,...N$. 上式相当于把区间 $[a,\, b]$ 分成 $N$ 个小段, 每段长度为 $(b-a)/N$, 这时

$$a_{ml}=\int_a^b\int_a^b k(x,y)\psi_m^{(N)}(x)\psi_l^{(N)}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.2.57b}$$

表示函数 $k(x,y)$ 在 $x$-$y$ 平面上划分的二维格子第 $(m,l)$ 上的平均值. 如果问题的区域为无限大, 则可作适当的切断近似, 只要当 $x,\, y\to\infty$ 时, $k(x,y)$ 很快趋向零.

### 5.2.4 矩量法和 Galerkin 近似

在 4.5.4 和 5.1.2 小节中, 我们已经介绍了矩量法在求解积分方程的运用. 事实上, 因为不涉及到微分运算, 在数值计算中, 矩量法适合求解积分方程, 选择脉冲基函数或者 Dirac Delta 权函数都是可行的. 本节介绍用矩量法和 Galerkin 法求第二类 Fredholm 积分方程的近似解.

考虑定义在 $n$ 维实空间 $R^n$ 中的有界区域 $G$ 上、具有弱奇异核的积分方程

$$\psi(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})+\lambda\int_G k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}\in G \tag{5.2.58a}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{r}'=(x_1',x_2',\cdots,x_n')$ 和 $\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}'=\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\cdots\mathrm{d}x_n'$, 积分核具有形式

$$k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\ln^\beta|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^\alpha}\cdot H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{5.2.58b}$$

其中 $\beta\geqslant 0$ 和 $0\leqslant\alpha<n$, $H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是 $G\times G$ 上的连续函数. 把方程 (5.2.58a) 写成算子形式

$$\psi=f+\lambda\boldsymbol{K}\psi \tag{5.2.58c}$$

由 Fredholm 择一定理 (对一般平方可积核的择一定理见 5.3.5 小节讨论), 只要 $\lambda$ 不等于 $\boldsymbol{K}$ 的本征值, 则方程 (5.2.58c) 存在唯一解.

与偏微分方程类似 (见 4.2.1 小节讨论), 方程 (5.2.58c) 的弱解形式为

$$(\psi,v)-(\lambda\boldsymbol{K}\psi,v)=(f,v) \tag{5.2.58d}$$

其中，$v$ 是允许函数类中的任意函数；反之, 若允许函数类的某个函数 $u$ 满足方程 (5.2.58d), 则这个函数必是方程 (5.2.58c) 的弱解. 设存在完备的基函数系 $\{\psi_i(\boldsymbol{r})\}$, 方程的解近似展开为

$$\psi^M(\boldsymbol{r})=\sum_{i=1}^M a_i\psi_i(\boldsymbol{r}) \tag{5.2.59a}$$

代入方程 (5.2.58d)

$$\sum_{i=1}^M a_i^*[(\psi_i,v)-(\lambda\boldsymbol{K}\psi_i,v)]=(f,v) \tag{5.2.59b}$$

设权函数 $w_j(\boldsymbol{r})$, $(j=1,2,\cdots,M)$ 为线性独立的 $M$ 个函数, 取 $v=w_j(\boldsymbol{r})$, 代入方程 (5.2.59b), 则得到决定展开系数 $a_i$ 的 $M$ 个代数方程

$$\sum_{i=1}^{M} a_i^*[(\psi_i,w_j)-(\lambda\boldsymbol{K}\psi_i,w_j)]=(f,w_j)$$
$$(j=1,2,\cdots,M) \tag{5.2.59c}$$

其中

$$(\lambda\boldsymbol{K}\psi_i,w_j)=\lambda^*\int_G\int_G k^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_i^*(\boldsymbol{r}')w_j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}'$$
$$(\psi_i,w_j)=\int_G\psi_i^*(\boldsymbol{r})w_j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^n\boldsymbol{r} \tag{5.2.59d}$$

对高维问题, 由上式可见, 矩阵元 $(\lambda\boldsymbol{K}\psi_i,w_j)$ 的生成涉及多重积分, 计算量很大 (特别是对弱奇异核, 需求作广义积分), 故常用脉冲基函数和 Dirac Delta 型权函数, 即把区域 $G$ 分成 $N$ 个不相交的子区域 $G_j$, $(j=1,2,\cdots,N)$, 基函数和权函数

$$\psi_j(\boldsymbol{r})=\begin{cases}1/\sqrt{V_j}, & \boldsymbol{r}\in G_j\\ 0, & \boldsymbol{r}\notin G_j\end{cases};\quad w_j(\boldsymbol{r})=\begin{cases}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j), & \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j\in G_j\\ 0, & \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j\notin G_j\end{cases} \tag{5.2.60a}$$

代入方程 (5.2.59c)

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\sqrt{V_i}}a_i^*\left[\delta_{ij}-\lambda^*\int_{G_i}k^*(\boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}'\right]=f(\boldsymbol{r}_j)$$
$$(j=1,2,\cdots,M) \tag{5.2.60b}$$

可见, 矩阵元的生成要简单多了.

**Galerkin 近似** 方程 (5.2.59b) 中取权函数 $v=\psi_j(\boldsymbol{r})$, 则得到决定展开系数 $a_i$ 的 $M$ 个代数方程

$$\sum_{i=1}^{M} a_i^*[(\psi_i,\psi_j)-(\lambda\boldsymbol{K}\psi_i,\psi_j)]=(f,\psi_j),\ (j=1,2,\cdots,M) \tag{5.2.61a}$$

其中

$$(\lambda\boldsymbol{K}\psi_i,\psi_j)=\lambda^*\int_G\int_G k^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_i^*(\boldsymbol{r}')\psi_j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}'$$
$$(\psi_i,\psi_j)=\int_G\psi_i^*(\boldsymbol{r})\psi_j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^n\boldsymbol{r} \tag{5.2.61b}$$

对脉冲基函数, 方程 (5.2.61a) 简化成

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\sqrt{V_i}}a_i^*\left[\delta_{ij}-\frac{\lambda^*}{V_j}\int_{G_j}\int_{G_i}k^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}'\right]=\frac{1}{V_j}\int_{G_j}f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^n\boldsymbol{r} \tag{5.2.61c}$$

$$(j=1,2,\cdots,M)$$

比较上式与方程 (5.2.60b), Galerkin 近似用子区域 $G_j$ 的平均值代替中心点 $\boldsymbol{r}_j$ 取值, 精度当然要优于取权函数为 Dirac Delta 函数的矩量法, 但计算也大大增加.

一旦从方程 (5.2.61c) 得到 Galerkin 近似解 $\psi^M(\boldsymbol{r})$, 再代入原方程 (5.2.58c) 得到进一步的近似解

$$\psi\approx f+\lambda\boldsymbol{K}\psi^M \tag{5.2.61d}$$

称为**迭代 Galerkin 近似解**. 数学上, 可以证明迭代 Galerkin 近似解不需要解方程, 仅仅需要计算一次积分, 计算量增加不多, 但是精度却大大增加.

值得指出的是, 如果完备基函数系 $\{\psi_i(\boldsymbol{r})\}$ 正交, 那么线性方程组 (5.2.61a) 是良态的；否则, 在非正交基下, 矩阵是否良态与基的选择相关.

**一次元 Galerkin 法**　在用有限元近似解偏微分方程的边值中, 最简单的是一次插值函数 (例如式 (4.4.12b)), 通过求一阶偏导数 (例如式 (4.4.16c)), 使相应的项为常数而方便积分. 然而, 在用 Galerkin 近似解积分方程过程中, 由于不进行微分运算, 一次或二次插值函数必大大增加离散矩阵的计算量, 故有限元近似中的插值方法 (至少是一次插值) 通常不宜应用到多维问题. 然而, 高次元在插值一维问题中增加的计算量不多. 考虑一维问题

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y+f(x),\ (a\leqslant y\leqslant b) \tag{5.2.62a}$$

与 4.4.1 小节类似, 令 $a=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<x_{i+1}...<x_{M-1}<x_M=b$ 是一组插值结点, 由式 (4.4.2b)

$$\psi(x)\approx\sum_{i=0}^{M}\psi_iN_i(x),\ x\in[a,b] \tag{5.2.62b}$$

其中**基函数**$N_i(x)$ 由式 (4.4.3a)、(4.4.3b) 和 (4.4.3c) 表示. 上式代入方程 (5.2.62a) 得到

$$\sum_{i=0}^{M}\psi_iN_i(x)\approx\sum_{i=0}^{M}\psi_i\int_a^b k(x,y)N_i(y)\mathrm{d}y+f(x) \tag{5.2.62c}$$

方程二边乘 $N_j(x)$ 并积分得到决定结点值 $(\psi_0,\ \psi_1,\cdots,\ \psi_{M-1},\ \psi_M)$ 的方程

$$\sum_{i=0}^{M}\psi_i\left[(N_i,N_j)-\lambda\int_a^b\int_a^b k(x,y)N_i(y)N_j(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right]\approx\int_a^b f(x)N_j(x)\mathrm{d}x,\ (j=0,1,2,\cdots,M)\tag{5.2.62d}$$

一旦求得 $(\psi_0,\ \psi_1,\cdots,\ \psi_{M-1},\ \psi_M)$, 由式 (5.2.62b) 就可以得到近似解 $\psi(x)$, 再由方程 (5.2.61d) 可以得到更精确的近似解.

### 5.2.5 Nyström 方法

Nyström 方法也称为直接求积法, 该法的基本原理是直接用求和来代替积分, 从而把积分方程化成代数方程来求解, 只要 $k(x,y)$ 和非齐次项是连续函数. 考虑定义在有界区域 $G$ 的 $n$ 维函数 $g(\boldsymbol{r})$ 的积分

$$Q=\int_G g(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}\tag{5.2.63a}$$

假定存在 $N$ 点近似求积方法

$$Q_N=\sum_{j=1}^{N}w_j(N)g[\boldsymbol{r}_j(N)]\tag{5.2.63b}$$

其中 $\{w_j(N)\}$ 和 $\{\boldsymbol{r}_j(N)\}$ 分别为积分权和求积基点, 它们都是 $N$ 的函数 (下面简单写成 $\{w_j\}$ 和 $\{\boldsymbol{r}_j\}$), 当 $N\to\infty$ 时, 假定 $Q_N\to Q$. 利用积分式 (5.2.63b), 方程 (5.2.58a) 近似成

$$\psi_N(\boldsymbol{r})-\lambda\sum_{j=1}^{N}w_jk(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j)\psi_N(\boldsymbol{r}_j)=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\tag{5.2.64a}$$

上式在求积基点取值, 即取 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_i,(i=1,2,\cdots,N)$, 得到求积基点上函数值满足的线性代数方程组

$$\psi_N(\boldsymbol{r}_i)-\lambda\sum_{j=1}^{N}w_jk(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)\psi_N(\boldsymbol{r}_j)=f(\boldsymbol{r}_i)\quad(i=1,2,\cdots,N)\tag{5.2.64b}$$

一旦从上式求得求积基点的函数值 $\psi_N(\boldsymbol{r}_i)$, $(i=1,2,\cdots,N)$, 再利用 Nyström 插值方程 (5.2.64a), 就可以得到积分方程 (5.2.58a) 的近似解

$$\psi_N(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})+\lambda\sum_{j=1}^{N}w_jk(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j)\psi_N(\boldsymbol{r}_j),\ \boldsymbol{r}\in G\tag{5.2.64c}$$

这就是 Nyström 算法的基本思路, 可见其离散矩阵的生成比较简单, 无需计算积分. 数学上可以证明, 如果核函数 $k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和非齐次项 $f(\boldsymbol{r})$ 是 $G$ 上的连续函数, 则当 $N\to\infty$ 时, $\psi_N(\boldsymbol{r})\to\psi(\boldsymbol{r})$ 是积分方程 (5.2.58a) 的解.

对含有弱奇性核的积分方程

$$\psi(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})+\lambda\int_G\frac{H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\ln^\beta|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^\alpha}\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}' \tag{5.2.65a}$$

其中 $H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是 $G\times G$ 上的连续函数, 可以采用变通的方法: 对被积函数的连续部分 $H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')$ 进行插值, 用插值函数来代替

$$H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\approx\sum_{j=1}^N H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j)\psi(\boldsymbol{r}_j)e_j(\boldsymbol{r}') \tag{5.2.65b}$$

其中 $e_j(\boldsymbol{r}')$, $(j=1,2,\cdots,N)$ 是插值基函数, 最简单的如式 (5.2.53b) 的脉冲基函数. 于是

$$\int_G\frac{H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\ln^\beta|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^\alpha}\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}'\approx\sum_{j=1}^N w_j(\boldsymbol{r})H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j)\psi(\boldsymbol{r}_j) \tag{5.2.65c}$$

其中

$$w_j(\boldsymbol{r})\equiv\int_G\frac{\ln^\beta|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^\alpha}e_j(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}' \tag{5.2.66a}$$

与方程 (5.2.63b) 中的 $\{w_j(N)\}$ 相比, 这里 $w_j(\boldsymbol{r})$ 是 $\boldsymbol{r}$ 的函数. 对由式 (5.2.53b) 表示的脉冲基函数, 可以得到

$$w_j(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\sqrt{V_j}}\int_{G_j}\frac{\ln^\beta|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^\alpha}\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}' \tag{5.2.66b}$$

把式 (5.2.65c) 代入方程 (5.2.65a) 得到

$$\psi(\boldsymbol{r})-\lambda\sum_{j=1}^N w_j(\boldsymbol{r})H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j)\psi(\boldsymbol{r}_j)=f(\boldsymbol{r}) \tag{5.2.67a}$$

上式中在求积基点取值, 即取 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_i$, $(i=1,2,\cdots,N)$, 得到求积基点上函数值满足的线性代数方程组

$$\psi(\boldsymbol{r}_i)-\lambda\sum_{j=1}^N w_j(\boldsymbol{r}_i)H(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)\psi(\boldsymbol{r}_j)=f(\boldsymbol{r}_i)\quad(i=1,2,\cdots,N) \tag{5.2.67b}$$

一旦从上式求得求积基点的函数值 $\psi(\boldsymbol{r}_i)$, $(i=1,2,\cdots,N)$, 再利用方程 (5.2.67a), 就可以得到弱奇性积分方程 (5.2.65a) 的近似解

$$\psi(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})+\lambda\sum_{j=1}^{N}w_j(\boldsymbol{r})H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j)\psi(\boldsymbol{r}_j) \tag{5.2.67c}$$

考虑一维问题, 利用 Gauss 求积公式

$$\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{N}A_ik(x,y_i)\psi(y_i) \tag{5.2.68a}$$

其中 $(A_k,y_k)$ 为高斯常数, 代入方程 (5.2.62a) 得到

$$\psi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{N}A_ik(x,y_i)\psi(y_i)=f(x) \tag{5.2.68b}$$

依次取 $x=x_1,x_2,\cdots,x_N$ 得

$$\psi(x_i)-\lambda\sum_{i=1}^{N}A_ik(x_i,x_i)\psi(x_i)=f(x_i)\qquad(i=1,2,\cdots,N) \tag{5.2.68c}$$

可求得 $\psi(x_1),\psi(x_2),\cdots,\psi(x_N)$, 再代入方程 (5.2.68b) 得到方程 (5.2.62a) 的近似解为

$$\psi(x)\approx f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{N}A_ik(x,y_i)\psi(y_i) \tag{5.2.68d}$$

**例 5.2.7** 用 Gauss 求积法解下列方程

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{xy}\psi(x)\mathrm{d}y+\left[1-\frac{1}{2x}(\mathrm{e}^x-1)\right] \tag{5.2.69a}$$

取 $N=2$, $A_1=A_2=1/2$, [0,1] 内的 Gauss 点为 $x_1=0.2113$ 和 $x_2=0.7887$, 于是

$$\begin{aligned}&\left[1-\frac{1}{4}k(x_1,x_1)\right]\psi(x_1)-\frac{1}{4}k(x_1,x_2)\psi(x_2)=f(x_1)\\&\left[-\frac{1}{4}k(x_2,x_1)\right]\psi(x_1)+\left[1-\frac{1}{4}k(x_2,x_2)\right]\psi(x_2)=f(x_2)\end{aligned} \tag{5.2.69b}$$

由以上方程可求得 $\psi(x_1)=0.9997$ 和 $\psi(x_2)=0.9990$. 因此, 方程 (5.2.69a) 的近似解为

$$\psi(x)\approx\frac{1}{4}\left[0.9997\cdot\mathrm{e}^{0.2113x}+0.9990\cdot\mathrm{e}^{0.7887x}\right]+1-\frac{1}{2x}(\mathrm{e}^x-1) \tag{5.2.69c}$$

而精确解为 $\psi(x)=1$, 比较 $x_1$ 和 $x_2$ 二点的值, 其百分误差分别为 0.03%和 0.1%. 在 $x=0$ 点, 由上式可求得 $\psi(0)\approx0.9997$, 误差为 0.03%. 可见近似解与精确几乎相等.

### 5.2.6　非线性积分方程的迭代法

对非线性积分方程, 问题要复杂得多. 下面主要讨论迭代法, 为此首先介绍压缩算子的概念. 设 $\boldsymbol{T}$ 作用在 $L^2[a,b]$ 上, 如果存在一个 $\alpha<1$ 且 $\alpha>0$, 使对所有属于 $L^2[a,b]$ 的函数 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 都有

$$||\boldsymbol{T}\psi_1-\boldsymbol{T}\psi_2||\leqslant\alpha||\psi_1-\psi_2|| \tag{5.2.70a}$$

则称 $\boldsymbol{T}$ 为一个**压缩算子**. 对压缩算子 $\boldsymbol{T}$ 存在定理: 如果 $\boldsymbol{T}$ 是 $L^2[a,b]$ 上的压缩算子, 则方程

$$\boldsymbol{T}\psi=\psi \tag{5.2.70b}$$

有唯一解, 此解称为 $\boldsymbol{T}$ 的**不动点**.

**证明**

(1) 唯一性, 设存在二个解 $\psi_1$ 和 $\psi_2$

$$\boldsymbol{T}\psi_1=\psi_1;\ \boldsymbol{T}\psi_2=\psi_2 \tag{5.2.70c}$$

则

$$||\psi_1-\psi_2||=||\boldsymbol{T}\psi_1-\boldsymbol{T}\psi_2||\leqslant\alpha||\psi_1-\psi_2|| \tag{5.2.70d}$$

即 $(1-\alpha)||\psi_1-\psi_2||\leqslant 0$, 而 $||\psi_1-\psi_2||\geqslant 0$ 和 $\alpha<1$, 故只有 $||\psi_1-\psi_2||=0$, 即 $\psi_1=\psi_2$;

(2) 存在性, 利用迭代法求解

$$\psi_{n+1}=\boldsymbol{T}\psi_n,\ (n=1,2,\cdots) \tag{5.2.71a}$$

下面证明上式收敛到方程 (5.2.70b). 事实上

$$||\psi_{n+1}-\psi_n||=||\boldsymbol{T}\psi_n-\boldsymbol{T}\psi_{n-1}||\leqslant\alpha||\psi_n-\psi_{n-1}|| \tag{5.2.71b}$$

递推 $n$ 次后

$$||\psi_{n+1}-\psi_n||\leqslant\alpha^n||\psi_1-\psi_0|| \tag{5.2.71c}$$

利用上式, 设 $n>m$ 则有

$$\begin{aligned}||\psi_n-\psi_m||&=||(\psi_n-\psi_{n-1})+\cdots+(\psi_{m+1}-\psi_m)||\\&\leqslant||\psi_n-\psi_{n-1}||+\cdots+||\psi_{m+1}-\psi_m||\\&\leqslant(\alpha^{n-1}+\cdots+\alpha^m)||\psi_1-\psi_0||\\&\leqslant(\alpha^m+\alpha^{m+2}+\cdots)||\psi_1-\psi_0||\end{aligned} \tag{5.2.71d}$$

即

$$||\psi_n - \psi_m|| \leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha}||\psi_1 - \psi_0|| \tag{5.2.72a}$$

故有 $\lim||\psi_n - \psi_m|| = 0,\ (n, m \to \infty)$, 即序列 $\{\psi_n\}$ 是一个 Cauchy 序列, 它收敛到 $L^2[a,b]$ 中一个元素 $\psi$, 即

$$\boldsymbol{T}\psi = \boldsymbol{T}[\lim_{n\to\infty}\psi_n] = \lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{T}\psi_n) = \lim_{n\to\infty}\psi_{n+1} = \psi \tag{5.2.72b}$$

因此, 由式 (5.2.71a) 得到的序列 $\{\psi_n\}$ 确实收敛到方程 (5.2.70b) 的解.

利用上述结果, 我们来考虑非线性积分方程

$$\psi = f + \lambda\boldsymbol{K}\psi \tag{5.2.73a}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 是非线性算子, $f \in L^2[a,b]$. 设 $\boldsymbol{K}$ 满足

(1) 有界, 即 $||\boldsymbol{K}\psi|| \leqslant M < \infty$ ($\psi$ 为任一 $L^2[a,b]$ 中函数);

(2) 满足条件

$$||\boldsymbol{K}\psi_1 - \boldsymbol{K}\psi_2|| \leqslant N||\psi_1 - \psi_2||,\ (0 < N < \infty) \tag{5.2.73b}$$

于是有定理: 只要 $\lambda$ 足够小, 对所有 $f \in L^2[a,b]$, 方程 (5.2.73a) 有解. 注意, 当 $\boldsymbol{K}$ 是线性算子时, 式 (5.2.73b) 等价于有界. 但当 $\boldsymbol{K}$ 是非线性算子时, 式 (5.2.73b) 是一个外加条件. 为证明上述定理, 令 $\boldsymbol{T}$ 算子如下

$$\boldsymbol{T}\psi \equiv f + \lambda\boldsymbol{K}\psi \tag{5.2.73c}$$

方程 (5.2.73a) 可写成方程 (5.2.70b) 的形式. 因此, 只要证明 $\boldsymbol{T}$ 是压缩算子即可. 由于

$$||\boldsymbol{T}\psi_1 - \boldsymbol{T}\psi_2|| = |\lambda|\cdot||\boldsymbol{K}\psi_1 - \boldsymbol{K}\psi_2|| \leqslant |\lambda|N||\psi_1 - \psi_2|| \tag{5.2.73d}$$

因此, 当 $|\lambda|N < 1$ 时, $\boldsymbol{T}$ 是压缩算子, 故得证, 而且方程 (5.2.73a) 可用迭代法求解.

**例 5.2.8** 考虑非线性积分方程

$$\psi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k[x, y, \psi(y)]\mathrm{d}y \tag{5.2.74a}$$

设存在条件

(1) $\left\|\int_a^b k[x, y, \psi(y)]\mathrm{d}y\right\| \leqslant M||\psi(y)||$;

(2) $|k(x, y, z_1) - k(x, y, z_2)| \leqslant N(x, y)|z_1 - z_2|$;

(3) $\int_a^b |N(x, y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = P^2 < \infty$.

则对所有 $f \in L^2[a,b]$, 如果 $|\lambda|P < 1$, 方程 (5.2.74a) 有唯一解 $\psi \in L^2[a,b]$.

证明: 考虑 $\boldsymbol{T}\psi \equiv f + \lambda \boldsymbol{K}\psi$, 只要证明 $\boldsymbol{T}$ 是压缩算子即可. 由于

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{T}\psi_1 - \boldsymbol{T}\psi_2|| &= |\lambda| \cdot \left\| \int_a^b \{k[x,y,\psi_1(y)] - k[x,y,\psi_2(y)]\}\,\mathrm{d}y \right\| \\ &\leqslant |\lambda| \cdot \sqrt{\int_a^b \left[\int_a^b |k[x,y,\psi_1(y)] - k[x,y,\psi_2(y)]|\mathrm{d}y\right]^2 \mathrm{d}x} \\ &\leqslant |\lambda| \cdot \sqrt{\int_a^b \left[\int_a^b N(x,y)|\psi_1(y) - \psi_2(y)|\mathrm{d}y\right]^2 \mathrm{d}x} \\ &\leqslant |\lambda| \cdot P||\psi_1 - \psi_2||\end{aligned} \tag{5.2.74b}$$

当 $|\lambda|P < 1$ 时, $\boldsymbol{T}$ 是压缩算子, 故 $\boldsymbol{T}\psi = \psi$ 有唯一解, 即方程 (5.2.74a) 有唯一解.

## 5.3　平方可积函数空间中的积分方程

在 5.2.2 和 5.2.3 小节, 我们介绍了求解第二类 Fredholm 积分方程的两个基本技术, 即小算子迭代法和有限秩近似. 本节讨论把这二种技术结合起来, 求解具有平方可积核的第二类 Fredholm 积分方程, 特别是 Hermite 对称的平方可积核, 将讨论其本征值问题的一般性质和展开定理, 以及 Fredholm 择一定理.

### 5.3.1　Hermite 对称的平方可积核

首先给出积分算子 Hermite 对称的定义, 根据式 (5.2.34a), 作用在 $L^2[a,b]$ 上的积分算子 $\boldsymbol{K}$

$$\boldsymbol{K}\psi \equiv \int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.3.1a}$$

的共轭算子 $\boldsymbol{K}^+$ 定义为

$$(\boldsymbol{K}\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, \boldsymbol{K}^+\psi_2) \tag{5.3.1b}$$

用积分核来表示, 由式 (5.2.35b)

$$k^+(x,y) = k^*(y,x) \tag{5.3.1c}$$

如果 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^+$, 即 $k^*(y,x) = k(x,y)$, 称 $\boldsymbol{K}$ 是 **Hermite 对称的积分算子**

$$(\boldsymbol{K}\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, \boldsymbol{K}\psi_2) \tag{5.3.2a}$$

当

$$k^*(y,x) = k(x,y) = k(y,x) \tag{5.3.2b}$$

称 $\boldsymbol{K}$ 为具有实对称核的积分算子, 例如 $k(x,y)=\sin(x+y)$ 和 $k(x,y)=\exp(xy)$.

**本征方程** 对具有 Hermite 对称的积分算子 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^+$, 称下列方程

$$\psi = \lambda \boldsymbol{K}\psi \tag{5.3.3a}$$

为算子 $\boldsymbol{K}$ 的**本征方程**. 与微分方程的本征值问题一样, 上式并不是对所有的 $\lambda$ 都有非零解, 只有对某些特定的 $\lambda_n$ 值才有非零解, $\lambda_n$ 称为**本征值**, 而相应的非零解称为**本征函数**. 下面将看到方程 (5.2.14a) 中 $\lambda$ 是否等于本征值 $\lambda_n$, 对方程的解有很大的影响 (注意: 在 5.2.3 小节中, 已对有限秩算子得到了同样的结论). 令 $\mu=1/\lambda$, 本征方程 (5.3.3a) 可以写成形式

$$\boldsymbol{K}\psi = \mu\psi \tag{5.3.3b}$$

与第二章一样, 我们有结论

(1) Hermite 算子的本征值 $\mu$ 都是实数;

(2) 对应不同本征值的本征函数彼此正交.

证明: 用 $\psi$ 取方程 (5.3.3b) 的左及右内积

$$\begin{aligned}(\psi,\boldsymbol{K}\psi) &= (\psi,\mu\psi) = \mu(\psi,\psi)\\ (\boldsymbol{K}\psi,\psi) &= (\mu\psi,\psi) = \mu^*(\psi,\psi)\end{aligned} \tag{5.3.4a}$$

而由方程 (5.3.2a), 故 $\mu=\mu^*$, 即 $\mu$ 是实数. 其次, 设 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的不同本征值, 对应的本征函数分别是 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 则

$$\boldsymbol{K}\psi_1 = \mu_1\psi_1;\ \boldsymbol{K}\psi_2 = \lambda_2\psi_2 \tag{5.3.4b}$$

于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{K}\psi_1,\psi_2) &= \mu_1^*(\psi_1,\psi_2) = \mu_1(\psi_1,\psi_2)\\ (\psi_1,\boldsymbol{K}\psi_2) &= \mu_2(\psi_1,\psi_2)\end{aligned} \tag{5.3.4c}$$

而由方程 (5.3.2a), 故 $(\mu_1-\mu_2)(\psi_1,\psi_2)=0$, 又 $\mu_1\neq\mu_2$, 因此 $(\psi_1,\psi_2)=0$, 即 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 正交.

如果 $\boldsymbol{K}$ 是 Hermite 算子且积分核 $k(x,y)$ 平方可积, 则对本征值和本征函数有下列定理 (证明较复杂, 故略去).

(1) $\boldsymbol{K}$ 的本征值可排成形式

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n \cdots \tag{5.3.4d}$$

且当 $n\to\infty$, $\mu_n\to 0$, 其中非零本征值的重数有限, 而零本征值的重数可能为无限. 例如, 当 $\boldsymbol{K}$ 是有限秩积分算子时, $\boldsymbol{K}_N$ 的本征值至多只有 $N$ 个非零, 而其他都可以看作零本征值, 故零本征值的重数为无限;

(2) $\boldsymbol{K}$ 的本征函数系 $\{\psi_n\}$ 不一定构成 $L^2[a,b]$ 上的完备集, 但对形如 $\psi=\boldsymbol{K}g$, $g\in L^2[a,b]$ 的函数, 可以将 $\psi$ 展成 $\{\psi_n\}$ 的广义 Fourier 级数

$$\psi\cong\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,\psi)\psi_n \tag{5.3.5a}$$

例如, 当 $\boldsymbol{K}$ 是有限秩算子 $\boldsymbol{K}_N$, $\{\psi_n\}$ 只有 $N$ 个, 不足以构成 $L^2[a,b]$ 上的完备集. 但如果 $\boldsymbol{K}$ 有无穷多个非零本征值, 则 $\{\psi_n\}$ 构成 $L^2[a,b]$ 上的完备集.

设核为 $k(x,y)$ 的积分算子 $\boldsymbol{K}$ 有无穷多个非零本征值, 由于 $k(x,y)$ 平方可积

$$\int_a^b\int_a^b|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty \tag{5.3.5b}$$

故 $k(x,y)$ 作为 $x$ 的函数可作展开

$$k(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)\psi_n(x) \tag{5.3.5c}$$

而 $u_n(y)$ 又可进一步用 $\{\psi_n^*(y)\}$ 作展开, 因此

$$k(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}\psi_m^*(y)\psi_n(x) \tag{5.3.5d}$$

为了求 $a_{mn}$, 分别以 $\psi_l^*(x)$ 和 $\psi_j(y)$ 乘上式并积分得

$$a_{mn}=\int_a^b\int_a^b k(x,y)\psi_m^*(x)\psi_n(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3.6a}$$

而 $\psi_m(x)$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的本征函数, 即满足

$$\int_a^b k(x,y)\psi_n(y)\mathrm{d}y=\mu_n\psi_n(x) \tag{5.3.6b}$$

代入式 (5.3.6a) 得

$$\begin{aligned}a_{mn}&=\int_a^b\psi_m^*(x)\mathrm{d}x\int_a^b k(x,y)\psi_n(y)\mathrm{d}y\\&=\mu_n\int_a^b\psi_m^*(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x=\mu_n\delta_{mn}\end{aligned} \tag{5.3.6c}$$

于是式 (5.3.5d) 变成

$$k(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\psi_n(x)\psi_n^*(y) \tag{5.3.6d}$$

上式在平均收敛意义下成立. 下面来推出几个有用的关系式, 由上式

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&\sum_{n,m=1}^{\infty}\mu_n\mu_m^*\int_a^b\psi_n(x)\psi_m^*(y)\mathrm{d}x\\ \cdot\int_a^b\psi_n^*(y)\psi_m(y)\mathrm{d}y=&\sum_{n,m=1}^{\infty}\mu_n\mu_m^*\delta_{nm}\delta_{nm}=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2\end{aligned} \tag{5.3.7a}$$

即

$$\int_a^b\int_a^b|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 \tag{5.3.7b}$$

如果最大本征值 $\mu_1$ 远大于其他本征值, 可用下式来估计最大本征值的下限

$$\mu_1\leqslant\sqrt{\int_a^b\int_a^b|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{5.3.8a}$$

方程 (5.3.6d) 中令 $x=y$, 并积分得

$$\int_a^b k(x,x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n \tag{5.3.8b}$$

如果 $\mu_n$ 全部大于零, 可得近似

$$\mu_1\leqslant\int_a^b k(x,x)\mathrm{d}x \tag{5.3.8c}$$

**例 5.3.1** 考虑实对称核

$$k(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ y(1-x), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{5.3.9a}$$

显然上式平方可积. 考虑本征方程

$$\int_0^1 k(x,y)\psi_n(y)\mathrm{d}y=\mu_n\psi_n(x),\ (0\leqslant x\leqslant 1) \tag{5.3.9b}$$

上式等价于本征值问题

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2\psi_n(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{\mu_n}\psi_n(x)=0,\ (0\leqslant x\leqslant 1)\\ \psi_n(x)|_{x=0}=\psi_n(x)|_{x=1}=0\end{gathered} \tag{5.3.9c}$$

故本征值为 $\mu_n = 1/n^2\pi^2, (n = 1, 2, \cdots)$, 而相应的本征函数为 $\psi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$. 显然本征函数系列 $\{\psi_n(x)\}$ 构成 $L^2[0,1]$ 上的完备系. 从方程 (5.3.8b), 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2} = \int_0^1 k(x,x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \tag{5.3.10a}$$

故得和式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{5.3.10b}$$

而从式 (5.3.7b) 得到

$$\int_0^1\int_0^1 |k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{90} = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\pi^4} \tag{5.3.10c}$$

故得和式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{5.3.10d}$$

从式 (5.3.8a) 和 (5.3.8c) 还可估计最大的本征值. 由式 (5.3.9a)

$$\mu_1 \leqslant \int_0^1 k(x,x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6} = 0.1667 \tag{5.3.11a}$$

而由式 (5.3.8a)

$$\mu_1^2 \leqslant \int_0^1\int_0^1 |k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{90} \tag{5.3.11b}$$

得 $\mu_1 \leqslant 0.1054$, 精确值 $\mu_1 = 1/\pi^2 \approx 0.1013$. 可见用式 (5.3.8a) 可得较好的近似.

**例 5.3.2** 考虑一阶 Bessel 方程的本征值问题

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{1}{x}u = \lambda xu,\ x\in(0,1)\\ u|_{x=0} < \infty;\ u|_{x=1} = 0\end{gathered} \tag{5.3.12a}$$

由方程 (3.2.26b) (取 $\nu = 1$) 得 Green 函数为

$$G(x,y) = \frac{1}{2}\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{y} - y\right), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ y\left(\dfrac{1}{x} - x\right), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{5.3.12b}$$

本征值问题式 (5.3.12a) 化成积分方程

$$u(x) = \lambda\int_0^1 yG(x,y)u(y)\mathrm{d}y \tag{5.3.13a}$$

令 $k(x,y)=\sqrt{xy}G(x,y)$ 和 ,$\psi(x)=\sqrt{x}u(x)$, 上式变成对称核的积分方程

$$\psi(x)=\lambda\int_0^1 k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.3.13b}$$

因此, 本征函数为 $\psi_n=\sqrt{x}J_1(\sqrt{\lambda_n}x)$, 而相应的本征值 $\mu_n=1/\lambda_n$ 由一阶 Bessel 函数的零点决定 $J_1(\sqrt{\lambda_n})=0$. 函数系列 $\{\sqrt{x}J_1(\sqrt{\lambda_n}x)\}$ 构成完备的正交系, 又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n\to\infty$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n\to 0$.

**例 5.3.3** 考虑积分核

$$k(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx\sin ny,\ x\in[0,\pi] \tag{5.3.14a}$$

显然 $k(x,y)$ 实对称, 又

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^3}{12}<\infty \tag{5.3.14b}$$

故 $k(x,y)$ 平方可积, $k(x,y)$ 的本征函数和相应的本征值为

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx;\ \mu_n=\frac{1}{n},\ (n=1,2,\cdots) \tag{5.3.14c}$$

**例 5.3.4** 考虑积分核 (其中 $|a|<1$ 和 $x\in[0,2\pi]$)

$$k(x,y)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-a^2}{1-2a\cos(x-y)+a^2} \tag{5.3.15a}$$

因为

$$\begin{aligned}k(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos n(x-y)\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n(\cos nx\cos ny+\sin nx\sin ny)\right]\end{aligned} \tag{5.3.15b}$$

于是可推出 $\boldsymbol{K}$ 的本征值为 $\lambda_0=1$ 和 $\lambda_n=1/a^n$, 相应的本征函数为

$$\psi_0(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}};\quad \psi_n^s(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sin nx;\quad \psi_n^c(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cos nx \tag{5.3.15c}$$

显然本征值 $1/a^n$, $(n\neq 0)$ 是二重简并的.

**例 5.3.5** 积分核

$$k(x,y)=\begin{cases}\sin x\cos y, & 0<x\leqslant y<\pi\\ \sin y\cos x, & 0<y\leqslant x<\pi\end{cases} \tag{5.3.16a}$$

考虑本征方程

$$\psi(x)=\lambda\int_0^{\pi}k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y,\ x\in[0,\pi] \tag{5.3.16b}$$

上式写成

$$\psi(x)=\lambda\cos x\int_0^{x}\sin y\psi(y)\mathrm{d}y+\lambda\sin x\int_x^{\pi}\cos y\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.3.16c}$$

两边对 $x$ 求导

$$\psi'(x)=-\lambda\sin x\int_0^{x}\sin y\psi(y)\mathrm{d}y+\lambda\cos x\int_x^{\pi}\cos y\psi(y)\mathrm{d}y$$

$$\psi''(x)=-\lambda\cos x\int_0^{x}\sin y\psi(y)\mathrm{d}y-\lambda\sin x\int_x^{\pi}\cos y\psi(y)\mathrm{d}y-\lambda\psi(x)$$

于是, 本征函数满足常微分方程

$$\psi''(x)+(1+\lambda)\psi(x)=0,\ x\in(0,\pi) \tag{5.3.16d}$$

以及边界条件 $\psi(0)=\psi'(\pi)=0$. 因此本征函数和相应的本征值为

$$\psi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x;\ \lambda_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-1 \quad (\ k=1,2,\cdots) \tag{5.3.17a}$$

而由式 (5.3.6d) 得到积分核的 Fourier 级数展开

$$k(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k-1/2)x\cdot\sin(k-1/2)y}{(k-1/2)^2-1} \tag{5.3.17b}$$

可以证明 Hermite 对称的积分核至少有一个本征值. 但对非对称的核, 本征值不一定存在.

**例 5.3.6**　积分核 $k(x,y)=(4x-3)y^2,\ x,y\in[0,1]$, 显然它是不对称的. 考虑本征方程

$$\psi(x)=\lambda\int_0^{1}(4x-3)y^2\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.3.18a}$$

令解具有形式 $\psi(x)=c(4x-3)$ 代入上式得到

$$\psi(x)=\lambda c(4x-3)\int_0^{1}(4y^3-3y^2)\mathrm{d}y=0 \tag{5.3.18b}$$

因此方程 (5.3.18a) 只有零解, 不存在非零本征函数.

**例 5.3.7** 积分核 $k(x,y)=\sin\pi x\cos\pi y,\ x,y\in[0,1]$, 显然它是不对称的. 考虑本征方程

$$\psi(x)=\lambda\int_0^1\sin\pi x\cos\pi y\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.3.19a}$$

令解具有形式 $\psi(x)=c\sin\pi x$ 代入上式得到

$$\psi(x)=\lambda c\sin\pi x\int_0^1\sin\pi y\cos\pi y\mathrm{d}y=0 \tag{5.3.19b}$$

因此方程 (5.3.19a) 只有零解, 不存在非零本征函数.

### 5.3.2 第二类 Fredholm 积分方程及微扰论

设 $k(x,y)$ 平方可积且 Hermite 对称, 考虑具有这种核的第二类 Fredholm 积分方程

$$\psi=f+\lambda\boldsymbol{K}\psi \tag{5.3.20a}$$

由于 $\boldsymbol{K}$ 是 Hermite 算子且积分核平方可积, 故存在完备的正交归一集 $\{\psi_n\}$ 及相应的本征值为 $\{\mu_n\}$(设非零本征值有无穷多个)

$$\boldsymbol{K}\psi_n=\mu_n\psi_n \tag{5.3.20b}$$

于是可把 $\psi$ 及 $f$ 展成 Fourier 级数

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n;\ \ f=\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,f)\psi_n \tag{5.3.20c}$$

代入方程 (5.3.20a)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n&=\sum_{n=1}(\psi_n,f)\psi_n+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}a_n\boldsymbol{K}\psi_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,f)\psi_n+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu_n\psi_n\end{aligned} \tag{5.3.20d}$$

即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(\psi_n,f)+(\lambda\mu_n-1)a_n]\psi_n=0 \tag{5.3.21a}$$

于是有

$$(\psi_n,f)+(\lambda\mu_n-1)a_n=0 \tag{5.3.21b}$$

以下分两种情况讨论上式.

(1) 当 $\lambda\mu_n \neq 1$, $(n = 1, 2, \cdots)$ 时

$$a_n = \frac{1}{1-\lambda\mu_n}(\psi_n, f) = (\psi_n, f) + \frac{\lambda\mu_n}{1-\lambda\mu_n}(\psi_n, f) \tag{5.3.21c}$$

于是, 方程 (5.3.20a) 的解为

$$\psi = f + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{1-\lambda\mu_n}(\psi_n, f)\psi_n \tag{5.3.21d}$$

上式可写成预算子的形式

$$\psi = f + \lambda\boldsymbol{R}f \tag{5.3.22a}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 定义为算子

$$\boldsymbol{R}f \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{1-\lambda\mu_n}(\psi_n, f) \tag{5.3.22b}$$

因此, 当 $\lambda\mu_n \neq 1$ 时, $(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})$ 的逆算子 $(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})^{-1}$ 为

$$(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})^{-1} = \boldsymbol{I} + \lambda\boldsymbol{R} \tag{5.3.22c}$$

(2) 当 $\lambda\mu_l = 1(1/\lambda$ 恰好等于第 $l$ 个本征值 $\mu_l)$ 时, 如果 $n \neq l$

$$a_n = \frac{1}{1-\lambda\mu_n}(\psi_n, f) = (\psi_n, f) + \frac{\lambda\mu_n}{1-\lambda\mu_n}(\psi_n, f) \tag{5.3.23a}$$

但当 $n = l$ 时, 由式 (5.3.21b), 要求 $f$ 满足相容性条件 $(\psi_l, f) = 0$, 而 $a_l$ 任意. 故这时方程 (5.2.20a) 的解为

$$\psi = c\psi_l + f + \lambda\sum_{n\neq l}^{\infty}\frac{\mu_n\psi_n}{1-\lambda\mu_n}(\psi_n, f) \tag{5.3.23b}$$

如果 $(\psi_l, f) \neq 0$, 则方程 (5.2.20a) 无解. 相容性条件 $(\psi_l, f) = 0$ 等价于 $f$ 与下列齐次方程的非零解正交

$$\psi = \lambda\boldsymbol{K}\psi \tag{5.3.23c}$$

因此, 与有限秩情形的 Fredholm 择一定理一样, 对平方可积的 Hermite 算子, 亦有 **Fredholm 择一定理**.

(1) 设 $\boldsymbol{K}$ 是作用在 $L^2[a,b]$ 的 Hermite 算子且平方可积, 当且仅当 $f$ 与齐次方程 (5.3.23c) 的非零解正交时, 方程 (5.2.20a) 才有解;

(2) 当齐次方程 (5.3.23c) 只有零解时, 方程 (5.2.20a) 解唯一且由式 (5.3.21d) 决定.

**例 5.3.8** 考虑积分方程

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1 k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y, x\in[0,1] \tag{5.3.24a}$$

其中 $k(x,y)$ 由式 (5.3.9a) 表示. 当 $\lambda\neq 1/\mu_l=l^2\pi^2$ 时, 方程 (5.3.24a) 的解为

$$\psi(x)=f(x)+2\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2-\lambda}\cdot\int_0^1 f(x)\sin n\pi y\mathrm{d}y \tag{5.3.24b}$$

当 $\lambda=1/\mu_\nu=\nu^2\pi^2$ 时, 方程 (5.3.24a) 有解的条件是

$$\int_0^1 \sin\nu\pi x\cdot f(x)\mathrm{d}x=0 \tag{5.3.24c}$$

这时方程 (5.3.24a) 的解为

$$\psi(x)=2\lambda\sum_{n\neq\nu}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2-\lambda}\cdot\int_0^1 \sin n\pi y f(y)\mathrm{d}y+c\sin\nu\pi x+f(x) \tag{5.3.24d}$$

**微扰论** 从以上讨论可知, 当知道平方可积 Hermite 算子的本征函数和本征值时, 第二类 Fredholm 积分方程容易求解. 但实际问题中, 求解本征方程并不比直接求解方程本身容易. 因此, 解式 (5.3.21d) 是不实用的. 但是如果 $\boldsymbol{K}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_1 \tag{5.3.25a}$$

而 $\boldsymbol{K}_0$ 和 $\boldsymbol{K}_1$ 满足

(1) $\boldsymbol{K}_0$ 和 $\boldsymbol{K}_1$ 都是平方可积的 Hermite 算子, 因而 $\boldsymbol{K}$ 亦平方可积且是 Hermite 算子;

(2) $\boldsymbol{K}_1$ 相对 $\boldsymbol{K}_0$ 来说, 可看作微扰: $||\boldsymbol{K}_1||\ll||\boldsymbol{K}_0||$;

(3) 我们恰好已求得 $\boldsymbol{K}_0$ 的本征函数系 $\{\psi_n^0\}$ 和本征值 $\{\mu_n^0\}$;

则可用微扰法求解第二类 Fredholm 积分方程. 过程如下：把方程 (5.3.20a) 写成

$$(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K}_0)\psi=f+\lambda\boldsymbol{K}_1\psi \tag{5.3.25b}$$

由以上讨论知, 当 $\mu_n^0\lambda\neq 1$ 时 (下面都假定这种情况), $(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K}_0)$ 的逆算子 $(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K}_0)^{-1}$ 有预解算子给出

$$(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K}_0)^{-1}=\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{K}_0} \tag{5.3.25c}$$

其中

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{K}_0}f\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^0}{1-\lambda\mu_n^0}(\psi_n^0,f) \tag{5.3.25d}$$

于是, 把方程 (5.3.25b) 右边看作 $f' = f + \lambda \boldsymbol{K}_1 \psi$, 得到方程的形式解

$$\psi = f + \lambda \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{K}_0} f + \lambda(\boldsymbol{K}_1 + \lambda \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{K}_0} \boldsymbol{K}_1)\psi \tag{5.3.26a}$$

上式仍是一个第二类 Fredholm 积分方程, 非齐次项为 $\tilde{f} = f + \lambda \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{K}_0} f$, 但与原方程 (5.3.20a) 相比, 积分算子是小算子, 可用迭代法解之. 于是, 当

$$|\lambda| \cdot ||\boldsymbol{K}_1 + \lambda \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{K}_0} \boldsymbol{K}_1|| < 1 \tag{5.3.26b}$$

则可求得方程 (5.3.20a) 的近似解.

下面把上述思想应用于求解本征值问题, 推出微扰论中十分有用的公式. 为了方便, 引进小参数 $\varepsilon$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_0 + \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \tag{5.3.27a}$$

其中 $\boldsymbol{K}_0$ 和 $\varepsilon \boldsymbol{K}_1$ 满足前述的三个条件. 考虑 $\boldsymbol{K}$ 的本征方程

$$\boldsymbol{K}\psi_n = \mu_n \psi_n \tag{5.3.27b}$$

写成形式

$$(\boldsymbol{I} - \mu_n^{-1} \boldsymbol{K}_0)\psi_n = \mu_n^{-1} \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n \tag{5.3.27c}$$

上式可看作非齐次项 $f = \mu_n^{-1} \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n$ 的第二类 Fredholm 方程, 故有形式解

$$\begin{aligned} \psi_n &= (\boldsymbol{I} - \mu_n^{-1} \boldsymbol{K}_0)^{-1} \mu_n^{-1} \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n - \mu_m^0} (\psi_m^0, \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n) \psi_m^0 \end{aligned} \tag{5.3.28a}$$

考察上式, 当 $\varepsilon \to 0$ 时,$\mu_n \to \mu_n^0$, 因此有一发散项, 把此发散项分开

$$\psi_n = \frac{(\psi_n^0, \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n)}{\mu_n - \mu_n^0} \psi_n^0 + \sum_{m \neq n}^{\infty} \frac{(\psi_m^0, \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n)}{\mu_n - \mu_m^0} \psi_m^0 \tag{5.3.28b}$$

另一方面, 对方程 (5.3.27c) 两边用 $\psi_n^0$ 取内积

$$\begin{aligned} (\psi_n^0, \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n) &= \mu_n [\psi_n^0, (\boldsymbol{I} - \mu_n^{-1} \boldsymbol{K}_0)\psi_n] \\ &= \mu_n (\psi_n^0, \psi_n) - \frac{\mu_n}{\mu_n^*} (\psi_n^0, \boldsymbol{K}_0 \psi_n) \\ &= \mu_n (\psi_n^0, \psi_n) - (\boldsymbol{K}_0 \psi_n^0, \psi_n) = (\mu_n - \mu_n^0)(\psi_n^0, \psi_n) \end{aligned} \tag{5.3.28c}$$

其中用到 Hermite 算子 $\boldsymbol{K}_0$ 的性质: $\mu_n = \mu_n^*$ 和 $(\psi_n^0, \boldsymbol{K}_0 \psi_n) = (\boldsymbol{K}_0 \psi_n^0, \psi_n)$, 于是

$$(\psi_n^0, \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n) = (\mu_n - \mu_n^0)(\psi_n^0, \psi) \tag{5.3.28d}$$

代入式 (5.3.28b) 得

$$\psi_n = (\psi_n^0, \psi)\psi_n^0 + \sum_{m\neq n}^{\infty} \frac{(\psi_m^0, \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n)}{\mu_n - \mu_m^0} \psi_m^0 \tag{5.3.29a}$$

而由方程 (5.3.28d)

$$\mu_n = \mu_n^0 + \frac{(\psi_n^0, \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n)}{(\psi_n^0, \psi)} \tag{5.3.29b}$$

因方程 (5.3.27b) 关于 $\psi_n$ 齐次, 可乘任意常数, 故取 $(\psi_n^0, \psi) = 1$, 于是, 得到联立的积分方程

$$\begin{gathered} \psi_n = \psi_n^0 + \sum_{m\neq n}^{\infty} \frac{(\psi_m^0, \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n)}{\mu_n - \mu_m^0} \varphi_m^0 \\ \mu_n = \mu_n^0 + \varepsilon(\psi_n^0, \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \psi_n) \end{gathered} \tag{5.3.30a}$$

至此, 上式严格成立, 它们是微扰论中十分有用的公式. 当 $||\varepsilon \boldsymbol{K}_1|| < 1$ 时, 可用迭代法求解, 一阶近似为

$$\begin{gathered} \psi_n \approx \psi_n^0 + \varepsilon \sum_{m\neq n}^{\infty} \frac{(\psi_m^0, \boldsymbol{K}_1 \psi_n^0)}{\mu_n - \mu_m^0} \psi_m^0 \\ \mu_n \approx \mu_n^0 + \varepsilon(\psi_n^0, \boldsymbol{K}_1 \psi_n^0) \end{gathered} \tag{5.3.30b}$$

必须指出, 推出式 (5.3.30a) 和 (5.3.30b) 时, 已假定第 $n$ 个本征值 $\mu_n$ 非简并, 如果 $\mu_n$ 简并, 例如对应 $\mu_n$ 有两个独立的本征函数 $\psi_{1n}^0$ 和 $\psi_{2n}^0$, 则式 (5.3.30b) 中 $\psi_n^0$ 无法选择. 事实上, 由于微扰 $\varepsilon \boldsymbol{K}_1$ 的作用, 本征值 $\mu_n$ 可能发生质的变化, 简并可能消除, 我们将在第六章详细讨论.

### 5.3.3 平方可积 Hermite 对称核的极值性质

设 $\boldsymbol{K}$ 是平方可积且 Hermite 对称的积分算子, 进一步假定 $\boldsymbol{K}$ 有无穷多个非零本征值. 因本征值可正可负, 为了讨论的方便, 作下列分类.

(1) 用 $\mu_1^+, \mu_2^+, \cdots$ 表示 $\boldsymbol{K}$ 的正本征值且编序成

$$\mu_1^+ \geqslant \mu_2^+ \geqslant \cdots \mu_n^+ \geqslant \cdots \tag{5.3.31a}$$

相应的本征函数为 $(\psi_1^+, \psi_2^+, \cdots, \psi_n^+, \cdots)$

(2) 用 $\mu_1^-, \mu_2^-, \cdots$ 表示 $\boldsymbol{K}$ 的负本征值且编序成

$$\mu_1^- \leqslant \mu_2^- \leqslant \cdots \mu_n^- \leqslant \cdots \tag{5.3.31b}$$

相应的本征函数为 $(\psi_1^-, \psi_2^-, \cdots, \psi_n^-, \cdots)$, 并且 $\mu_1^-$ 有限 (不为负无穷).

于是, 有下述定理:

(1) 设 $\psi$ 正交于 $(\psi_1^+, \psi_2^+, \cdots, \psi_n^+)$: $(\psi, \psi_i^+) = 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $(\psi, \boldsymbol{K}\psi)/||\psi||^2$ 的最大值为 $\mu_{n+1}^+$

$$\max\left[\frac{(\psi, \boldsymbol{K}\psi)}{||\psi||^2}\right] = \mu_{n+1}^+ \tag{5.3.32a}$$

且当达到最大值时的 $\psi$ 是第 $n+1$ 个本征函数 $\psi_{n+1}^+$;

(2) 设 $\psi$ 正交于 $(\psi_1^-, \psi_2^-, \cdots, \psi_n^-)$: $(\psi, \psi_i^-) = 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $(\psi, \boldsymbol{K}\psi)/||\psi||^2$ 的最小值为 $\mu_{n+1}^-$

$$\min\left[\frac{(\psi, \boldsymbol{K}\psi)}{||\psi||^2}\right] = \mu_{n+1}^- \tag{5.3.32b}$$

且当得到最小值时的 $\psi$ 是第 $n+1$ 个本征函数 $\psi_{n+1}^-$.

证明上述定理是容易的, 因 $\boldsymbol{K}$ 的本征函数系是完备的正交归一系, 于是

$$\boldsymbol{K}\psi = \sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n, \psi)\boldsymbol{K}\psi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\psi_n, \psi)\psi_n \tag{5.3.33a}$$

因此

$$(\psi, \boldsymbol{K}\psi) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n|(\psi_n, \psi)|^2 \tag{5.3.33b}$$

利用引进的表示法, 上式即为

$$(\psi, \boldsymbol{K}\psi) = \sum_{l=1}^{\infty}\mu_l^+|(\psi_l^+, \psi)|^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\mu_m^-|(\psi_m^-, \psi)|^2 \tag{5.3.33c}$$

因为 $\psi$ 与 $(\psi_1^+, \psi_2^+, \cdots, \psi_n^+)$ 正交, 即 $(\psi_i, \psi) = 0,\ (i = 1,\ 2, \cdots, n)$, 于是上式变成

$$\begin{aligned}(\psi, \boldsymbol{K}\psi) &= \sum_{l=n+1}^{\infty}\mu_l^+|(\psi_l^+, \psi)|^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\mu_m^-|(\psi_m^-, \psi)|^2 \\ &\leqslant \mu_{n+1}^+\left[\sum_{l=n+1}^{\infty}|(\psi_l^+, \psi)|^2 + \sum_{m=1}^{\infty}|(\psi_m^-, \psi)|^2\right]\end{aligned} \tag{5.3.34a}$$

又

$$\begin{aligned}||\psi||^2 = (\psi, \psi) &= \sum_{l=1}^{\infty}|(\psi_l^+, \psi)|^2 + \sum_{m=1}^{\infty}|(\psi_m^-, \psi)|^2 \\ &= \sum_{l=n+1}^{\infty}|(\psi_l^+, \psi)|^2 + \sum_{m=1}^{\infty}|(\psi_m^-, \psi)|^2\end{aligned} \tag{5.3.34b}$$

结合式 (5.3.34a) 和 (5.3.34b) 得

$$\frac{(\psi, \boldsymbol{K}\psi)}{||\psi||^2} \leqslant \mu_{n+1}^+ \tag{5.3.34c}$$

显然, 当 $\psi=\psi_{n+1}^{+}$ 时, $(\psi,\boldsymbol{K}\psi)=(\psi_{n+1}^{+},\boldsymbol{K}\psi_{n+1}^{+})=\mu_{n+1}^{+}||\psi_{n+1}^{+}||^2=\mu_{n+1}^{+}||\psi||^2$. 因此, 当 $\psi=\psi_{n+1}^{+}$ 时达到最大值.

定理的第二部分可同样证明: 因为 $\psi$ 与 $(\psi_1^-,\psi_2^-,\cdots,\psi_n^-)$ 正交, 即: $(\psi,\psi_i^-)=0,(i=1,2,\cdots,n)$, 由式 (5.3.33c) 得到

$$\begin{aligned}(\psi,\boldsymbol{K}\psi)&=\sum_{l=1}^{\infty}\mu_l^{+}|(\psi_l^{+},\psi)|^2+\sum_{m=n+1}^{\infty}\mu_m^{-}|(\psi_m^{-},\psi)|^2\\&\geqslant\mu_{n+1}^{-}\left[\sum_{l=n+1}^{\infty}|(\psi_l^{+},\psi)|^2+\sum_{m=n+1}^{\infty}|(\psi_m^{-},\psi)|^2\right]\end{aligned}\tag{5.3.35a}$$

即有

$$\frac{(\psi,\boldsymbol{K}\psi)}{||\psi||^2}\geqslant\mu_{n+1}^{-}\tag{5.3.35b}$$

当 $\psi=\psi_{n+1}^{-}$ 时, $(\psi,\boldsymbol{K}\psi)=(\psi_{n+1}^{-},\boldsymbol{K}\psi_{n+1}^{-})=\mu_{n+1}^{-}||\psi_{n+1}^{-}||^2=\mu_{n+1}^{-}||\psi||^2$. 故整个定理得证. 必须指出: 当 $\mu_{n+1}^{+}$ 或 $\mu_{n+1}^{-}$ 有多重性时, 并非只有一个 $\psi=\psi_{n+1}^{+}$(或 $\psi=\psi_{n+1}^{-}$) 才有 $(\psi,\boldsymbol{K}\psi)=\mu_{n+1}^{+}||\psi||^2$(或 $\mu_{n+1}^{-}$), 因为对应于 $\mu_{n+1}^{+}$(或 $\mu_{n+1}^{-}$) 有多个本征函数满足此条件. 利用该定理可以估计本征值的大小, 特别是第一个本征值.

**例 5.3.9** 考虑本征方程

$$\int_0^1 k(x,y)\psi_n(y)\mathrm{d}y=\mu_n\psi_n(x),\ y\in[0,1]\tag{5.3.36a}$$

其中实对称核

$$k(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ y(1-x), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\tag{5.3.36b}$$

由例 5.3.1, 最大本征值 $\mu_1^{+}=1/\pi^2\approx 0.1013$. 用式 (5.3.32a) 来估计: 取 $\psi_1^{+}(x)$ 满足方程 (5.3.9c) 的边界条件, 即 $\psi_1^{+}(x)\approx x(1-x)$, 则 $\mu_1^{+}$ 的近似值 $\bar{\mu}_1^{+}$ 为

$$\bar{\mu}_1^{+}\approx\frac{(\psi_1^{+},\boldsymbol{K}\psi_1^{+})}{||\psi||^2}\approx\frac{17}{168}\approx 0.1012\tag{5.3.36c}$$

显然 $\mu_1^{+}>\bar{\mu}_1^{+}$, 但误差只有大约 1%.

注意：以上结论与 4.3.1 小节类似, 区别是：积分算子 $\boldsymbol{K}$ 不一定是正算子, 本征值可正可负, 而 4.3.1 小节中我们主要针对正的微分算子 $\boldsymbol{L}$.

### 5.3.4 本征值问题的有限秩近似

设 $\boldsymbol{K}$ 是作用在 $L^2[a,b]$ 上的平方可积且 Hermite 对称的积分算子, 考虑其本征值问题

$$\boldsymbol{K}\psi=\mu\psi\tag{5.3.37a}$$

上式一般不可能严格求解, 只能用近似方法求解, 如 5.2.3 小节介绍的正交函数展开的有限秩核近似. 因为 $k(x,y)$ 平方可积, 故可以选取 $L^2[a,b]$ 上的一个完备的正交、归一函数系 $\{\chi_n\}$ 作展开. 注意: 为了区别, 这里用 $\{\chi_n\}$ 表示任一完备的正交、归一系. 函数系 $\{\chi_n\}$ 不是算子 $\boldsymbol{K}$ 的本征函数系 $\{\psi_n\}$, 我们就是要决定 $\{\psi_n\}$. 于是, 式 (5.2.56b) 修改成

$$k(x,y) \approx k_N(x,y) = \sum_{m,l=1}^{N} a_{ml}\chi_m(x)\chi_l(y) \tag{5.3.37b}$$

其中

$$a_{lm} = \int_a^b \int_a^b k(x,y)\chi_m^*(x)\varphi_l^*(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3.37c}$$

把式 (5.3.37b) 代入方程 (5.3.37a) 得到

$$\sum_{m,l=1}^{N} a_{ml}\chi_m(x)\int_a^b \chi_l(y)\psi^{(N)}(y)\mathrm{d}y = \mu^{(N)}\psi^{(N)}(x) \tag{5.3.38a}$$

其中上标 $(N)$ 表示取有限秩近似, 令

$$a_l = \int_a^b \chi_l(y)\psi^{(N)}(y)\mathrm{d}y \tag{5.3.38b}$$

方程 (5.3.38a) 变成

$$\sum_{m,l=1}^{N} a_{ml}\chi_m(x)a_l = \mu^{(N)}\psi^{(N)}(x) \tag{5.3.38c}$$

两边乘 $\chi_j(x)$ 并积分, 并利用 $\{\chi_n\}$ 的正交性得到决定本征值 $\mu^{(N)}$ 的方程

$$\sum_{l=1}^{N} a_{jl}a_l = \mu^{(N)}a_j,\ (j=1,2,\cdots,N) \tag{5.3.38d}$$

于是, 把问题归结为求 $N$ 维矩阵的本征值问题.

**脉冲基函数** 如果取 $\{\chi_n\}$ 为式 (5.2.57a) 表示的脉冲基函数, 即

$$\chi_n^{(N)}(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{N}{l}}, & a+(n-1)\dfrac{l}{N} \leqslant x \leqslant a+n\dfrac{l}{N} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{5.3.39a}$$

则系数

$$a_{ml} = \int_a^b \int_a^b k(x,y)\chi_m^{(N)}(x)\chi_l^{(N)}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3.39b}$$

为了说明上述结果, 对方程 (5.3.37a) 直接作如下近似: 因可以用求和来近似代替积分, 为此把 $[a,b]$ 分成 $N$ 份, 每段的长为 $l/N$, 方程 (5.3.37a) 可近似成

$$\sum_{m=1}^{N} k(x,y_m)\psi^{(N)}(y_m)\left(\frac{l}{N}\right) = \mu^{(N)}\psi^{(N)}(x) \tag{5.3.40a}$$

进一步对 $x$ 离散化, 则得

$$\sum_{m=1}^{N} k(x_j,y_m)\psi^{(N)}(y_m)\left(\frac{l}{N}\right) = \mu^{(N)}\psi^{(N)}(x_j) \tag{5.3.40b}$$

其中 $(x_j,y_m)$ 为二维 $x-y$ 平面上第 $(j,m)$ 个格子中某一点的坐标, 令

$$\bar{a}_{jm} = k(x_j,y_m)\left(\frac{l}{N}\right);\ \bar{a}_j = \psi^{(N)}(x_j) \tag{5.3.40c}$$

则方程 (5.3.40b) 化成

$$\sum_{m=1}^{N} \bar{a}_{jm}\bar{a}_m = \mu^{(N)}\bar{a}_j,\ \ (j=1,2,\cdots,N) \tag{5.3.40d}$$

显然, 式 (5.3.40c) 与 (5.3.39b) 的区别在于: 式 (5.3.39b) 中 $a_{ml}$ 是 $k(x,y)$ 在小格子中的平均值, 而式 (5.3.40c) 则用小格子中某一点的值来代替平均值, 故前者有较好的近似.

### 5.3.5 一般平方可积核

设 $k(x,y)$ 平方可积, 但没有 Hermite 对称性质. 定义一对共轭本征值问题

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}\psi_n &= \mu_n\psi_n^+ \\ \boldsymbol{K}^+\psi_n^+ &= \mu_n\psi_n \end{aligned} \tag{5.3.41a}$$

其中 $\boldsymbol{K}^+$ 为由方程 (5.3.1b) 定义的共轭算子且积分核为 $k^+(x,y)=k^*(y,x)$. $\boldsymbol{K}^+$ 作用于方程 (5.3.41a) 的第一式并利用第二式得到

$$\boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K}\psi_n = \mu_n\boldsymbol{K}^+\psi_n^+ = \mu_n^2\psi_n \tag{5.3.41b}$$

其中 $\boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K}$ 也为算子积分

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K}\psi_n &= \int_a^b k^*(y,x)\left[\int_a^b k(y,t)\psi_n(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b\left[\int_a^b k(y,t)k^*(y,x)\mathrm{d}y\right]\psi_n(t)\mathrm{d}t \equiv \int_a^b k_1(x,t)\psi_n(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.3.41c}$$

其中

$$k_1(x,t)=\int_a^b k(y,t)k^*(y,x)\mathrm{d}y \tag{5.3.41d}$$

为 $\boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K}$ 的积分核, 显然 $k_1(x,t)=k_1^*(t,x)$, 故 $\boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K}$ 是 Hermite 对称算子. 利用同样的过程可得到

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^+\psi_n^+=\mu_n\boldsymbol{K}\psi_n=\mu_n^2\psi_n^+ \tag{5.3.42a}$$

其中积分算子 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^+$ 的核为

$$k_2(x,t)=\int_a^b k(x,y)k^*(t,y)\mathrm{d}y \tag{5.3.42b}$$

显然, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^+$ 也是 Hermite 对称算子. 故 5.3.1 小节关于 Hermite 对称算子的结论对算子 $\boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^+$ 全部成立.

因此存在以下结论 (证明略).

(1) 存在一组正的本征值 $(\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n\cdots)$ 和相应的正交共轭本征函数对 $\{\psi_n,\psi_n^+\}$(注意: 方程 (5.3.41b) 和 (5.3.42a) 中 $\mu_n$ 以 $\mu_n^2$ 出现, 故可假定是正的, 如果是负的, 只有令 $\mu_n\to-\mu_n$ 和 $\psi_n\to-\psi_n$ 即可);

(2) 对形如 $\psi=\boldsymbol{K}g$ (其中 $g\in L^2[a,b]$) 的函数, 可将 $\psi$ 展成 $\{\psi_n\}$ 的广义 Fourier 级数

$$\psi\cong\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,\psi)\psi_n \tag{5.3.43a}$$

(3) 对形如 $\psi^+=\boldsymbol{K}^+q$(其中 $q\in L^2[a,b]$) 的函数, 可将 $\psi^+$ 展成 $\{\psi_n^+\}$ 的广义 Fourier 级数

$$\psi^+\approx\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n^+,\psi^+)\psi_n^+ \tag{5.3.43b}$$

上述结论在 7.1.2 小节中有重要应用.

下面介绍结合有限秩和小算子近似解第二类 Fredholm 积分方程的方法. 因为 $k(x,y)$ 平方可积, 故可用有限秩核来逼近 $k(x,y)$

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_N+\Delta \tag{5.3.44a}$$

其中 $\boldsymbol{K}_N$ 是有限秩的, 而 $||\Delta||$ 可以任意小. 对有限秩算子 $\boldsymbol{K}_N$ 和 “小算子”$\Delta$, 已有办法进行求解. 考虑第二类 Fredholm 积分方程

$$\psi=f+\lambda\boldsymbol{K}\psi \tag{5.3.44b}$$

利用式 (5.3.44a), 上式可写成

$$(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta-\lambda\boldsymbol{K}_N)\psi=f \tag{5.3.44c}$$

问题的关键是求解 $(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta-\lambda\boldsymbol{K}_N)$ 的逆 $(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta-\lambda\boldsymbol{K}_N)^{-1}$. 一方面, 由 5.2.2 小节, 当 $|\lambda|\cdot||\Delta||<1$ 时, $(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}$ 由 Born 级数给出

$$(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\Delta^n \tag{5.3.45a}$$

另一方面, 当 $\lambda$ 不是 $\boldsymbol{K}_N$ 的本征值时, $(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K}_N)^{-1}$ 可求得. 我们的问题是: 如果 $(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta-\lambda\boldsymbol{K}_N)^{-1}$ 存在, 能否用已求得的 $(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K}_N)^{-1}$ 来表达呢? 利用算子恒等式

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\equiv\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1} \tag{5.3.45b}$$

注意: 上式两边右乘 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 即可证明恒等性. 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\lambda\Delta$ 和 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{K}_N$, 则

$$(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})^{-1}=(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}+\lambda(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}\boldsymbol{K}_N(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})^{-1} \tag{5.3.46a}$$

因此

$$[\boldsymbol{I}-\lambda(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}\boldsymbol{K}_N](\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})^{-1}=(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1} \tag{5.3.46b}$$

于是, 我们得

$$(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})^{-1}=[\boldsymbol{I}-\lambda(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}\boldsymbol{K}_N]^{-1}(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1} \tag{5.3.46c}$$

上式中 $(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}$ 已求得, 关键是求 $[\boldsymbol{I}-\lambda(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}\boldsymbol{K}_N]$ 的逆. 下面证明这个算子也是有限秩的. 事实上, 因 $\boldsymbol{K}_N$ 是有限秩的, 故可表达成

$$\boldsymbol{K}_N f\equiv\sum_{i=1}^{N}p_i(q_i,f) \tag{5.3.47a}$$

因此

$$(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}\boldsymbol{K}_N f=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}p_i(q_i,f)=\sum_{i=1}^{N}p_i^{\Delta}(q_i,f) \tag{5.3.47b}$$

其中

$$p_i^{\Delta}\equiv(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}p_i=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^n\Delta^n p_i \tag{5.3.47c}$$

显然, 由式 (5.3.47b) 知 $(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}\boldsymbol{K}_N$ 是有限秩算子, 故其逆可求得.

综上所述, 求解方程 (5.3.44b) 归结为

(1) 求算子 $(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)$ 的逆, 其中 $\Delta$ 是小算子, 即满足 $|\lambda|\cdot||\Delta||<1$;

(2) 求算子 $\boldsymbol{I}-\lambda(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}\boldsymbol{K}_N$ 的逆, 其中 $(\boldsymbol{I}-\lambda\Delta)^{-1}\boldsymbol{K}_N$ 是有限秩算子.

令 $\bar{\boldsymbol{K}}_N \equiv (\boldsymbol{I} - \lambda\Delta)^{-1}\boldsymbol{K}_N$, 则方程 (5.3.44b) 的解可表成

$$\psi = (\boldsymbol{I} - \lambda\bar{\boldsymbol{K}}_N)^{-1}(\boldsymbol{I} - \lambda\Delta)^{-1}f \tag{5.3.48a}$$

由 5.2.3 小节的讨论, $(\boldsymbol{I} - \lambda\bar{\boldsymbol{K}}_N)^{-1}$ 可用预解核 $\bar{\boldsymbol{R}}_N$ 来表示

$$(\boldsymbol{I} - \lambda\bar{\boldsymbol{K}}_N)^{-1} = \boldsymbol{I} + \lambda\bar{\boldsymbol{R}}_N \tag{5.3.48b}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{R}}_N f \equiv \sum_{m,n=1}^{N} p_n^{\Delta}[(\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{A})^{-1}]_{nm}(q_m, f) \tag{5.3.48c}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 是 $N \times N$ 矩阵 $[\boldsymbol{A}]_{mn} = (q_m, p_n^{\Delta})$.

下面给出具有一般平方可积核方程的 Fredholm 择一定理:

(1) 设 $\boldsymbol{K}$ 作用在 $L^2[a,b]$ 上, $k(x,y)$ 平方可积, 当且仅当 $f$ 与齐次共轭方程

$$\psi = \lambda^* \boldsymbol{K}^+ \psi \tag{5.3.49a}$$

的非零解正交时, 方程

$$\psi = f + \lambda\boldsymbol{K}\psi \tag{5.3.49b}$$

才有解;

(2) 当方程 (5.3.49a) 只有零解时, 方程 (5.3.49b) 有唯一解.

上述定理证明较繁, 故略去.

## 5.4　Fourier 变换及其他积分变换

本节从积分方程的观点来讨论 Fourier 变换. 从 Fourier 变换的微分、积分性质, 介绍分数导数、分数积分和分数 Laplace 算子概念；由 Fourier 积分算子的本征函数和本征值问题, 拓展到分数 Fourier 变换; 从 Fourier 变换出发, 导出其他二个有用的变换, 即 Laplace 变换和 Hankel 变换. 最后讨论 Hilbert 变换及其基本性质.

### 5.4.1　Fourier 变换及逆变换

考虑作用在 $L^2(-\infty, \infty)$ 上的 Fourier 积分算子 $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} f(y)\mathrm{d}y \tag{5.4.1a}$$

算子 $\boldsymbol{F}$ 的积分核 $k(x,y)$ 为

$$k(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \tag{5.4.1b}$$

显然 $k(x,y)$ 不是平方可积的, 因此前几节的理论不能应用到变换式 (5.4.1a). 把式 (5.4.1a) 看作积分方程

$$\boldsymbol{F}(f)=g \tag{5.4.1c}$$

问题是如何求 $f$, 亦即求 $\boldsymbol{F}$ 的逆算子 $\boldsymbol{F}^{-1}$. 为此, 考虑 $L^2(-\infty,\infty)$ 上完备的正交、归一系 $\{\psi_n(x)\}$, 即带权函数的 Hermite 多项式函数系

$$\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2} \tag{5.4.2a}$$

其中 $H_n(x)$ 是 Hermite 多项式, 由式 (2.3.53a) 表示. 注意：为了方便, 我们已经把 2.3.5 小节的式 (2.3.55d) 中的权函数归入了 $\psi_n(x)$ 中. 对任意 $f\in L^2(-\infty,\infty)$, 存在广义 Fourier 展式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\psi_n(x) \tag{5.4.2b}$$

把 $\boldsymbol{F}$ 作用到 $f$

$$\boldsymbol{F}(f)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\boldsymbol{F}(\psi_n) \tag{5.4.2c}$$

$\boldsymbol{F}(\psi_n)$ 可直接计算如下

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\psi_n)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy+y^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{x^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\eta^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\eta^n}\mathrm{e}^{-(\eta-\mathrm{i}x)^2}\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{5.4.3a}$$

得到第二步积分, 已令 $\eta=y+\mathrm{i}x$. 利用关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\mathrm{e}^{-(\eta-\mathrm{i}x)^2}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-(\eta-\mathrm{i}x)^2} \tag{5.4.3b}$$

上式代入式 (5.4.3a) 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\psi_n)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy+y^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{\mathrm{i}^n}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\eta^2/2}\mathrm{e}^{-(\eta-\mathrm{i}x)^2}\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{5.4.3c}$$

利用积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\eta^2/2}\mathrm{e}^{-(\eta-\mathrm{i}x)^2}\mathrm{d}\eta=\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2} \tag{5.4.3d}$$

我们得到

$$\boldsymbol{F}(\psi_n)=\mathrm{i}^n\frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{i}^n\psi_n \tag{5.4.4a}$$

上式表明 Fourier 积分算子的本征值为 $\lambda_n=\mathrm{i}^n$, 相应的本征函数为 $\psi_n(x)$. 式 (5.4.4a) 代入式 (5.4.2c) 得到

$$\boldsymbol{F}(f)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n f_n\psi_n \tag{5.4.4b}$$

另一方面, $\boldsymbol{F}$ 的共轭算子 $\boldsymbol{F}^+$ 具有积分核 $k^+(x,y)=k^*(y,x)$, 即

$$k^+(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \tag{5.4.5a}$$

同样可证明

$$\boldsymbol{F}^+(\psi_n)=(-\mathrm{i})^n\psi_n \tag{5.4.5b}$$

于是, $\boldsymbol{F}^+$ 作用于式 (5.4.4b) 两边, 并利用式 (5.4.5b) 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^+\boldsymbol{F}(f)&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n f_n\boldsymbol{F}^+(\psi_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^{2n}(-1)^n f_n\psi_n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\psi_n=f\end{aligned} \tag{5.4.5c}$$

可见 $\boldsymbol{F}^+\boldsymbol{F}$ 为恒等算子 $\boldsymbol{F}^+\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}$, 于是, $\boldsymbol{F}$ 的逆算子 $\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{F}^+$. 因此方程 (5.4.1c) 的解为

$$f(x)=\boldsymbol{F}^{-1}(g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}y \tag{5.4.5d}$$

方程 (5.4.1a) 和 (5.4.5d) 即为我们熟知的 Fourier 变换对.

**保范变换**　下面考虑 $\boldsymbol{F}$ 的另一个特性, 为此计算 $||\boldsymbol{F}(f)||^2$ 如下

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{F}(f)||^2&=\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{i}^{n+m}f_n^*f_m\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{i}^{n+m}f_n^*f_m\delta_{nm}=\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2=||f||^2\end{aligned} \tag{5.4.6a}$$

因此有关系式

$$||\boldsymbol{F}(f)||=||f|| \tag{5.4.6b}$$

由于 $\boldsymbol{F}$ 是线性算子, 故上式意味着

$$||\boldsymbol{F}(f_1-f_2)||=||f_1-f_2|| \tag{5.4.6c}$$

上式意义很明显: $||f_1 - f_2||$ 表示元素 $f_1$ 与 $f_2$ 之间的 "距离". 因此, 经 $\boldsymbol{F}$ 作用后, 二个象元素 $\boldsymbol{F}(f_1)$ 与 $\boldsymbol{F}(f_2)$ 之间的 "距离" 保持不变. 这样的变换称为**等距变换**或**保范变换**. 如果作用在 Hilbert 空间 $H$ 上的任意线性算子 $\boldsymbol{U}$ 满足条件

(1) 等距性: $||\boldsymbol{U}f|| = ||f||, \forall f \in H$;

(2) $\boldsymbol{U}$ 的逆: $\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{+}$.

则称 $\boldsymbol{U}$ 为**酉算子**. 因此 $\boldsymbol{F}$ 是一个酉算子.

**卷积定理** Fourier 变换的一个十分重要的性质是卷积定理成立:对 $L^2(-\infty,\infty)$ 中的任意函数 $f$ 及 $g$ 定义卷积

$$(f \otimes g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \tag{5.4.7a}$$

则有

$$\boldsymbol{F}[(f \otimes g)] = \sqrt{2\pi}\boldsymbol{F}(f) \cdot \boldsymbol{F}(g) \tag{5.4.7b}$$

证明如下

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}[f \otimes g] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(y-s)\mathrm{d}s\right] \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{d}s \int_{-\infty}^{\infty} g(y-s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\boldsymbol{F}(g) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xs}\mathrm{d}s = \sqrt{2\pi}\boldsymbol{F}(g) \cdot \boldsymbol{F}(f)\end{aligned} \tag{5.4.7c}$$

即式 (5.4.7b) 得证.

**例 5.4.1** 利用卷积定理, 求解具有卷积核的积分方程

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y = f(x) \tag{5.4.8a}$$

对上式两边作用 $\boldsymbol{F}$, 并利用式 (5.4.7b) 得到 $\sqrt{2\pi}\boldsymbol{F}(k)\boldsymbol{F}(\psi) = \boldsymbol{F}(f)$, 因此

$$\boldsymbol{F}(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\boldsymbol{F}(f)}{\boldsymbol{F}(k)} \tag{5.4.8b}$$

如果右边函数平方可积, 则方程 (5.4.8a) 的解为

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\boldsymbol{F}^{-1}\left[\frac{\boldsymbol{F}(f)}{\boldsymbol{F}(k)}\right] \tag{5.4.8c}$$

注意: 尽管我们求得了卷积核积分方程 (5.4.8a) 的形式解, 但此解是不稳定的, 因而无实际意义. 我们将在第七章简单介绍寻找数值上稳定解的具体方法.

**余弦 Fourier 变换** 如果考虑 $L^2(0,\infty)$ 中的 $f(x)$, 作偶延拓

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\geqslant 0\\ f(-x), & x<0\end{cases} \tag{5.4.9a}$$

可得

$$\begin{aligned}\tilde{g}(y)=\boldsymbol{F}(\tilde{f})&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x\\ &=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos(xy)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5.4.9b}$$

显然 $\tilde{g}(y)$ 也是偶函数, 可以写成

$$\tilde{g}(y)=\begin{cases} g(y), & y\geqslant 0\\ g(-y), & y<0\end{cases} \tag{5.4.9c}$$

于是

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x)=\boldsymbol{F}^{-1}(\tilde{g})&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\tilde{g}(y)\mathrm{d}y\\ &=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}g(y)\cos(xy)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{5.4.9d}$$

如果在正实轴上取值, 则可以定义新的变换和逆变换对

$$\boldsymbol{F}_c(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos(xy)\mathrm{d}x\equiv g(y),\ (y\geqslant 0) \tag{5.4.10a}$$

$$\boldsymbol{F}_c^{-1}(g)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}g(y)\cos(xy)\mathrm{d}y\equiv f(y),\ (x\geqslant 0) \tag{5.4.10b}$$

称为**余弦 Fourier 变换**.

**正弦 Fourier 变换** 如果对 $f(x)$ 作奇延拓, 同样过程则可推出正弦 Fourier 变换对

$$\boldsymbol{F}_s(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin(xy)\mathrm{d}x\equiv g(y),\ (y\geqslant 0) \tag{5.4.11a}$$

$$\boldsymbol{F}_s^{-1}(g)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}g(y)\sin(xy)\mathrm{d}y\equiv f(y),\ (x\geqslant 0) \tag{5.4.11b}$$

注意: (1) 在 $x=0$ 点, 正弦 Fourier 变换使 $f(x)$ 收敛到零 $f(0)=0$, 而余弦 Fourier 变换使 $f(x)$ 的一阶导数收敛到零 $f'(0)=0$; (2) 在 2.6.2 小节中, 我们从本征函数的完备性的角度推出了 Fourier 变换、正弦 Fourier 变换和余弦 Fourier 变换, 本节从积分方程的角度, 殊途同归.

### 5.4.2 分数导数和分数 Laplace 算子

设函数 $f(t)\in L^2(-\infty,\infty)$, 则一阶导数 $f'(t)$ 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(f')=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty}\\&-\frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}f(t)\mathrm{d}t=(-\mathrm{i}\omega)\boldsymbol{F}(f)=(-\mathrm{i}\omega)g(\omega)\end{aligned}\tag{5.4.12a}$$

其中 $g(\omega)$ 是 $f(t)$ 的 Fourier 变换: $g(\omega)=\boldsymbol{F}(f)$. 得到上式, 已经假定 $f(\pm\infty)=0$. 同样, 对正整数 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(t)$ 的 Fourier 变换得到

$$\boldsymbol{F}\left[\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right]=(-\mathrm{i}\omega)^n g(\omega)\tag{5.4.12b}$$

只要满足 $f^{(j)}(\pm\infty)=0,\ (j=1,2,\cdots,n-1)$. 或者把上式改写成

$$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}=\boldsymbol{F}^{-1}[(-\mathrm{i}\omega)^n g(\omega)]\tag{5.4.12c}$$

上式的意义是：我们可以通过 Fourier 变换来定义一个函数的 $n$ 阶导数！如果把 $D^n\equiv\partial^n/\partial t^n$ 看成是一个微分算子, 上式可看作微分算子 $D^n$ 对函数 $f(t)$ 的作用. 把方程 (5.4.12c) 中的正整数 $n$ 推广到分数 $s$, $(0<s<1)$, 定义函数 $f(t)$ 的 $s$ 阶导数, 即微分算子 $D^s\equiv\partial^s/\partial t^s$ 为

$$D^s f(t)\equiv\frac{\partial^s f(t)}{\partial t^s}\equiv\boldsymbol{F}^{-1}[(-\mathrm{i}\omega)^s g(\omega)]\tag{5.4.13a}$$

显然, 由上式定义的分数导数的 Fourier 积分为

$$\boldsymbol{F}\left[\frac{\partial^s f(t)}{\partial t^s}\right]=(-\mathrm{i}\omega)^s g(\omega)\tag{5.4.13b}$$

函数 $f(t)$ 的 $s$ 阶分数导数可以化成卷积积分, 其物理意义更明显. 由方程 (5.4.13a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^s f(t)}{\partial t^s}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}(-\mathrm{i}\omega)^s\exp[\mathrm{i}\omega(\tau-t)]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2\pi}(-\mathrm{i})^{s-1}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{s-1}\exp[\mathrm{i}\omega(\tau-t)]\mathrm{d}\omega\right\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{5.4.13c}$$

上式中求导是为了保证 $\omega^{s-1}$ 的幂次小于零. 注意：如果 $s>1$, 即 $s=n+y>1$ (其中 $n$ 是正整数, $y$ 是真分数, 即 $y<1$), 只要先求正整数 $n$ 阶导数, 然后求 $y$ 阶分数导数即可, 故为了方便, 设 $0<s<1$. 方程 (6.5.13c) 中大括号内的积分可由复变函数方法完成, 令

$$I\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{s-1}\exp[\mathrm{i}\omega(\tau-t)]\mathrm{d}\omega\tag{5.4.14a}$$

在复平面上, 取积分围道如图 5.4.1, 由于 $\omega=0$ 是分枝点, 故取割线为正实轴 $(0,\infty)$. 当 $\tau>t$ 时, 积分围道取实轴 + 上半平面半径为 $R$ 的大圆, 围道内无奇点, 故积分为零 $I=0$; 当 $t>\tau$ 时, 积分围道必须取实轴 $L+$ 下半平面半径为 $R$ 的大圆 $C_R+$ 割线上沿 $l_u+$ 割线下沿 $l_u$, 在割线下沿 $l_u$(如图 5.4.1), 函数值为 $\omega e^{\mathrm{i}2\pi}$. 在割线上、下沿 $l_u$ 和 $l_u$ 的积分分别为

$$\begin{aligned}I_u&\equiv\int_\infty^0\omega^{s-1}\exp[\mathrm{i}\omega(\tau-t)]\mathrm{d}\omega\\ I_d&\equiv\int_0^\infty(\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi})^{s-1}\exp[\mathrm{i}\omega(\tau-t)]\mathrm{d}\omega\end{aligned}\tag{5.4.14b}$$

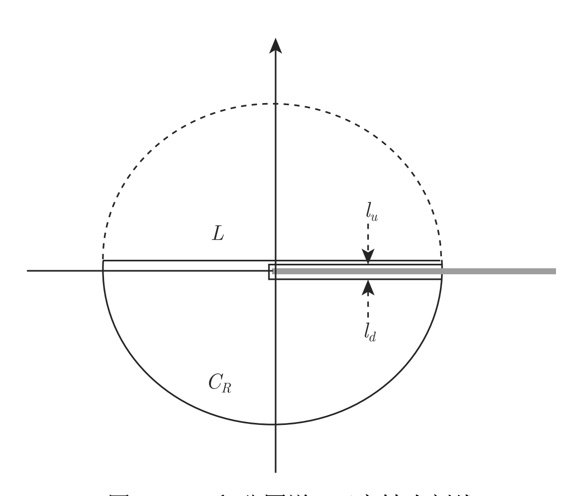



图 5.4.1　积分围道：正实轴为割线

由于围道内无奇点且大圆上积分为零, 因此 $I+I_u+I_d=0$, 即

$$I=-I_u-I_d=(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi s})\int_0^\infty\omega^{s-1}\exp[-\mathrm{i}\omega(t-\tau)]\mathrm{d}\omega\tag{5.4.14c}$$

注意到积分公式

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty x^{\mu-1}\sin(ax)\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right),\ (\mu<1)\\ &\int_0^\infty x^{\mu-1}\cos(ax)\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right),\ (\mu<1)\end{aligned}\tag{5.4.15a}$$

代入式 (5.4.14c) 得到

$$I=-I_u-I_d=(1-e^{2\pi s\mathrm{i}})\frac{\Gamma(s)}{(t-\tau)^s}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{s\pi}{2}\right)\tag{5.4.15b}$$

上式代入式 (5.4.13c) 得到 (注意：当 $\tau > t$ 时, $I = 0$)

$$\frac{\partial^s f(t)}{\partial t^s} = \Gamma(s)(-s)\frac{\sin(s\pi)}{\pi}\int_{-\infty}^{t}\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{s+1}}\mathrm{d}\tau \tag{5.4.15c}$$

利用 $\Gamma$ 函数关系 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$, $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ 和 $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$, 上式简化成

$$\frac{\partial^s f(t)}{\partial t^s} = \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_{-\infty}^{t}\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{s+1}}\mathrm{d}\tau,\ (0 < s < 1) \tag{5.4.15d}$$

可见：分数导数由卷积定义, 故具有 “记忆” 功能, 分数导数的值与 $(-\infty, t)$ 内的 $f(t)$ 都有关, 而正整数阶导数仅反映了 $t$ 时刻附近函数的性态.

**分数阶积分** 根据 Fourier 变换的积分性质, 定义分数阶积分为

$$I^\alpha g(t) \equiv \boldsymbol{F}^{-1}\left[\frac{1}{(-\mathrm{i}\omega)^\alpha}g(\omega)\right],\ (0 < \alpha < 1) \tag{5.4.16a}$$

显然, 我们也可以导出分数阶积分的积分形式

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}(-\mathrm{i}\omega)^{-\alpha}\exp[\mathrm{i}\omega(\tau-t)]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}(-\mathrm{i})^{-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}(\omega)^{-\alpha}\exp[\mathrm{i}\omega(\tau-t)]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{5.4.16b}$$

注意: 积分中 $\omega$ 的幂次函数可以写成 $\omega^{-\alpha} = \omega^{(1-\alpha)-1} = \omega^{\mu-1}$, 而 $0 < \mu = 1-\alpha < 1$ 已经满足式 (5.4.15a) 的要求, 故可以利用式 (5.4.15b). 事实上, 只要把分数阶导数定义中的 $s$ 改成 $-s$ 即可, 故函数 $f(t)$ 的 $\alpha$ 阶分数积分就是 $-\alpha$ 阶分数导数, 即

$$I^\alpha f(t) = D^{-\alpha}f(t) = \frac{\partial^{-\alpha}f(t)}{\partial t^{-\alpha}} \tag{5.4.16c}$$

故分数阶导数与分数阶积分也互为逆运算：$D^sD^{-s}f(t) = f(t)$, 或者存在关系

$$D^\alpha D^{-\beta}f(t) = D^{\alpha-\beta}f(t),\ (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{5.4.16d}$$

**分数阶 Laplace 算子** 如果上述变量 $t$ 为时间, 对时间的分数导数或积分考虑了时间的 “记忆” 功能, 或者说物理量的时间关联. 如果对空间变量应用分数导数或积分, 那么就反映了物理量的空间相关特性. 对一维无限空间问题 $x \in (-\infty, \infty)$, 可仿照式 (5.4.15d) 和 (5.4.16b) 定义空间分数导数和积分. 对三维问题, 如何定义分数阶 Laplace 算子?

考虑三维无限大空间情况, 函数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 的三维空间 Fourier 变换和逆变换分别为

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{k},t)&=\int\psi(\boldsymbol{r},t)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\equiv\boldsymbol{F}[\psi(\boldsymbol{r},t)]\\ \psi(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi(\boldsymbol{k},t)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\equiv\boldsymbol{F}^{-}[\psi(\boldsymbol{k},t)]\end{aligned}\tag{5.4.17a}$$

显然, 存在关系

$$\begin{aligned}-\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\boldsymbol{k}|^2\psi(\boldsymbol{k},t)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\\ &=\boldsymbol{F}^{-}[|\boldsymbol{k}|^2\psi(\boldsymbol{k},t)]=\boldsymbol{F}^{-}\{|\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{F}[\psi(\boldsymbol{r},t)]\}\end{aligned}\tag{5.4.17b}$$

该关系可作为 Laplace 算子 $-\nabla^2$ 作用于函数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 的定义. 仿照方程 (6.5.13a), 定义分数阶 Laplace 算子 $(-\nabla^2)^{s/2}$ 为

$$(-\nabla^2)^{s/2}\psi(\boldsymbol{r},t)\equiv\boldsymbol{F}^{-}\{|\boldsymbol{k}|^s\boldsymbol{F}[\psi(\boldsymbol{r},t)]\}\tag{5.4.18a}$$

当 $s=2$ 时, 上式回到式 (5.4.17b). 由上式定义得到分数阶 Laplace 算子 $(-\nabla^2)^{s/2}$ 的空间 Fourier 变换为

$$\boldsymbol{F}\left[(-\nabla^2)^{s/2}\psi(\boldsymbol{r},t)\right]=|\boldsymbol{k}|^s\psi(\boldsymbol{k},t)\tag{5.4.18b}$$

其中 $|\boldsymbol{k}|=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$. 定义式 (5.4.18a) 也写成空间函数的卷积积分的形式, 由式 (5.4.18a)

$$\begin{aligned}(-\nabla^2)^{s/2}\psi(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{F}^{-}\left[|\boldsymbol{k}|^s\int\psi(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\right]\\ &=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\boldsymbol{k}|^s\int\psi(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\\ &=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left[\int|\boldsymbol{k}|^s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\right]\psi(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\end{aligned}\tag{5.4.18c}$$

在球坐标下, 上式关于 $\boldsymbol{k}$ 的积分首先完成角度部分积分得到

$$\begin{aligned}\int|\boldsymbol{k}|^s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}&=2\pi\int_0^{\infty}k^{s+2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\vartheta}\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}k\\ &=\frac{4\pi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^{\infty}k^{s+1}\sin\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\mathrm{d}k\end{aligned}\tag{5.4.19a}$$

为了利用式 (5.4.15a) 的第一式积分, 对 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 求二次导数后得到

$$\begin{aligned}\int|\boldsymbol{k}|^s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}&=-\frac{4\pi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\int_0^\infty k^{s-1}\sin(kR)\mathrm{d}k\\&=-s(s+1)\Gamma(s)\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\frac{4\pi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{3+s}}\end{aligned}\tag{5.4.19b}$$

上式代入式 (5.4.18c) 得到三维分数阶 Laplace 算子 $(-\nabla^2)^{s/2}$ 的积分形式

$$(-\nabla^2)^{s/2}\psi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{s(s+1)\Gamma(s)}{2\pi^2}\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\int\frac{\psi(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{3+s}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\tag{5.4.19c}$$

由上述讨论可见, 分数导数和分数阶 Laplace 算子都是由积分算子定义, 故包含分数导数和分数阶 Laplace 算子的偏微分方程实际上是积分-微分方程, 它们在物理上有重要的应用, 如 5.1.3 小节中的例 5.1.6.

### 5.4.3 分数阶 Fourier 变换

由方程 (5.4.4a), Fourier 积分算子的本征值为 $\lambda_n=\mathrm{i}^n$, 本征方程为

$$\boldsymbol{F}(\psi_n)=\mathrm{i}^n\psi_n(t)\tag{5.4.20a}$$

其中相应的本征函数 $\psi_n(t)$ 为

$$\psi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2^nn!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{t^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{-t^2}\tag{5.4.20b}$$

Fourier 积分算子为

$$\boldsymbol{F}(\psi_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\psi_n(\omega)\mathrm{d}\omega\tag{5.4.20c}$$

注意: Fourier 积分算子的一对共轭变量在习惯上写成: 时间-频率域 $(t,\omega)$, 一维空间-波数域 $(x,k)$, 三维空间-波矢域 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})$(其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 为三维矢量), 我们在本小节中假定在时间-频率域 $(t,\omega)$ 讨论问题.

方程 (5.4.20a) 连续作用 $N$ 次后得到

$$\boldsymbol{F}^N(\psi_n)=\mathrm{i}^{nN}\psi_n(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nn\pi/2}\psi_n(t)\tag{5.4.21a}$$

其中 $N$ 是正整数. 与定义分数导数类似, 我们把上式中的正整数 $N$ 推广到分数情况, 定义分数 $p$ 阶 Fourier 积分算子 $\Im_p$ 满足

$$\Im_p(\psi_n)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n(t)\tag{5.4.21b}$$

即要求分数阶 Fourier 算子的特征函数仍然为 $\psi_n(t)$, 而特征值为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}pn\pi/2}$, 其中 $p$ 为任意分数, $\Im_p$ 称为 $p$ 阶 Fourier 变换. 下面根据式 (5.4.21b) 导出积分算子 $\Im_p$ 的具体形式.

对任意函数 $f \in L^2(-\infty,\infty)$, 用 $\boldsymbol{F}$ 的本征函数 $\psi_n(t)$ 展开

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n(t);\ c_n=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_n(t)\mathrm{d}t \tag{5.4.22a}$$

对函数 $f$ 求 $p$ 阶 Fourier 变换, 且利用定义式 (5.4.21b)

$$\Im_p(f)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Im_p(\psi_n)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n(t) \tag{5.4.22b}$$

把式 (5.4.22a) 的 $c_n$ 代入上式得到

$$\begin{aligned}\Im_p(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n(t)\psi_n(\omega)\right]f(\omega)\mathrm{d}\omega\\&\equiv\int_{-\infty}^{\infty}k_p(t,\omega)f(\omega)\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{5.4.22c}$$

因此, 我们得到算子 $\Im_p$ 的积分核为

$$k_p(t,\omega)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n(t)\psi_n(\omega) \tag{5.4.22d}$$

注意: 对照式 (5.3.6d), 上式实际上相当于本征函数展开.

下面首先介绍算子 $\Im_p$ 的几个基本性质.

**算子 $\Im_p$ 的酉性**　由式 (5.3.1c), 算子 $\Im_p$ 的共轭算子 $\Im_p^+$ 具有积分核

$$k_p^+(t,\omega)=k_p^*(\omega,t)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n(t)\psi_n(\omega) \tag{5.4.23a}$$

把 $\Im_p^+$ 作用到式 (5.4.22c) 得到

$$\begin{aligned}\Im_p^+\Im_p(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}k_p^+(t,\omega)\Im_p(f)\mathrm{d}\omega\\&=\int_{-\infty}^{\infty}k_p^+(t,\omega)\int_{-\infty}^{\infty}k_p(\omega,\omega')f(\omega')\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{5.4.23b}$$

把式 (5.4.22d) 和 (5.4.23a) 代入上式且利用 $\psi_n(\omega)$ 的正交性

$$\begin{aligned}\Im_p^+\Im_p(f)&=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(t)\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(\omega')f(\omega')\mathrm{d}\omega'\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(\psi_n,f)\psi_n(t)=f(t)\end{aligned} \tag{5.4.23c}$$

故 $\Im_p^+\Im_p$ 也是恒等算子, $\Im_p$ 的逆算 $\Im_p^{-1}=\Im_p^+$. 另一面, $\Im_p$ 也是保范算子, 事实上, 由式 (5.4.22c) 不难得到

$$\begin{aligned}||\Im_p(f)||^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}k_p(t,\omega)f(\omega)\mathrm{d}\omega\right|^2\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2=||f||^2\end{aligned} \tag{5.4.23d}$$

故分数 Fourier 变换算子 $\Im_p$ 也是酉算子.

**算子 $\Im_p$ 的加性** 即存在关系

$$\Im_{p_2}\Im_{p_1}(f)=\Im_{p_2+p_1}(f) \tag{5.4.24a}$$

证明：由式 (5.4.22c)

$$\begin{aligned}\Im_{p_1}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty}k_{p_1}(t,\omega)f(\omega)\mathrm{d}\omega\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1m\pi/2}\psi_m(t)\psi_m(\omega)f(\omega)\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{5.4.24b}$$

用 $\Im_{p_2}$ 作用于上式

$$\begin{aligned}\Im_{p_2}\Im_{p_1}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty}k_{p_2}(t,\omega')\left[\int_{-\infty}^{\infty}k_{p_1}(\omega',\omega)f(\omega)\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\omega'\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n,m=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_2n+p_1m)\pi/2}\delta_{nm}\psi_n(t)\psi_m(\omega)f(\omega)\mathrm{d}\omega\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_2+p_1)\pi/2}\psi_n(t)\psi_m(\omega)f(\omega)\mathrm{d}\omega=\Im_{p_2+p_1}(f)\end{aligned} \tag{5.4.24c}$$

即得到 (5.4.24a).

**Parseval 关系** 对任意二个函数 $g,f\in L^2(-\infty,\infty)$, 存在关系

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g^*(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\Im_p(f)\Im_p^*(g)\mathrm{d}\omega \tag{5.4.25a}$$

当取 $f=g$ 时, 可推出能量守恒关系

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|\Im_p(f)|^2\mathrm{d}\omega \tag{5.4.25b}$$

证明：由式 (5.4.24b)

$$\begin{aligned}\Im_p(f) &= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pm\pi/2}\psi_m(\omega)\psi_m(t)f(t)\mathrm{d}t \\ \Im_p^*(g) &= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n(\omega)\psi_n(t')g^*(t')\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{5.4.26a}$$

利用 $\psi_n$ 的正交性和完备性关系

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(\omega)\psi_m(\omega)\mathrm{d}\omega = \delta_{nm} \\ &\sum_{m=0}^{\infty}\psi_n(t')\psi_m(t) = \delta(t-t')\end{aligned} \tag{5.4.26b}$$

不难得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\Im_p(f)\Im_p^*(g)\mathrm{d}\omega &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\psi_n(t')\psi_m(t)\right]f(t)g^*(t')\mathrm{d}t\mathrm{d}t' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t')g^*(t')f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t' = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)g^*(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5.4.26c}$$

于是, 式 (5.4.25a) 得证.

**封闭关系式**　下面求 $k_p(t,\omega)$ 的封闭关系式.

(1) $p=0$, 由式 (5.4.22d) 和完备函数系的封闭关系

$$k_p(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(t)\psi_n(\omega) = \delta(t,\omega) \tag{5.4.27a}$$

因此由式 (5.4.22c)

$$\Im_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t,\omega)f(\omega)\mathrm{d}\omega = f(t) \tag{5.4.27b}$$

即 0 阶分数 Fourier 变换就是恒等变换；

(2) $p=1$, 由式 (5.4.22d)

$$k_1(t,\omega) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/2}\psi_n(t)\psi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{5.4.28a}$$

上式证明过程：把 $\exp(\mathrm{i}\omega t)$ 用 $\psi_n(t)$ 作广义 Fourier 展开并且利用式 (5.4.20a) 和

(5.4.20c)

$$\exp(\mathrm{i}\omega t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}\omega t')\psi_n(t')\mathrm{d}t'\right]\psi_n(t)$$

$$= \sqrt{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/2}\psi_n(\omega)\right]\psi_n(t) \tag{5.4.28b}$$

$$= \sqrt{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/2}\psi_n(\omega)\psi_n(t)$$

由式 (5.4.22c)

$$\Im_1(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}f(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{5.4.28c}$$

故 1 阶分数 Fourier 变换就是普通的 Fourier 变换;

(3) $p=-1$, 由式 (5.4.22d)

$$k_{-1}(t,\omega) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/2}\psi_n(t)\psi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{5.4.29a}$$

故 $-1$ 阶分数 Fourier 变换就是普通的逆 Fourier 变换;

(4) $p=$ 任意数, 利用求和关系 (见习题 5.8)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{2^n n!}H_n(x)H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[\frac{2\rho xy-(x^2+y^2)\rho^2}{1-\rho^2}\right] \tag{5.4.29b}$$

我们可以推出

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\psi_n(t)\psi_n(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(t^2+\omega^2)/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{2^n n!}H_n(t)H_n(\omega)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\rho^2)}}\exp\left[\frac{2\rho t\omega}{1-\rho^2}-\frac{1+\rho^2}{2(1-\rho^2)}(t^2+\omega^2)\right]\end{aligned} \tag{5.4.29c}$$

由式 (5.4.22d), 取 $\rho=\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\pi/2}$ 得到

$$\begin{aligned}k_p(t,\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\psi_n(t)\psi_n(\omega)\\ &= \sqrt{\frac{1+\mathrm{i}\cot\alpha}{2\pi}}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega^2+t^2}{2}\cot\alpha+\frac{\mathrm{i}\omega t}{\sin\alpha}\right)\end{aligned} \tag{5.4.29d}$$

其中 $\alpha=p\pi/2$. 显然, 当 $p=\pm 1$ 时, $\alpha=\pm\pi/2$, 上式简化到式 (5.4.28a) 和 (5.4.29a) 的结果, 当 $p=0$ 时, 上式趋向于 Dirac Delta 函数 $\delta(t,\omega)$.

显然, 共轭算子 $\Im_p^+$ 的积分核为

$$k_p^+(t,\omega)=\sqrt{\frac{1-\mathrm{i}\cot\alpha}{2\pi}}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega^2+t^2}{2}\cot\alpha-\frac{\mathrm{i}\omega t}{\sin\alpha}\right) \tag{5.4.30a}$$

因此, 存在 $p$ 阶分数 Fourier 变换对

$$\begin{aligned}\Im_p(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}k_p(\omega,t)f(t)\mathrm{d}t=g(\omega)\\ \Im_p^{-1}(g)&=\int_{-\infty}^{\infty}k_p^+(t,\omega)g(\omega)\mathrm{d}\omega=f(t)\end{aligned} \tag{5.4.30b}$$

值得指出的是, 分数 Fourier 变换在多个学科领域, 包括量子力学、光学、声学、通信、信号处理都有重要的应用.

### 5.4.4　Laplace 变换和 Hankel 变换

**Laplace 变换**　首先介绍 Laplace 变换, 函数 $f(x)$ 的 Laplace 变换定义为

$$\boldsymbol{L}(f)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma x}f(x)\mathrm{d}x\equiv g(\sigma) \tag{5.4.31a}$$

只要右边积分存在. 为了求 $\boldsymbol{L}$ 的逆算子 $\boldsymbol{L}^{-1}$, 我们从 Fourier 变换出发, 令 $f(x)=0$, $(x<0)$, 由 Fourier 变换式 (5.4.1a) 和逆变换式 (5.4.5d)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(f)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}f(x)\mathrm{d}x\equiv g(s)\\ f(x)=\boldsymbol{F}^{-1}(g)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}g(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{5.4.31b}$$

作变换 $s=\mathrm{i}\sigma$, 并且令 $\boldsymbol{F}(f)\equiv\boldsymbol{L}(f)$, 定义 Laplace 变换对

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}(f)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma x}f(x)\mathrm{d}x\equiv g(\sigma)\\ f(x)=\boldsymbol{L}^{-1}(g)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{x\sigma}g(\sigma)\mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{5.4.31c}$$

注意: 第二式积分在虚轴进行. 由于 Fourier 变换要求 $f\in L^2(0,\infty)$, 因此, 亦要求式 (5.4.13c) 中 $f\in L^2(0,\infty)$. 为了使 Laplace 变换适合于更广泛的函数, 考虑指数增长的函数, 即假定存在实数 $p$, 使 $\mathrm{e}^{-px}f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内平方可积, 那么 Laplace 变换和逆变换为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}(f)&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(\sigma+p)x}f(x)\mathrm{d}x\equiv g(\sigma)\\ \mathrm{e}^{-px}f(x)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{x\sigma}g(\sigma)\mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{5.4.32a}$$

令 $\sigma + p = \sigma'$, 上式变成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}(f) &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma' x} f(x) \mathrm{d}x \equiv g(\sigma') \\ f(x) &= \boldsymbol{L}^{-1} g = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\mathrm{i}\infty+p}^{+\mathrm{i}\infty+p} \mathrm{e}^{x\sigma'} g(\sigma') \mathrm{d}\sigma' \end{aligned} \tag{5.4.32b}$$

注意: 第二式积分在复平面 $\sigma$ 上平行于虚轴的直线上 $p$ 进行, 如图 5.4.2. 与式 (5.4.31c) 相比, 上式适合更广泛的函数类, 只要求 $\mathrm{e}^{-px} f(x) \in L^2(0, \infty)$. 由方程 (5.4.32b) 得到 Laplace 算子 $\boldsymbol{L}$ 的逆算子 $\boldsymbol{L}^{-1}$ 为

$$\boldsymbol{L}^{-1} g = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\mathrm{i}\infty+p}^{+\mathrm{i}\infty+p} \mathrm{e}^{x\sigma'} g(\sigma') \mathrm{d}\sigma' \tag{5.4.32c}$$

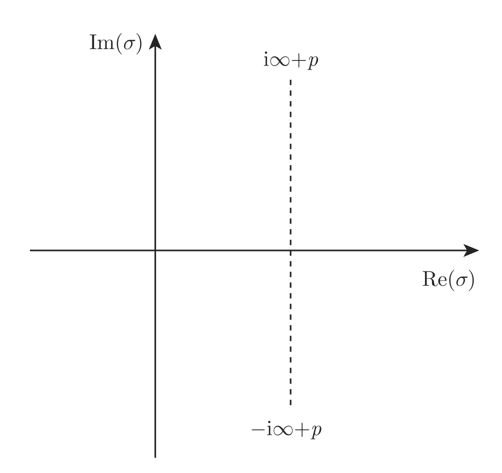



图 5.4.2 逆 Laplace 变换积分图

**相关定理** 如果定义 $f$ 与 $g$ 的相关 $(f \oplus g)$ 如下

$$(f \oplus g) = \int_0^x f(y) g(x-y) \mathrm{d}y \tag{5.4.33a}$$

则有

$$\boldsymbol{L}[(f \oplus g)] = \boldsymbol{L}(f) \cdot \boldsymbol{L}(g) \tag{5.4.33b}$$

证明

$$\boldsymbol{L}[(f \oplus g)] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\sigma x} \left[ \int_0^x f(y) g(x-y) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \tag{5.4.33c}$$

二重积分交换次序

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}(f\oplus g)&=\int_0^\infty f(y)\mathrm{e}^{-\sigma y}\left[\int_y^\infty \mathrm{e}^{-\sigma(x-y)}g(x-y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\&=\int_0^\infty f(y)\mathrm{e}^{-\sigma y}\mathrm{d}y\cdot\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma x'}g(x')\mathrm{d}x'\right]=\boldsymbol{L}(f)\cdot\boldsymbol{L}(g)\end{aligned}\tag{5.4.33d}$$

故式 (5.4.33b) 得证. Laplace 变换的这一性质常用来解具有相关核的 Volterra 积分方程.

**例 5.4.2**　考虑 Abel 方程

$$\int_0^x \frac{\psi(y)}{(x-y)^\alpha}\mathrm{d}y=f(x),\quad (0<\alpha<1)\tag{5.4.34a}$$

取 $k(x)=x^{-\alpha}$, 则 (作变换 $\sigma x=u$)

$$\boldsymbol{L}(k)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma x}x^{-\alpha}\mathrm{d}x=\sigma^{\alpha-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{-\alpha}\mathrm{d}u=\sigma^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\tag{5.4.34b}$$

对方程 (5.4.34a) 两边作用 $\boldsymbol{L}$ , 且利用式 (5.4.33b)

$$\boldsymbol{L}(\psi)\cdot\boldsymbol{L}(k)=\boldsymbol{L}(f)\tag{5.4.34c}$$

即

$$\boldsymbol{L}(\psi)=\frac{\boldsymbol{L}(f)}{\boldsymbol{L}(k)}=\frac{\sigma^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\boldsymbol{L}(f)\tag{5.4.34d}$$

因此 Abel 方程的解为

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{\sigma x}\frac{\sigma^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\boldsymbol{L}(f)\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{\sigma x}\Gamma(\alpha)\sigma^{-\alpha}\boldsymbol{L}(f)\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{L}^{-1}[\Gamma(\alpha)\sigma^{-\alpha}\boldsymbol{L}(f)]\end{aligned}\tag{5.4.35a}$$

另一方面, 利用式 (5.4.33b), 容易得到

$$\boldsymbol{L}\left[\int_0^x\frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y\right]=\Gamma(\alpha)\sigma^{-\alpha}\boldsymbol{L}(f)\tag{5.4.35b}$$

代入式 (5.4.35a) 应有

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{L}^{-1}\left[\boldsymbol{L}\int_0^x\frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{5.4.35c}$$

利用关系 $\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)=\pi/\sin\pi\alpha$, Abel 方程的解为

$$\psi(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y \tag{5.4.35d}$$

上式与 (5.1.43b) 完全是一致.

**Hankel 变换** 考虑平方可积的二维函数 $f(x,y)$, 二维 Fourier 变换和逆变换定义为

$$\begin{aligned}F(s,\sigma)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(sx+\sigma y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ f(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(s,\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(sx+\sigma y)}\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{5.4.36a}$$

设 $f(x,y)$ 具有特殊形式,

$$f(x,y)=f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\vartheta} \tag{5.4.36b}$$

平方可积条件为

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}|f(r)|^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta=2\pi\int_0^{\infty}r|f(r)|^2\mathrm{d}r<\infty \tag{5.4.36c}$$

即要求 $f(r)$ 带权 $\rho(r)=r$ 平方可积. 设 $s=\rho\cos\alpha$ 及 $\sigma=\rho\sin\alpha$, 则式 (5.4.36a) 变成

$$\begin{aligned}F(\rho,\alpha)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}f(r)\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\rho\cos(\vartheta-\alpha)+\mathrm{i}n\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\right]r\mathrm{d}r\\ f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\vartheta}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}F(\rho,\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\rho\cos(\vartheta-\alpha)}\mathrm{d}\vartheta\rho\mathrm{d}\rho\end{aligned} \tag{5.4.37a}$$

利用 Bessel 函数的下列公式

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[x\cos(\vartheta-\alpha)+m\vartheta]}\mathrm{d}\vartheta=2\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\alpha+\pi/2)}J_m(x)\\ &\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[-x\cos(\vartheta-\alpha)+m(\alpha+\pi/2)]}\mathrm{d}\alpha=2\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\vartheta}J_m(x)\end{aligned} \tag{5.4.37b}$$

方程 (5.4.37a) 的第一式变成

$$F(\rho,\alpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\alpha+\pi/2)}\int_0^{\infty}f(r)J_n(\rho r)r\mathrm{d}r\equiv\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\alpha+\pi/2)}g(\rho) \tag{5.4.37c}$$

其中

$$g(\rho)\equiv\int_0^{\infty}f(r)J_n(\rho r)r\mathrm{d}r \tag{5.4.38a}$$

式 (5.4.37c) 代入方程 (5.4.37a) 的第二式

$$\begin{aligned}f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\vartheta}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\alpha+\pi/2)}g(\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\rho\cos(\vartheta-\alpha)}\mathrm{d}\alpha\right]\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}g(\rho)\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[-r\rho\cos(\vartheta-\alpha)+n\alpha+n\pi/2]}\mathrm{d}\alpha\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\vartheta}\int_0^{\infty}g(\rho)J_n(\rho r)\rho\mathrm{d}\rho\end{aligned}\tag{5.4.38b}$$

因此, 可以定义 Hankel 变换 $\boldsymbol{H}$ 和逆变换 $\boldsymbol{H}^{-1}$

$$\begin{aligned}g(\rho)=\boldsymbol{H}(f)=\int_0^{\infty}f(r)J_n(\rho r)r\mathrm{d}r\\f(r)=\boldsymbol{H}^{-1}(g)=\int_0^{\infty}g(\rho)J_n(\rho r)\rho\mathrm{d}\rho\end{aligned}\tag{5.4.39a}$$

显然 $\boldsymbol{H}^{-1}=\boldsymbol{H}$, 因此

$$\boldsymbol{H}^2(f)=\boldsymbol{H}^{-1}[\boldsymbol{H}(f)]=(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{H})(f)=f\tag{5.4.39b}$$

即 $\boldsymbol{H}^2=\boldsymbol{I}$ 是恒等算子.

**Hankel 算子的本征值**　考虑 Hankel 算子 $\boldsymbol{H}$ 的本征方程

$$\boldsymbol{H}(\psi)=\mu\psi\tag{5.4.39c}$$

两边作用 Hankel 算子 $\boldsymbol{H}$, 并利用式 (5.4.39b) 得到 $\psi=\mu\boldsymbol{H}(\psi)$, 再利用上式得到 $\psi=\mu^2\psi$. 因此, Hankel 算子 $\boldsymbol{H}$ 的本征值只有两个: $\mu_{\pm}=\pm1$.

**例 5.4.3**　利用 Hankel 变换, 求解特殊形式的积分方程.

$$\psi(x)=\lambda\int_0^{\infty}yJ_n(xy)\psi(y)\mathrm{d}y+f(x)\tag{5.4.40a}$$

上式写成

$$\psi=\lambda\boldsymbol{H}(\psi)+f\tag{5.4.40b}$$

两边作 Hankel 变换

$$\boldsymbol{H}(\psi)=\lambda\boldsymbol{H}^2(\psi)+\boldsymbol{H}(f)\tag{5.4.41a}$$

利用 Hankel 变换的性质式 (5.4.39b)

$$\boldsymbol{H}(\psi)=\lambda\psi+\boldsymbol{H}(f)\tag{5.4.41b}$$

上式与方程 (5.4.40b) 消去 $\boldsymbol{H}(\psi)$

$$\psi = \lambda[\lambda\psi + \boldsymbol{H}(f)] + f \tag{5.4.41c}$$

因此, 当 $1-\lambda^2 \neq 0$ 时, 方程 (5.4.40a) 的解为

$$\psi = \frac{1}{1-\lambda^2}[f + \lambda\boldsymbol{H}(f)] \tag{5.4.41d}$$

当 $1-\lambda^2=0$, 即 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的本征值时, 有解的条件是 $f+\lambda\boldsymbol{H}(f)\equiv 0$. 当 $\lambda=\mu_+=1$ 时, $\boldsymbol{H}(f)=-f$, 故 $f$ 只能是 $\boldsymbol{H}$ 对应于 $\mu_-=-1$ 的本征函数; 当 $\lambda=\mu_-=-1$ 时: $\boldsymbol{H}(f)=f$, 即 $f$ 只能是 $\boldsymbol{H}$ 对应于 $\mu_+=1$ 的本征函数.

### 5.4.5 Hilbert 变换及逆变换

在 1.3.1 小节, 我们从复变函数角度导出了 Hilbert 变换对, 本节中将从积分方程的角度进一步讨论 Hilbert 变换, 考虑函数 $\psi(x)$ 的 Hilbert 变换

$$\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(y)}{x-y}\mathrm{d}y = f(x),\ \ x\in(-\infty,\infty) \tag{5.4.42a}$$

其中 $f(x)\in L^2(-\infty,\infty)$, $P$ 表示 Cauchy 主值积分. 上式两边作 Fourier 变换, 并用卷积定理

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\left[P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(y)}{x-y}\mathrm{d}y\right] \\ &= \frac{2\mathrm{i}}{\pi}\boldsymbol{F}(\psi)\int_{0}^{\infty}\frac{\sin sy}{y}\mathrm{d}y = \mathrm{i}\boldsymbol{F}(\psi)\mathrm{sgn}(s)\end{aligned} \tag{5.4.42b}$$

故得

$$\mathrm{isgn}(s)\boldsymbol{F}(\psi) = \boldsymbol{F}(f) \tag{5.4.42c}$$

其中符号函数为

$$\mathrm{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s>0 \\ -1, & s<0 \end{cases} \tag{5.4.42d}$$

另一方面, 作 Fourier 变换可得

$$\boldsymbol{F}\left[\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y\right] = \mathrm{i}\boldsymbol{F}(f)\mathrm{sgn}(s) \tag{5.4.43a}$$

上式结合方程 (5.4.42c) 得

$$\boldsymbol{F}(\psi) = -\boldsymbol{F}\left[\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y\right] \tag{5.4.43b}$$

因此

$$\psi(x) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y \tag{5.4.43c}$$

上式和式 (5.4.42a) 就是 Hilbert 变换对 (与方程 (1.3.13b) 类似). 记 $\boldsymbol{H}(f)$ 如下

$$\boldsymbol{H}(f) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y \tag{5.4.44a}$$

则变换对 (5.4.42a) 和 (5.4.43c) 可表示成

$$\boldsymbol{H}(\psi) = f;\ \psi = -\boldsymbol{H}(f) \tag{5.4.44b}$$

由上式, 可推出 Hilbert 变换的性质

$$\boldsymbol{H}^2(\psi) = -\psi \tag{5.4.44c}$$

**Hilbert 算子的本征值**　考虑 Hilbert 算子 $\boldsymbol{H}$ 的本征方程 $\boldsymbol{H}(\psi) = \mu\psi$, 两边作用 $\boldsymbol{H}$ 得到 $\boldsymbol{H}^2(\psi) = \mu\boldsymbol{H}(\psi)$, 利用式 (5.4.44c) 可得到 $(1+\mu^2)\psi = 0$. 因此 Hilbert 算子 $\boldsymbol{H}$ 的本征值 $\mu_\pm = \pm\mathrm{i}$.

**例 5.4.4**　利用 Hilbert 变换, 解具有 Hilbert 核的积分方程.

$$\psi - \frac{\lambda}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(y)}{x-y}\mathrm{d}y = f(x) \tag{5.4.45a}$$

上式写成

$$\psi - \lambda\boldsymbol{H}(\psi) = f(x) \tag{5.4.45b}$$

两边用 Hilbert 算子 $\boldsymbol{H}$ 作用, 则得 $\boldsymbol{H}(\psi) - \lambda\boldsymbol{H}^2(\psi) = \boldsymbol{H}(f)$, 利用式 (5.4.44c) 得到

$$\boldsymbol{H}(\psi) + \lambda\psi = \boldsymbol{H}(f) \tag{5.4.45c}$$

上式与方程 (5.4.45b) 联立可求得

$$(1+\lambda^2)\psi = f + \lambda\boldsymbol{H}(f) \tag{5.4.46a}$$

因此, 当 $1+\lambda^2 \neq 0$ 式, 方程 (5.4.45a) 的解为

$$\psi = \frac{1}{1+\lambda^2}[f + \lambda\boldsymbol{H}(f)] \tag{5.4.46b}$$

当 $1+\lambda^2 = 0$, 即 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的本征值时, 方程 (5.4.45a) 有解的条件是 $f + \lambda\boldsymbol{H}(f) = 0$. 当 $\lambda = \mu_+ = \mathrm{i}$ 时, $\boldsymbol{H}(f) = -\mathrm{i}f$, 故 $f$ 只能是 $\boldsymbol{H}$ 对应于 $\mu_- = -\mathrm{i}$ 的本征函数; 当 $\lambda = \mu_- = -\mathrm{i}$ 时: $\boldsymbol{H}(f) = \mathrm{i}f$, 即 $f$ 只能是 $\boldsymbol{H}$ 对应于 $\mu_+ = \mathrm{i}$ 的本征函数.

## 5.5 边界元近似方法

边界元法是继有限元技术之后发展起来的一种有效的数值分析方法. 它以边界积分方程为基础, 通过边界离散化, 将边界积分方程离散为代数方程组, 从而得到边界积分方程的近似解. 与有限元技术相比, 边界元方法的优点是降低了求解问题的维数, 将二维问题转化为边界线上的一维积分, 将三维问题转化为边界面上的二维积分; 它仅以边界变量为基本变量, 变量少, 效率高; 区域内未知变量可以通过边界积分得到, 精度较有限元技术高. 边界元方法的缺点也是明显的, 即通过边界元法建立的线性代数方程组的系数矩阵是满秩矩阵 (而有限元技术中得到的是稀疏矩阵), 难以求解大规模的工程实际问题. 但随着快速多极算法引进边界元法, 这一问题得到了圆满解决, 由于这方面内容远超出本书范围, 故不作介绍. 本节仅介绍边界元近似法的基本思路.

### 5.5.1 Kirchhoff 边界积分公式

考虑定义在区域 $G$ 内的边值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}(\psi)\equiv-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla\psi]+q(\boldsymbol{r})\psi=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=b(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered}\tag{5.5.1a}$$

其中 $\partial G$ 为区域 $G$ 的边界. 利用基本解 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 的对称性, 直接把 Green 公式写成

$$\begin{aligned}&\int_G[\psi(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{L}'g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})-g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\boldsymbol{L}'\psi(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}\tau'\\ =&\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{5.5.1b}$$

其中 $\boldsymbol{L}'$ 表示对变量 $\boldsymbol{r}'$ 作微分运算, $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为微分算子 $\boldsymbol{L}$ 的基本解, 即满足 $\boldsymbol{L}'g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ (注意: 与方程 (3.3.2a) 和 (3.3.2b) 的区别, 这里 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是基本解, 没有边界条件). 为了得到边界积分方程, 分二种情况讨论 (注意: 在 3.3.1 小节中, 仅仅求区域 $G$ 内的解, 无需分情况讨论).

(1) 观察点 $\boldsymbol{r}$ 在区域 $G$ 内部, 由 Dirac Delta 函数的性质, 方程 (5.5.1b) 给出

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r})=&\int_G g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\ &+\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{5.5.2a}$$

注意: 上式与 $q(\boldsymbol{r})$ 无关, 故对 Poisson 方程和 Helmholtz 方程都成立.

(2) 观察点 $\boldsymbol{r}$ 趋向边界 $\partial G$ 上一点 $\boldsymbol{r}_s$, 式 (5.5.1b) 中对 $\psi(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{L}'g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的体积分含有奇性, 须理解为主值积分. 用半径为 $\varepsilon$ 的半球 (三维情况) 或者半圆 (二维情况), 把边界点 $\boldsymbol{r}_s$ 排除在积分区域之外 (如图 5.5.1 所示), 在 $G-\varepsilon$ 内, 观察点 $\boldsymbol{r}$ 不可能等于积分变量 $\boldsymbol{r}'$, 因此 $\boldsymbol{L}'g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0$, 于是

$$\int_{G-\varepsilon}\psi(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{L}'g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'=0 \tag{5.5.2b}$$

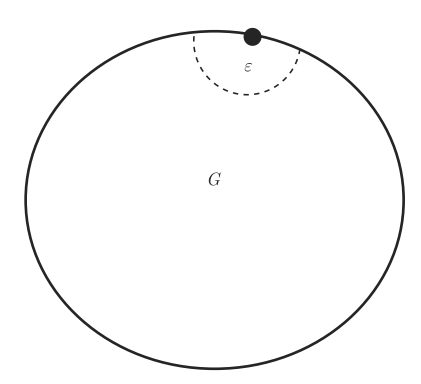



图 5.5.1 半径为 $\varepsilon$ 的半球 (三维情况) 或者半圆 (二维情况), 把边界点 $\boldsymbol{r}_s$ 排除在区域 $G$-$\varepsilon$ 之外

代入式 (5.5.1b)

$$\begin{aligned}0=&\int_{G-\varepsilon}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&+\iint_{\partial G-\varepsilon}p(\boldsymbol{r}')\left[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n}-\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{5.5.2c}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\begin{aligned}0=&\int_{G}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&+P\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'\\&-\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\varepsilon}p(\boldsymbol{r}')\left[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{5.5.2d}$$

上式中最后一个面积分在半球面 (三维情况) 或半圆 (二维情况) 上进行.

**二维情况** 半圆周长为 $\pi\varepsilon$, 而由式 (3.3.39b)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{2\pi p(\boldsymbol{r}')}\ln\varepsilon \tag{5.5.3a}$$

其中 $\varepsilon=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\equiv R$, 于是 (注意：二维情况下为线积分)

$$\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{\varepsilon}p(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S'=-\frac{1}{2}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial R}\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\ln\varepsilon=0 \tag{5.5.3b}$$

而由式 (3.3.37a)

$$p(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g}{\partial R}\cdot2\pi\varepsilon\,|_{\varepsilon\to0}\,=-1 \tag{5.5.4a}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{\varepsilon}p(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S'&=\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{\varepsilon}p(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial R}\mathrm{d}S'\\&=-\psi(\boldsymbol{r}_s)\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\cdot\pi\varepsilon=-\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{r}_s)\end{aligned} \tag{5.5.4b}$$

把式 (5.5.3b) 和 (5.5.4b) 代入方程 (5.5.2d) 得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{r}_s)=&\int_G g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&+P\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{5.5.4c}$$

**三维情况** 半球面积为 $2\pi\varepsilon^2$, 而由式 (3.3.39c) 和 (3.3.38a)

$$\lim_{\varepsilon\to0}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi p(\boldsymbol{r}')}\cdot\frac{1}{\varepsilon};\ \ p(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g}{\partial R}\ 4\pi\varepsilon^2\Big|_{\varepsilon\to0}=-1 \tag{5.5.5a}$$

相应地, 式 (5.5.3b) 和 (5.5.4b) 变成

$$\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{\varepsilon}p(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S'=\frac{1}{2}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial R}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2=0 \tag{5.5.5b}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{\varepsilon}p(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S'&=\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{\varepsilon}p(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial R}\mathrm{d}S'\\&=-\psi(\boldsymbol{r}_s)\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\cdot2\pi\varepsilon^2=-\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{r}_s)\end{aligned} \tag{5.5.5c}$$

故方程 (5.5.4c) 同样成立! 因此, 在二或三维情况, 式 (5.5.2a) 和 (5.5.4c) 可以统一写成

$$\begin{aligned}&P\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'\\&+\int_G g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'=\begin{cases}\psi(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in G\\ \dfrac{1}{2}\psi(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in\partial G\end{cases}\end{aligned} \tag{5.5.5d}$$

上式称为 **Kirchhoff 积分公式**, 它把区域 $G$ 内任意一点 $\boldsymbol{r}$ 的场用包含该点的曲面 $\partial G$ 上的面积分来表示.

**边界存在尖角情况**　必须指出的是, 当 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_s$(即 $\boldsymbol{r}\in\partial G$) 时, 我们假定可以用小的半球 (三维情况) 或者小的半圆 (二维情况) 包围或者排除 $\boldsymbol{r}_s$ 点, 意味着边界是光滑的曲面或者曲线. 如果边界上存在角点 $P$, 则在角点上, 方程 (5.5.5d) 右边的 1/2 必须修改.

考虑简单的二维情形, 如图 5.5.2(a), 边界上有尖角点 $\boldsymbol{r}_P$, 尖角向区域外突出. 假定观察点 $\boldsymbol{r}$ 趋近 $\boldsymbol{r}_P$, 现在不能用半圆, 只能取一段弧线把点 $\boldsymbol{r}_P$ 排除在 $G$-$\varepsilon$ 区域内, 弧线长度为 $l_\varepsilon=\varepsilon\vartheta(P)$(其中 $\vartheta(P)$ 为尖角的夹角弧度). 于是, 式 (5.5.6a) 修改成

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{l_\varepsilon}p(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S'&=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{l_\varepsilon}p(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial R}\mathrm{d}S'\\&=-\psi(\boldsymbol{r}_P)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\cdot\varepsilon\vartheta(P)=-\frac{1}{2\pi}\vartheta(P)\psi(\boldsymbol{r}_P)\end{aligned}\tag{5.5.6a}$$

对尖角向区域内突的情况, 定义尖角的夹角 $\vartheta(P)$ 如图 5.5.2(b), 则同样可以得到式 (5.5.6a). 于是, Kirchhoff 积分公式 (5.5.5d) 必须修改成

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'+\int_G g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&\qquad=\begin{cases}\psi(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in G\\ \dfrac{1}{2}C(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in\partial G\end{cases}\end{aligned}\tag{5.5.6b}$$

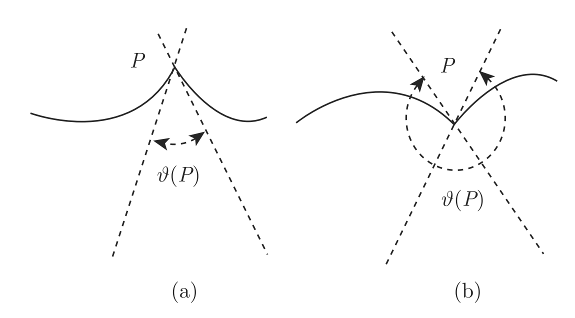



图 5.5.2　$P$ 点为尖角: (a) 尖角向区域外; (b) 尖角向区域内

式中 $C(\boldsymbol{r})$ 与边界的形状有关：对尖角点 $P$, $C(P)=\vartheta(P)/\pi$; 而对光滑边界点 $C(\boldsymbol{r})=1$ (相当于 $\vartheta(P)=\pi$).

对三维情况, 不难得到 $C(\boldsymbol{r})$ 的表达式: 对尖角点 $P$, $C(P)=\Theta(P)/2\pi$(其中 $\Theta(P)$ 为尖角所张的立体角); 而对光滑边界点 $C(\boldsymbol{r})=1$(相当于 $\Theta(P)=2\pi$).

对一般的算子 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$, 基本解 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是未知的. 只有当 $p(\boldsymbol{r})=1$ 和 $q(\boldsymbol{r})=0$(Laplace 算子) 或者 $q(\boldsymbol{r})=-k_0^2$(常数, Helmholtz 算子):

(1) 二、三维 Helmholtz 算子的基本解分别为

$$
\begin{aligned}
g_{2d}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\\
g_{3d}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}
\end{aligned}
\tag{5.5.7a}
$$

(2) 二、三维 Laplace 算子的基本解分别为

$$
\begin{aligned}
g_{2d}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\\
g_{3d}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}
\end{aligned}
\tag{5.5.7b}
$$

**外边值问题** 设考虑的区域是 $G$ 的外部区域 $\bar{G}$, 外边值问题为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}(\psi)\equiv-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla\psi]+q(\boldsymbol{r})\psi=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\bar{G}\\
&\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=b(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}\in\partial G
\end{aligned}
\tag{5.5.8a}
$$

取以原点为中心、半径为 $R$ 的大球 $V_R$(二维情况为大圆) 包含 $G$, 在大球表面 $S_R$ 与 $G$ 的边界 $\partial G$ 包围的有限区域 $V_R$-$G$ 内使用 Green 公式

$$
\begin{aligned}
&\int_{V_R-G}[\psi(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{L}'g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})-g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\boldsymbol{L}'\psi(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}\tau'\\
&=\iint_{S_R+\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'
\end{aligned}
\tag{5.5.8b}
$$

当 $R\to\infty$ 时, 区域 $V_R$-$G$ 就是 $\bar{G}$, 如果

$$
\lim_{R\to\infty}\iint_{S_R}p(\boldsymbol{r}')\left[g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'=0
\tag{5.5.8c}
$$

则式 (5.5.8b) 变成

$$
\begin{aligned}
&\int_{\bar{G}}[\psi(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{L}'g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})-g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\boldsymbol{L}'\psi(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}\tau'\\
&=\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'_S}-g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\right]\mathrm{d}S'
\end{aligned}
\tag{5.5.9a}
$$

注意：对内边值问题，在边界 $\partial G$ 上区域的法向与 $G$ 表面的法向是一致的；而对外边值问题，在边界 $\partial G$ 上区域的法向 $\boldsymbol{n}'$ 与 $G$ 表面的法向 $\boldsymbol{n}'_S$ 相反，即 $\boldsymbol{n}' = -\boldsymbol{n}'_{\boldsymbol{S}}$(见图 5.5.4 所示)，上式中已经用 $\boldsymbol{n}'_S$ 表示. 于是，Kirchhoff 积分公式修改为

$$P\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}')\left[\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S} - g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\right]\mathrm{d}S' + \int_{\bar{G}} g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$
$$= \begin{cases} \psi(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r} \in \bar{G} \\ \dfrac{1}{2}C(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r} \in \partial G \end{cases} \tag{5.5.9b}$$

注意：对外部区域 $\bar{G}$ 而言，图 5.5.2(a) 的情形反而是尖角向区域内了，而图 5.5.2(b) 反之. 为了方便，以后的讨论都假定是光滑边界，取 $C(\boldsymbol{r}) = 1$.

下面讨论式 (5.5.8c) 的意义. 为了简单，仅考虑 Possion 方程 (Helmholtz 方程已在 1.3.4 小节详细讨论)：

(1) 三维 Possion 方程，当 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \to \infty$ 时，$\mathrm{d}S' \to R^2\mathrm{d}\varOmega$(其中 $\mathrm{d}\varOmega$ 是面元 $\mathrm{d}S'$ 所张的立体角)，而由方程 (5.5.7b) 的第二式，$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \to 1/R$ 和 $|\nabla g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')| \to 1/R^2$，故为了保证式 (5.5.8c) 成立，必须要求 $|\psi(\boldsymbol{r}')| \to 1/R$ 和 $|\nabla\psi(\boldsymbol{r}')| \to 1/R^2$；

(2) 二维 Possion 方程：当 $R \to \infty$ 时，$\mathrm{d}S' \to R\mathrm{d}\varphi$(其中 $\mathrm{d}\varphi$ 是线元 $\mathrm{d}S'$ 的张角)，而由方程 (5.5.7b) 的第一式，$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \to -\ln R/2\pi$ 和 $|\nabla g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')| \to R/2\pi$，显然它们都是趋向无限大，为了保证式 (5.5.8c) 成立，只能要求 $\psi(\boldsymbol{r}') \to -\ln R/2\pi$，使式 (5.5.8c) 中括号内的积分为零.

因此，无限远处增加的边界条件为

(1) 对 Helmholtz 方程，即为 Sommerfeld 辐射条件，在 7.4.2 小节中，我们将进一步讨论方程 (5.5.8c) 成立的条件，给出严格的证明；

(2) 对三维 Possion 方程，要求 $\psi(\boldsymbol{r})$ 在无限远处衰减足够快，即要求 $\psi(\boldsymbol{r}) \to 1/|\boldsymbol{r}|$ 和 $|\nabla\psi(\boldsymbol{r})| \to 1/|\boldsymbol{r}|^2$；

(3) 对二维 Possion 方程，要求 $\psi(\boldsymbol{r}) \to -\ln|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/2\pi$ 足够快.

### 5.5.2　位势问题的边界元近似

我们以二维 Laplace 方程的边值问题为例来说明边界元近似的基本思路. 考虑边值问题

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = 0,\ (x,y) \in G$$
$$\psi(x,y) = \psi_0(x,y),\ (x,y) \in \partial G_1 \tag{5.5.10a}$$
$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial n} = b(x,y),\ (x,y) \in \partial G_2$$

其中边界 $\partial G$ 分成不相交的二部分：$\partial G = \partial G_1 + \partial G_2$, 在 $\partial G_1$ 上函数值 $\psi_0(x,y)$ 已知, 在 $\partial G_2$ 上法向导数 $b(x,y)$ 已知. 由方程 (5.5.7b) 的第一式和式 (5.5.6b), 边界积分方程为

$$\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{r}) = \iint_{\partial G} [\chi(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) - \psi(\boldsymbol{r}')\tilde{g}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)]\,\mathrm{d}S',\ \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{5.5.10b}$$

其中为了方便, 令

$$\chi(\boldsymbol{r}') = \frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} \tag{5.5.10c}$$

为边界法向导数的值 (在 $\partial G_1$ 上未知, 在 $\partial G_2$ 上已知), 以及 (为了方便)

$$\tilde{g}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \equiv \frac{\partial g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{\partial n'} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n'}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{5.5.10d}$$

如图 5.5.3, 把边界分割成 $N$ 个边界单元 $\Gamma_j$, $(j=1,2,\cdots,N)$(在光滑边界情况, 相当于用一系列直线段来代替边界曲线), 其中 $N_1$ 个属于 $\partial G_1$, $N_2$ 个属于 $\partial G_2$, 总单元数 $N = N_1 + N_2$. 对单元 $\Gamma_j$, 如果定义二个端点为结点, 类似于有限元近似, 可以用一次插值函数来表示单元 $\Gamma_j$ 上的函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和法向导数 $\chi(\boldsymbol{r})$, 称为一次单元. 为了说明边界元近似的基本思路, 我们采用最简单的近似, 即所谓的零次单元：取单元 $\Gamma_j$ 上的平均值 $\psi_j$ 和 $\chi_j$ 来代替单元 $\Gamma_j$ 上的函数分布 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和法向导数 $\chi(\boldsymbol{r})$. 于是对单元 $\Gamma_i$, 方程 (5.5.10b) 简化为

$$\frac{1}{2}\psi_i + \sum_{j=1}^{N}\psi_j\int_{\Gamma_j}\tilde{g}(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}\Gamma' = \sum_{j=1}^{N}\chi_j\int_{\Gamma_j}g(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}\Gamma' \tag{5.5.11a}$$

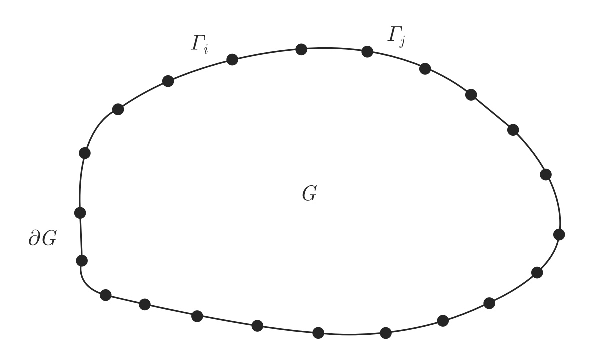



图 5.5.3 把边界分割成 $N$ 个单元

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 可取为单元 $\Gamma_i$ 的中心点坐标. 令

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{ij} &\equiv \int_{\Gamma_j}\tilde{g}(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}\Gamma' = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_j}\frac{\partial}{\partial n'}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\Gamma' \\ G_{ij} &\equiv \int_{\Gamma_j}g(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}\Gamma' = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_j}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\Gamma'\end{aligned} \tag{5.5.11b}$$

注意: $|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|$ 是边界点 $\boldsymbol{r}_i$ 到边界点 $\boldsymbol{r}'$ 的距离. 上式代入方程 (5.5.11a) 得到

$$\sum_{j=1}^{N}\psi_j H_{ij}=\sum_{j=1}^{N}\chi_j G_{ij},\ (i=1,2,\cdots,N) \tag{5.5.11c}$$

其中 $H_{ij}=\tilde{H}_{ij}+\delta_{ij}/2$. 显然, $H_{ij}$ 和 $G_{ij}$ 的计算尽管较复杂, 但它们是已知的. 上式中, 位于边界 $\partial G_1$ 的 $\psi_j$ 是已知的, 而 $\chi_j$ 未知, 有 $N_1$ 个未知量; 位于边界 $\partial G_2$ 的 $\chi_j$ 是已知的, 而 $\psi_j$ 未知, 有 $N_2$ 个未知量. 因此, 共计 $N_1+N_2=N$ 个未知量, 恰好有 $N$ 个方程!

设边界单元 $\Gamma_j$, $(j=1,2,\cdots,N_1)$ 位于边界 $\partial G_1$, 而边界单元 $\Gamma_j$, $(j=N_1+1,N_1+2,\cdots,N)$ 位于边界 $\partial G_2$, 把未知量全部移到方程 (5.5.11c) 的左边, 而把已知量全部移到方程 (5.5.11c) 的右边, 得到

$$-\sum_{j=1}^{N_1}\chi_j G_{ij}+\sum_{j=N_1+1}^{N}\psi_j H_{ij}=\sum_{j=N_1+1}^{N}\chi_j G_{ij}-\sum_{j=1}^{N_1}\psi_j H_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{5.5.12a}$$

上式写成矩阵的形式为

$$\boldsymbol{A}x=f \tag{5.5.12b}$$

其中未知列矢量

$$x=[\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_{N_1},\psi_{N_1+1},\psi_{N_1+2},\cdots,\psi_N]^{\mathrm{T}} \tag{5.5.13a}$$

即前 $N_1$ 个为 $\chi_j$, $(j=1,2,\cdots,N_1)$, 后 $N_2$ 个为 $\psi_j$, $(j=N_1+1,N_1+2,\cdots,N)$. 非齐次列矢量 $f$ 的矩阵元为

$$f_i\equiv\sum_{j=N_1+1}^{N}\chi_j G_{ij}-\sum_{j=1}^{N_1}\psi_j H_{ij},\ (i=1,2,\cdots,N) \tag{5.5.13b}$$

而系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵元 $a_{ij}$ 为

$$\begin{aligned}&a_{ij}=-G_{ij},\ (i=1,2,\cdots,N;j=1,2,\cdots,N_1)\\&a_{ij}=H_{ij},\ (i=1,2,\cdots,N;j=N_1+1,N_1+2,\cdots,N)\end{aligned} \tag{5.5.13c}$$

一旦从方程 (5.5.12b) 求得诸未知量, 就可以求区域 $G$ 内 $\boldsymbol{r}_i$ 点的场

$$\psi(\boldsymbol{r}_i)=\iint_{\partial G}[\chi(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)-\psi(\boldsymbol{r}')\tilde{g}(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)]\,\mathrm{d}S',\ \boldsymbol{r}_i\in G \tag{5.5.14a}$$

离散化后为

$$\psi(\boldsymbol{r}_i) = \sum_{j=1}^{N} \psi_j G_{ij} - \sum_{j=1}^{N} \chi_j \tilde{H}_{ij} \tag{5.5.14b}$$

其中 $\tilde{H}_{ij}$ 和 $G_{ij}$ 仍然由式 (5.5.11b) 表示, 但 $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}'|$ 修改为 $G$ 内 $\boldsymbol{r}_i$ 点到边界点 $\boldsymbol{r}'$ 的距离.

显然, 上述推导过程同样适合三维情况, 只要把边界单元 $\Gamma_j$, $(j = 1, 2, \cdots, N)$ 理解为一系列平面, 而基本解取方程 (5.5.7b) 的第二式. 以上就是利用边界元近似求解边值问题式 (5.5.10a) 的基本过程, 对涉及的边界积分 (系数 $H_{ij}$ 和 $G_{ij}$) 不作进一步的介绍, 请参考关于边界元方法的专著.

### 5.5.3 Helmholtz 方程的外边值问题

考虑二维或者三维标量波 (例如声波) 的辐射问题, 即 Helmholtz 方程的外边值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r}) \equiv -(\nabla^2 + k_0^2)\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in \bar{G} \\ \left.\frac{\partial \psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G_1} = 0;\quad \left.\frac{\partial \psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G_2} = v_n(\boldsymbol{r})\end{gathered} \tag{5.5.15a}$$

其中 $k_0$ 为常数, $\bar{G}$ 是 $G$ 的外部, 如图 5.5.4, $\partial G = \partial G_1 + \partial G_2$ 是 $G$ 的边界. 空间一点的场 $\psi(\boldsymbol{r})$ 由体源 $f(\boldsymbol{r})$ 和边界上的面源 $v_n(\boldsymbol{r})$ 产生. 由方程 (5.5.9b) 得到

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r}) = & \int_{\bar{G}} g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') f(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau' - \iint_{\partial G} g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') v_n(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}S' \\ & + \iint_{\partial G} \psi(\boldsymbol{r}') \frac{\partial g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'_S} \mathrm{d}S',\ \boldsymbol{r} \in \bar{G}\end{aligned} \tag{5.5.15b}$$

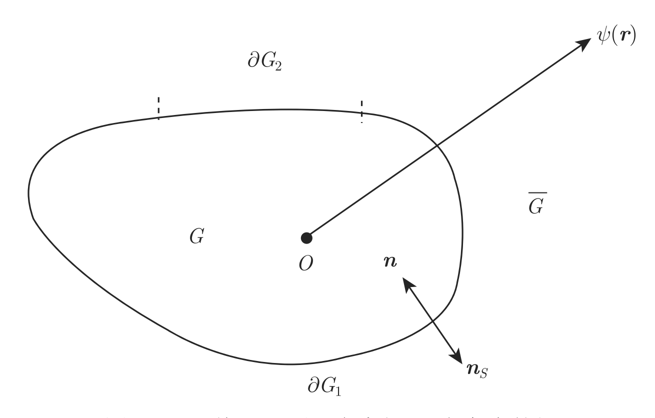



图 5.5.4　体源和面源在空间 $\boldsymbol{r}$ 点产生的场

其中基本解 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 由式 (5.5.7a) 决定. 上式的物理意义很明显：右边第一、二项分别是体源和表面源对空间 $\boldsymbol{r}$ 点声场的贡献 (称为直达声), 第三项是体源和面源辐射的场经边界 $\partial G$ 散射后, 对 $\boldsymbol{r}$ 点场的贡献. 当 $\boldsymbol{r}$ 趋近边界点时, 方程 (5.5.15b) 变成

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{r})=&\int_{\bar{G}}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'-\iint_{\partial G_2}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')v_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\\&+\iint_{\partial G}\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\mathrm{d}S',\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{aligned}\tag{5.5.15c}$$

显然, 上式是边界上 $\psi(\boldsymbol{r})|_{\partial G}$ 的二维或三维第二类 Fredholm 积分方程, 可用边界元近似求解, 一旦得到 $\psi(\boldsymbol{r})|_{\partial G}$, 再代入方程 (5.5.15b) 右边的面积分中, 就可以得到空间 $\boldsymbol{r}$ 点的场.

与图 5.5.3 类似, 把边界分割成 $N$ 个边界单元 $\Gamma_j$, $(j=1,2,\cdots,N)$. 不同的是, 方程 (5.5.15a) 中边界上的法向导数是已知的, 仅需求边界上的函数值. 采用零次单元, 取单元 $\Gamma_j$(二维情况取为直线段, 三维情况取为平面) 上的平均值 $\psi_j$ 来代替单元 $\Gamma_j$ 上的函数分布 $\psi(\boldsymbol{r})$. 于是, 对单元 $\Gamma_i$, 方程 (5.5.15c) 简化为

$$\sum_{j=1}^{N}H_{ij}\psi_j=f_i\tag{5.5.16a}$$

其中 $H_{ij}\equiv\delta_{ij}/2-\tilde{H}_{ij}$ 以及

$$\begin{aligned}&\tilde{H}_{ij}\equiv\int_{\Gamma_j}\tilde{g}(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}S'=\int_{\Gamma_j}\frac{\partial g(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)}{\partial n'_S}\mathrm{d}S'\\&f_i\equiv\int_{\bar{G}}g(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'-\iint_{\partial G_2}g(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)v_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{5.5.16b}$$

其中基本解 $g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 由式 (5.5.7a) 表示. 上式中 $f_i$ 的面积分部分可离散化为

$$\iint_{\partial G_2}g(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)v_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\approx\sum_{j=N_1+1}^{N}v_n(\boldsymbol{r}_j)\iint_{\Gamma_j}g(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}S'\tag{5.5.16c}$$

其中 $v_n(\boldsymbol{r}_j)$ 是边界元 $\Gamma_j$, $(j=N_1+1,N_1+2,\cdots,N)$ 上的平均值, 或者取边界元 $\Gamma_j$ 中心点的值. 式 (5.5.16b) 中 $f_i$ 的体积分部分离散化的方法为：设 $f(\boldsymbol{r})$ 仅在有限区域 $\Omega$ 内非零, 可以把 $\Omega$ 离散化成 $M$ 个不相交的子区域 $e_j$, $(j=1,2,\cdots,M)$

$$\int_{\bar{G}}g(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'=\sum_{j=1}^{M}f(\boldsymbol{r}_j)\int_{e_j}g(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}\tau'\tag{5.5.16d}$$

注意: $|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|$ 是边界点 $\boldsymbol{r}_i$ 到区域 $\Omega$ 内点 $\boldsymbol{r}'$ 的距离. 一旦从方程 (5.5.16a) 求得边界上单元 $\Gamma_j$ 的场量 $\psi_j$, 由方程 (5.5.15b) 就可以得到空间任意一点 $\boldsymbol{r}$ 的场

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r})=&\sum_{j=1}^{M}f(\boldsymbol{r}_j)\int_{e_j}g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|)\mathrm{d}\tau''-\sum_{j=N_1+1}^{N}v_n(\boldsymbol{r}_j)\iint_{\Gamma_j}g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}S'\\&+\sum_{j=1}^{N}\psi_j\iint_{\Gamma_j}\frac{\partial g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{\partial n'_S}\mathrm{d}S',\ \boldsymbol{r}\in\bar{G}\end{aligned}\tag{5.5.17a}$$

其中 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|$ 是空间任意一点 $\boldsymbol{r}$ 到体源区域 $\Omega$ 内点 $\boldsymbol{r}''$ 的距离, $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 是空间任意一点 $\boldsymbol{r}$ 到边界 $\partial G$ 点 $\boldsymbol{r}'$ 的距离. 如果体源 $f(\boldsymbol{r}_j)\equiv 0$, 则上式简化为

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_{j=1}^{N}\psi_j\iint_{\Gamma_j}\frac{\partial g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{\partial n'_S}\mathrm{d}S'-\sum_{j=N_1+1}^{N}v_n(\boldsymbol{r}_j)\iint_{\Gamma_j}g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}S'\quad(\boldsymbol{r}\in\bar{G})\tag{5.5.17b}$$

**散射问题** 显然, 只要式 (5.5.15c) 中取 $v_n(\boldsymbol{r}')=0$ 和 $\psi_i(\boldsymbol{r})\equiv\int_{\bar{G}}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$, 就可以得到方程 (5.1.16c), 故求解散射问题的过程与上述求解辐射问题的过程类似, 只要取方程 (5.5.16a) 中 $f_i=\psi_i(\boldsymbol{r})$.

注意：在考虑声的辐射和散射等外边值问题中, 利用积分方程 (5.1.16c) 或 (5.5.15c) 进行边界元计算时, 在某些 $k_0$ 值 (即某些频率点), 方程的解不唯一, 其来源在于 5.3.2 小节讨论的 Fredholm 择一定理, 即在某些 $k_0$ 值, 齐次方程

$$\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{r})=\iint_{\partial G}\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\mathrm{d}S',\ \boldsymbol{r}\in\partial G\tag{5.5.17c}$$

存在非零解. 存在多种克服该问题的方法, 这里不作进一步的介绍.

**高次单元** 与 4.4.2 小节的有限元近似类似, 对三维问题, 把边界曲面分割成 $M$ 个单元 $\Gamma_e$, $(e=1,2,\cdots,M)$, 每个单元包含 $P$ 个结点 (注意：设共有 $N$ 个结点, 则 $N<M\cdot P$, 相邻的单元可能有同一个结点 — 与有限元中类似). 于是, 与方程 (4.4.13b) 类似 (不同的是, 这里在边界曲面上进行插值运算), 曲面上的函数和法向导数可用插值函数 $N_\nu^e(\boldsymbol{r}')$ 表示为

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r}')&=\sum_{e=1}^{M}\psi^e(\boldsymbol{r}')=\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\psi_\nu^eN_\nu^e(\boldsymbol{r}')\\\chi(\boldsymbol{r}')&=\sum_{e=1}^{M}\chi^e(\boldsymbol{r}')=\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\chi_\nu^eN_\nu^e(\boldsymbol{r}')\end{aligned}\tag{5.5.18a}$$

其中 $\chi(\boldsymbol{r}')=\partial\psi(\boldsymbol{r}')/\partial n'_S$ 为法向导数 (注意: 对函数和法向导数同时插值), 上式代入边界方程 (5.5.9b)(为了方便, 取体源 $f(\boldsymbol{r}')=0$), 即

$$\frac{1}{2}C(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})=\iint_{\partial G}\left[\psi(\boldsymbol{r}')\tilde{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\chi(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \tag{5.5.18b}$$

其中 $\tilde{g}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\equiv\partial g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)/\partial n'_S$, 得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})=\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\bigg[&\psi_\nu^e\iint_{\partial G}N_\nu^e(\boldsymbol{r}')\tilde{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\\&-\chi_\nu^e\iint_{\partial G}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')N_\nu^e(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\bigg]\end{aligned} \tag{5.5.18c}$$

由于 $N_\nu^e(\boldsymbol{r}')$ 只有在单元 $\Gamma_e$ 上才非零, 故上式简化为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})=\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\bigg[&\psi_\nu^e\iint_{\Gamma_e}N_\nu^e(\boldsymbol{r}')\tilde{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\\&-\chi_\nu^e\iint_{\Gamma_e}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')N_\nu^e(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\bigg]\end{aligned} \tag{5.5.18d}$$

上式在每个结点处取值

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C(\boldsymbol{r}_j)\psi(\boldsymbol{r}_j)=\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\bigg[&\psi_\nu^e\iint_{\Gamma_e}N_\nu^e(\boldsymbol{r}')\tilde{g}(\boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\\&-\chi_\nu^e\iint_{\Gamma_e}g(\boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{r}')N_\nu^e(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\bigg]\end{aligned} \tag{5.5.19a}$$

其中 $\boldsymbol{r}_j$, $(j=1,2,\cdots,N)$ 是每个结点的坐标, 共有 $N$ 个结点. 由于 $N<M\cdot P$, 上式右边包含的 $M\cdot P$ 个结点值 $\psi_\nu^e$ 和 $\chi_\nu^e$ 并不完全独立, 必须把重复的结点 $\psi_\nu^e$ 和 $\chi_\nu^e$ 重新组合, 于是得到

$$\frac{1}{2}C(\boldsymbol{r}_j)\psi_j=\sum_{q=1}^{N}(\tilde{A}_{jq}\psi_q-B_{jq}\chi_q)\quad(j=1,2,\cdots N) \tag{5.5.19b}$$

其中 $\tilde{A}_{jq}$ 和 $B_{jq}$ 分别是 $\iint_{\Gamma_e}N_\nu^e(\boldsymbol{r}')\tilde{g}(\boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'$ 和 $\iint_{\Gamma_e}g(\boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{r}')N_\nu^e(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'$ 重新组合后的值, $\psi_j\equiv\psi(\boldsymbol{r}_j)$ 和 $\chi_j\equiv\chi(\boldsymbol{r}_j)$ 是结点处的函数和法向导数值. 方程 (5.5.19b) 写成

$$\sum_{q=1}^{N}A_{jq}\psi_q=\sum_{q=1}^{N}B_{jq}\chi_q,\ (j=1,2,\cdots N) \tag{5.5.19c}$$

其中 $A_{jq} \equiv \tilde{A}_{jq} - C(\boldsymbol{r}_j)\delta_{jq}/2$. 设 $N_1$ 个结点 $\boldsymbol{r}_j$, $(j=1,2,\cdots,N_1)$ 位于边界 $\partial G_1$, 函数值未知, 法向导数已知；$N_2$ 个结点 $\boldsymbol{r}_j$, $(j=N_1+1,N_1+2,\cdots,N)$ 位于边界 $\partial G_2$, 函数值已知, 法向导数未知, 则方程 (5.5.19c) 重新排列成

$$\sum_{q=1}^{N_1} A_{jq}\psi_q - \sum_{q=N_1+1}^{N} B_{jq}\chi_q = \sum_{q=1}^{N_1} B_{jq}\chi_q - \sum_{q=N_1+1}^{N} A_{jq}\psi_q \quad (j=1,2,\cdots,N) \tag{5.5.19d}$$

于是可以得到决定 $N$ 个未知量的方程. 注意：对方程 (5.5.15a), 法向导数在边界 $\partial G_1$ 和 $\partial G_2$ 都已知, 方程 (5.5.19c) 无需调整.

由上讨论可见, 高次单元较为复杂, 但能够提高计算的精度.

### 5.5.4 时域边界元近似

对时间演化问题, 边界元近似有三种主要的处理方法：时域差分法、变换法和直接方法.

**时域差分法** 对时间变量作差分近似, 转化成边值问题. 为了简单, 以热扩散方程为例, 考虑混合问题

$$\begin{gathered}-\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = 0,\ t>0,\ \boldsymbol{r}\in G \\ \psi(\boldsymbol{r},t)|_{t=0} = \psi_0(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered} \tag{5.5.20a}$$

边界条件为

$$\begin{gathered}\psi(\boldsymbol{r},t)|_{\partial G_1} = A(\boldsymbol{r},t),\ t>0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1 \\ \left.\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}\right|_{\partial G_2} = B(\boldsymbol{r},t),\ t>0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G_2\end{gathered} \tag{5.5.20b}$$

对时间变量作差分近似

$$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \approx \frac{\psi(\boldsymbol{r},t+\Delta t) - \psi(\boldsymbol{r},t)}{\Delta t} \tag{5.5.21a}$$

其中 $\Delta t$ 为时间间隔. 于是, 扩散方程近似为

$$-\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t+\Delta t) + \frac{\psi(\boldsymbol{r},t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{\psi(\boldsymbol{r},t)}{\Delta t} = 0 \tag{5.5.21b}$$

定义基本解

$$-\nabla^2 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\Delta t) + \frac{g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\Delta t)}{\Delta t} = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{5.5.21c}$$

由式 (3.3.45a) 和 (3.3.46c) 的第一式, 基本解为

**二维问题**

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\Delta t) = \frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{\sqrt{\Delta t}}\right) \tag{5.5.22a}$$

**三维问题**

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\Delta t)=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{\sqrt{\Delta t}}\right)\tag{5.5.22b}$$

方程 (5.5.1b) 中取 $\psi(\boldsymbol{r}')=\psi(\boldsymbol{r}',t+\Delta t)$, $g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})=g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\Delta t)$, $p(\boldsymbol{r}')=1$ 和 $\boldsymbol{L}'=-\nabla'^2+1/\Delta t$ 得到

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r},t+\Delta t)=&\frac{1}{\Delta t}\int_G g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\Delta t)\psi(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau'\\&+\iint_{\partial G}[g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\Delta t)\chi(\boldsymbol{r}',t+\Delta t)-\psi(\boldsymbol{r}',t+\Delta t)\tilde{g}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\Delta t)]\,\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{5.5.22c}$$

其中 $\boldsymbol{r}\in G$, 以及

$$\tilde{g}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\Delta t)\equiv\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\Delta t)}{\partial n'};\ \chi(\boldsymbol{r}',t+\Delta t)\equiv\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}',t+\Delta t)}{\partial n'}\tag{5.5.22d}$$

故边界积分方程为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},t+\Delta t)=&\frac{1}{\Delta t}\int_G g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\Delta t)\psi(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau'\\&+\iint_{\partial G}[g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\Delta t)\chi(\boldsymbol{r}',t+\Delta t)-\psi(\boldsymbol{r}',t+\Delta t)\tilde{g}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\Delta t)]\,\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{5.5.23a}$$

其中 $\boldsymbol{r}\in\partial G$. 当取 $t=0$ 时, 利用初始条件 $\psi(\boldsymbol{r}',0)=\psi_0(\boldsymbol{r}')$, 上式变成

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},\Delta t)=&\frac{1}{\Delta t}\int_G g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\Delta t)\psi_0(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&+\iint_{\partial G}[g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\Delta t)\chi(\boldsymbol{r}',\Delta t)-\psi(\boldsymbol{r}',\Delta t)\tilde{g}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\Delta t)]\,\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{5.5.23b}$$

由 5.5.3 小节介绍的边界元近似, 可以得到区域 $G$ 内任意一点的场 $\psi(\boldsymbol{r},\Delta t)$; 然后再取 $t=\Delta t$, 得到区域 $G$ 内任意一点的场 $\psi(\boldsymbol{r},2\Delta t)$, 等等.

**Laplace 变换法**　对 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 的时间变量作 Laplace 变换

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{r},s)=\boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r},t)=\int_0^\infty\psi(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\tag{5.5.24a}$$

时间微分的 Laplace 变换为

$$\boldsymbol{L}\left[\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right]=s\hat{\psi}(\boldsymbol{r},s)-\psi(\boldsymbol{r},0)=s\hat{\psi}(\boldsymbol{r},s)-\psi_0(\boldsymbol{r})\tag{5.5.24b}$$

方程 (5.5.20a) 变成 (注意：通过 Laplace 变换, 初始条件自动进入方程)

$$-\nabla^2\hat{\psi}(\boldsymbol{r},s)+s\hat{\psi}(\boldsymbol{r},s)-\psi_0(\boldsymbol{r})=0,\ \ s>0,\boldsymbol{r}\in G\tag{5.5.25a}$$

边界条件变化为

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{r},s)|_{\partial G_1}=A(\boldsymbol{r},s),\ s>0,\boldsymbol{r}\in\partial G_1$$
$$\left.\frac{\partial\hat{\psi}(\boldsymbol{r},s)}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=B(\boldsymbol{r},s),\ s>0,\boldsymbol{r}\in\partial G_2 \tag{5.5.25b}$$

基本解定义为

$$-\nabla^2 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)+sg(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{5.5.26a}$$

上式与方程 (5.5.21c) 相比, 只要作变换 $1/\Delta t\rightarrow s$ 即可, 于是

**二维问题**

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)=\frac{1}{2\pi}K_0\left(\sqrt{s}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right) \tag{5.5.26b}$$

**三维问题**

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp\left(-\sqrt{s}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right) \tag{5.5.26c}$$

相应的积分方程为

$$\iint_{\partial G}[g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},s)\chi(\boldsymbol{r}',s)-\psi(\boldsymbol{r}',s)\tilde{g}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},s)]\,\mathrm{d}S'$$
$$+\int_G g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},s)\psi_0(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'=\begin{cases}\hat{\psi}(\boldsymbol{r},s), & \boldsymbol{r}\in G\\ \dfrac{1}{2}C(\boldsymbol{r})\hat{\psi}(\boldsymbol{r},s), & \boldsymbol{r}\in\partial G\end{cases} \tag{5.5.27a}$$

其中

$$\tilde{g}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},s)\equiv\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},s)}{\partial n'};\ \chi(\boldsymbol{r}',s)\equiv\frac{\partial\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',s)}{\partial n'} \tag{5.5.27b}$$

对不同的 $s>0$, 利用边界元近似, 在变换空间求得 $\hat{\psi}(\boldsymbol{r},s)$ 后, 再由式 (5.4.32c) 求逆变换就可以得到 $\psi(\boldsymbol{r},t)$.

**直接积分法** 由 3.5.3 小节, 定义 $\boldsymbol{\Pi}$ 和 $\boldsymbol{\Pi}^+$ 的基本解 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 和 $g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$ 满足

$$\boldsymbol{\Pi}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ 0<t<T$$
$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{5.5.28a}$$

和

$$\boldsymbol{\Pi}^+g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ 0<t<T$$
$$g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)|_{t=T}=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{5.5.28b}$$

其中热扩散算子 $\boldsymbol{\Pi}$ 和共轭算子 $\boldsymbol{\Pi}^+$ 定义为

$$\boldsymbol{\Pi}=\frac{\partial}{\partial t}-\nabla^2;\ \boldsymbol{\Pi}^+=-\frac{\partial}{\partial t}-\nabla^2 \tag{5.5.28c}$$

由式 (3.4.28b), 不难得到

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}{4t}\right),\ (t<T) \\
g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) &= \frac{1}{[4\pi(T-t)]^{d/2}}\exp\left[-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}{4(T-t)}\right],\ (t<T)
\end{aligned}
\tag{5.5.28d}
$$

其中对三维问题 $d=3$, 二维问题 $d=2$. 显然由对称性

$$
g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t) \tag{5.5.28e}
$$

方程 (3.5.18c) 中取 $\psi^+ = g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$, 而 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 满足方程 (5.5.20a), 并且注意到 (3.5.22a), 即

$$
\int_{\partial R_T}\rho\psi^*\psi^+\mathrm{d}\tau = \int_{\partial R_T}\rho\psi^* g^+|_{t=T}\mathrm{d}\tau = \psi^*(\boldsymbol{r}',T) \tag{5.5.29a}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
\psi^*(\boldsymbol{r}',T) =& \int_G \psi^*(\boldsymbol{r},0)g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)\mathrm{d}\tau \\
&+\int_0^T\iint_{\partial G}\left[g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\frac{\partial\psi^*}{\partial n} - \psi^*\frac{\partial g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{5.5.29b}
$$

上式求复共轭且交换变量 $\boldsymbol{r}'\leftrightarrow\boldsymbol{r}$, 利用式 (5.5.28d) 得到

$$
\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{r},T) =& \int_G \psi(\boldsymbol{r}',0)g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T)\mathrm{d}\tau' \\
&+\int_0^T\iint_{\partial G} g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t)\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}',t)}{\partial n'}\mathrm{d}S'\mathrm{d}t \\
&-\int_0^T\iint_{\partial G}\psi(\boldsymbol{r}',t)\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t)}{\partial n'}\mathrm{d}S'\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{5.5.29c}
$$

由于 $T$ 的任意性质, 把 $T$ 改成 $t$, 时间积分变量用 $t'$ 表示, 得到积分方程

$$
\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{r},t) =& \int_G \psi(\boldsymbol{r}',0)g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau' \\
&+\int_0^t\iint_{\partial G} g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\chi(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t' \\
&-\int_0^t\iint_{\partial G}\psi(\boldsymbol{r}',t')\tilde{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t'
\end{aligned}
\tag{5.5.30a}
$$

其中 $t>0$ 和 $\boldsymbol{r}\in G$, 以及

$$
\chi(\boldsymbol{r}',t') \equiv \frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}',t')}{\partial n'};\ \tilde{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') \equiv \frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')}{\partial n'} \tag{5.5.30b}
$$

故边界积分方程为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},t) &= \int_G \psi(\boldsymbol{r}',0)g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau' \\ &+\int_0^t \iint_{\partial G} g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\chi(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t' \\ &-\int_0^t \iint_{\partial G} \psi(\boldsymbol{r}',t')\tilde{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')]\mathrm{d}S'\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{5.5.30c}$$

其中 $t>0$ 和 $\boldsymbol{r}\in\partial G$. 注意: 初始条件出现在体积分中.

把边界 $\partial G$ 离散成 $N$ 个单元 $\Gamma_i$, $(i=1,2,\cdots,N)$, 区域 $G$ 离散成 $M$ 个单元 $\Omega_q$, $(q=1,2,\cdots,M)$, 时间步长取为 $\Delta t=t_2-t_1$, 上式离散化成 (取零次插值)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C(\boldsymbol{r}_i)\psi(\boldsymbol{r}_i,t_2) &= \sum_{q=1}^{M}\psi(\boldsymbol{r}_q,t_1)\int_{\Omega_q} g(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}',t_2-t_1)\mathrm{d}\tau' \\ &+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\chi(\boldsymbol{r}_j,t')\iint_{\Gamma_j} g(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}',t_2-t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t' \\ &-\sum_{j=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\psi(\boldsymbol{r}_j,t')\iint_{\Gamma_j} \tilde{g}(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}',t_2-t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{5.5.30d}$$

设时间步长 $\Delta t$ 取得足够小, 在 $\Delta t$ 内, $\chi(\boldsymbol{r}_j,t')$ 和 $\psi(\boldsymbol{r}_j,t')$ 的变化可以忽略, 或者用 $\chi(\boldsymbol{r}_j,t_2)$ 和 $\psi(\boldsymbol{r}_j,t_2)$ 代替, 则上式中对时间的积分可以把 $\chi(\boldsymbol{r}_j,t_2)$ 和 $\psi(\boldsymbol{r}_j,t_2)$ 提出积分号外

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C(\boldsymbol{r}_i)\psi(\boldsymbol{r}_i,t_2) &= \sum_{q=1}^{M}\psi(\boldsymbol{r}_q,t_1)\int_{\Omega_q} g(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}',\Delta t)\mathrm{d}\tau' \\ &+\sum_{j=1}^{N}\chi(\boldsymbol{r}_j,t_2)G_{ij}-\sum_{j=1}^{N}\psi(\boldsymbol{r}_j,t_2)\tilde{H}_{ij}\end{aligned} \tag{5.5.31a}$$

其中

$$\begin{aligned}G_{ij} &\equiv \iint_{\Gamma_j}\int_{t_1}^{t_2} g(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}',t_2-t')\mathrm{d}t'\mathrm{d}S' \\ \tilde{H}_{ij} &\equiv \iint_{\Gamma_j}\int_{t_1}^{t_2} \tilde{g}(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}',t_2-t')\mathrm{d}t'\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{5.5.31b}$$

方程 (5.5.31a) 的讨论与方程 (5.5.11c) 类似, 不再重复. 第一步, 令 $t_1=0$, $t_2=\Delta t$, 求出 $\psi(\boldsymbol{r},t_2)$, 再以此为初始条件, 求 $\psi(\boldsymbol{r},2\Delta t)$, 等等. 注意: 当以 $t_2$ 为初始时刻时,

基本解修改为

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\frac{1}{[4\pi(t-t_2)]^{d/2}}\exp\left[-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}{4(t-t_2)}\right],\ (t_2<t<T) \tag{5.5.31c}$$

**时域波动方程** 考虑波动方程的混合问题

$$\begin{gathered}-\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=f(\boldsymbol{r},t),\ t>0,\boldsymbol{r}\in G\\ \psi(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\psi_0(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\\ \psi_t(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\dot{\psi}_0(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered} \tag{5.5.32a}$$

边界条件为

$$\begin{gathered}\psi(\boldsymbol{r},t)|_{\partial G_1}=A(\boldsymbol{r},t),\ t>0,\boldsymbol{r}\in\partial G_1\\ \left.\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=B(\boldsymbol{r},t),\ t>0,\boldsymbol{r}\in\partial G_2\end{gathered} \tag{5.5.32b}$$

波动算子 $\boldsymbol{\Pi}$ 与共轭算子 $\boldsymbol{\Pi}^+$ 相等, 即

$$\boldsymbol{\Pi}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2=\boldsymbol{\Pi}^+ \tag{5.5.32c}$$

基本解 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},t)$ 和 $g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},t)$ 满足

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ t<T\\ g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)|_{t=0}=0;\ g_t(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\end{gathered} \tag{5.5.33a}$$

和

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi}g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ t<T\\ g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)|_{t=T}=0;\ g_t^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)|_{T=0}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\end{gathered} \tag{5.5.33b}$$

由式 (3.4.32a), 不难得到

$$\begin{gathered}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)\\ g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-(T-t)]\end{gathered} \tag{5.5.33c}$$

故 $g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t)$. 方程 (3.5.27c) 中取 $\psi^+=g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$, 而 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 满足方程 (5.5.32a), 并且注意到 (3.5.29a), 即

$$\int_{\partial R_T}\rho(\psi^+\psi_t^*-\psi^*\psi_t^+)\mathrm{d}\tau=-\psi^*(\boldsymbol{r}',T) \tag{5.5.34a}$$

得到

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_G f^*(\boldsymbol{r},t)g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=&-\psi^*(\boldsymbol{r}',T)\\&-\int_G[g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)\dot{\psi}_0^*(\boldsymbol{r})-\psi_0^*(\boldsymbol{r})g_t^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)]\mathrm{d}\tau\\&-\int_0^T\iint_{\partial G}g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\frac{\partial\psi^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\\&+\int_0^T\iint_{\partial G}\psi^*(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{5.5.34b}$$

上式取复共轭、交换变量 $\boldsymbol{r}'\leftrightarrow\boldsymbol{r}$ 和作替换 $t\to t'$,$T\to t$, 并且利用基本解的对称性 $g^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t)$ 得到

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r},t)=&\int_0^t\int_G f(\boldsymbol{r}',t')g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t'\\&-\int_G[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\dot{\psi}_0(\boldsymbol{r})-\psi_0(\boldsymbol{r})g_t(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)]\mathrm{d}\tau\\&-\int_0^t\iint_{\partial G}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\chi(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t'\\&+\int_0^t\iint_{\partial G}\psi(\boldsymbol{r}',t')\tilde{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t'\end{aligned}\tag{5.5.34c}$$

其中 $t>0$ 和 $\boldsymbol{r}\in G$, 以及

$$\chi(\boldsymbol{r}',t')\equiv\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}',t')}{\partial n'};\ \tilde{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\equiv\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')}{\partial n'}\tag{5.5.34d}$$

故边界积分方程为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},t)=&\int_0^t\int_G f(\boldsymbol{r}',t')g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t'\\&-\int_G[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\dot{\psi}_0(\boldsymbol{r})-\psi_0(\boldsymbol{r})g_t(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)]\mathrm{d}\tau\\&-\int_0^t\iint_{\partial G}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\chi(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t'\\&+\int_0^t\iint_{\partial G}\psi(\boldsymbol{r}',t')\tilde{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}S'\mathrm{d}t'\end{aligned}\tag{5.5.35a}$$

其中 $t>0$ 和 $\boldsymbol{r}\in\partial G$. 余下的讨论与式 (5.5.30c) 的讨论类似, 不再重复.

## 习　题　五

5.1 用迭代法解积分方程

(a) $\psi(x)-\dfrac{1}{2}\int_0^1\psi(y)\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x$;

(b) $\psi(x)+\lambda\int_0^1\mathrm{e}^{x+y}\psi(y)\mathrm{d}y=x$.

5.2 求下列可分解核积分方程的解

(a) $\psi(x)-\lambda\int_0^1 x\mathrm{e}^y\psi(y)\mathrm{d}y=f(x)$;

(b) $\psi(x)-\lambda\int_0^1(x^2y+xy^2)\psi(y)\mathrm{d}y=x$;

(c) $\psi(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x+2y)\psi(y)\mathrm{d}y=\cos x$.

5.3 求方程

$$\psi(x)=\lambda\int_0^l k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y,\ x\in[0,l]$$

的本征值和相应的本征函数, 其中

$$k(x,y)=\begin{cases}x(l-y)/l,\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant l\\ y(l-x)/l,\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant l\end{cases}.$$

5.4 证明齐次方程

$$\psi(x)=\lambda\int_0^{\pi}(\sin x\sin 2y+\sin 3x\sin 4y)\psi(y)\mathrm{d}y$$

只有零解.

5.5 解下列积分方程

(a) $\psi(x)-\lambda\int_0^{\pi}k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y=3,\ x\in[0,\pi]$

其中

$$k(x,y)=\begin{cases}\sin x\cos y,\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant \pi\\ \sin y\cos x,\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant \pi\end{cases};$$

(b) $\psi(x)-\lambda\int_0^{\pi}k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y=\cos\dfrac{\pi x}{l},\ x\in[0,\pi]$

其中

$$k(x,y)=\begin{cases}x(l-y)/l,\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant \pi\\ y(l-x)/l,\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}.$$

5.6 求本征方程

$$\psi(x)=\lambda\int_0^{\pi}k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y,\ x\in[0,\pi]$$

的所有本征值和相应的本征函数, 其中

$$k(x,y)=\begin{cases} x,\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant \pi \\ y,\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant \pi \end{cases}.$$

5.7 解第一类 Fredholm 积分方程

$$\int_0^a k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y=x(a-x),\ 0\leqslant x\leqslant a$$

其中

$$k(x,y)=\begin{cases} \sinh(x-a)\sinh y,\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant a \\ \sinh x\sinh(y-a),\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant a \end{cases}.$$

5.8 考虑本征值问题

$$\boldsymbol{K}u\equiv\int_{-\infty}^{\infty}k(x,y)u(y)\mathrm{d}y=\lambda u(x),\ x\in(-\infty,\infty)$$

积分核为

$$k(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2-2xyt}{1-t^2}\right)$$

其中 $t$ 为参数且 $0<t<1$.

(a) 直接证明 $u_0(x)=\exp(-x^2/2)$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的本征函数, 相应的本征值为 $\lambda_0=\sqrt{\pi}$;

(b) 令

$$u_n(x)=\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)H_n(x),\ (n=0,1,2,\cdots)$$

其中 $H_n(x)$ 为 Hermite 多项式, 用归纳法证明 $u_n(x)$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的本征函数, 相应的本征值为 $\lambda_n=t^n\sqrt{\pi}$;

(c) 证明展开关系

$$k(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n!}u_n(x)u_n(y).$$

5.9 考虑积分-微分算子

$$\boldsymbol{A}u\equiv-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\int_0^1 xyu(y)\mathrm{d}y,\ x\in(0,1)$$

且 $u(x)$ 满足边界条件 $u(0)=u'(1)=0$

(a) 证明 $\boldsymbol{A}$ 是对称的正算子;

(b) 证明非齐次方程

$$\boldsymbol{A}u=f(x),\ x\in(0,1)$$

$$u(0)=u'(1)=0$$

的解为

$$u(x)=\int_0^1\left[g(x,\xi)-\frac{5}{204}(3x-x^3)(3\xi-\xi^3)\right]f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

其中 Green 函数 $g(x,\xi)$ 满足

$$-\frac{\mathrm{d}^2 g(x,\xi)}{\mathrm{d}x^2}=\delta(x-\xi),\ x,\xi\in(0,1)$$

$$g(0,\xi)=g'(1,\xi)=0$$

提示: 非齐次方程可写成

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}=f-x\alpha,\ x\in(0,1);\ \alpha=\int_0^1 yu(y)\mathrm{d}y$$

然后利用 Green 函数求 $u(x)$ 的表达式, 求出 $\alpha$.

5.10 考虑上题中算子的本征值问题 $\boldsymbol{A}u=\lambda u$

(a) 证明上述问题可化为一个纯积分算子的本征值问题;

(b) 证明本征值 $\lambda=\alpha^2$ 满足方程

$$\tan\alpha=\alpha+\frac{\alpha^3}{3}-\alpha^5$$

用图解法解上述方程, 估计最小本征值大小;

(c) 利用

$$\lambda=\frac{\displaystyle\int_0^1(\psi')^2\mathrm{d}x+\left(\int_0^1 x\psi\mathrm{d}x\right)^2}{\displaystyle\int_0^1\psi^2\mathrm{d}x}$$

估计最小本征值大小. 提示: 取满足边界条件的函数 $\psi(x)=x(2-x)$.

5.11 证明具有核函数

$$k(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{x}\exp(-\tau^2)\mathrm{d}\tau\int_y^{\infty}\exp(-\tau^2)\mathrm{d}\tau$$

的积分算子的本征函数为 Hermite 正交函数

$$\psi_n(x)=\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}$$

相应的本征值为 $\lambda_n=2n+2$.

5.12 证明具有核函数

$$k(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{x+y}{2}\right)\int_y^{\infty}\frac{\exp(-\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau\quad(0\leqslant x\leqslant y)$$

的积分算子的本征函数为 Laguerre 正交函数

$$\psi_n(x)=\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\frac{\partial^n}{\partial h^n}\left\{\frac{\exp[-xh/(1-h)]}{1-h}\right\}_{h=0}$$

相应的本征值为 $\lambda_n=n+1$.

# 第 6 章　微扰方法和渐近展开

实际问题能严格求解的情况很少, 因此求近似解具有重要意义. 第四、五章介绍的有限元和边界元就是一种十分有效的求近似解方法, 在数值计算中有重要的应用. 本章讨论当方程中含有小参数 $\varepsilon$ 或大参数 $\lambda$ 时如何求近似解的问题. 主要内容有: 6.1 节讨论本征值问题的微扰以及 Schrödinger 的含时微扰理论; 6.2 节关于正则微扰理论, 介绍变形参数法和多尺度展开, 特别是均质化 (Homogenization) 近似方法; 6.3 节关于奇异微扰问题, 讨论边界层理论及渐近匹配方法; 6.4 节讨论含大参数的微分方程, 介绍 WKB 近似; 最后, 介绍射线近似 (几何光学) 方法.

## 6.1　本征值问题的微扰和含时微扰

本征值的微扰是非常重要的, 在量子力学中, 对应于粒子能级的变化, 而在声学或者电磁场理论中, 对应于系统的共振频率的变化. 假定 Hermite 对称算子 $\boldsymbol{L}_0$ 的本征值问题

$$\boldsymbol{L}_0\psi_n^{(0)}=\lambda_n^{(0)}\rho(\boldsymbol{r})\psi_n^{(0)},\ \boldsymbol{r}\in G$$

$$\left.\left(\alpha\psi_n^{(0)}+\beta\frac{\partial\psi_n^{(0)}}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0 \tag{6.1.1a}$$

严格可解, 其本征函数集 $\{\psi_n^{(0)}\}$ 构成完备的正交、归一系. 上式的微扰可有几种不同的形式: 算子本身的微扰、边界条件的微扰以及区域的微扰. 下面分别以具体例子讨论之.

### 6.1.1　算子本身的微扰：非简并态

设 $\boldsymbol{L}$ 可表示成

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_0+\varepsilon\boldsymbol{L}_1 \tag{6.1.1b}$$

其中 $\varepsilon\ll 1$, 而 $\boldsymbol{L}_1$ 也是 Hermite 对称算子, 因此整个算子 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 对称算子. 假定在微扰 $\varepsilon\boldsymbol{L}_1$ 作用下, 本征函数系 $\{\psi_n^{(0)}\}$ 变成 $\{\psi_n\}$, 相应的本征值 $\{\lambda_n^{(0)}\}$ 变成 $\{\lambda_n\}$. 而且方程 (6.1.1a) 在微扰 $\varepsilon\boldsymbol{L}_1$ 作用下是稳定的, 即当 $\varepsilon\to 0$ 时:$\{\psi_n\}\to\{\psi_n^{(0)}\}$ 和 $\{\lambda_n\}\to\{\lambda_n^{(0)}\}$. 注意：对微分算子, 要求 $\boldsymbol{L}_1$ 的阶数低于 $\boldsymbol{L}_0$, 否则微扰不稳定, 见 6.3 节讨论.

考虑 $\boldsymbol{L}$ 的本征值问题

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}\psi_n=\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})\psi_n,\ \boldsymbol{r}\in G\\&\left(\alpha\psi_n+\beta\frac{\partial\psi_n}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{6.1.1c}$$

上式的第一个方程写成

$$[\boldsymbol{L}_0-\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})]\psi_n=-\varepsilon\boldsymbol{L}_1\psi_n\tag{6.1.2a}$$

算子 $\boldsymbol{L}_0-\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})$ 的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 可用 $\{\psi_j^{(0)}\}$ 展开成

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^{(0)}-\lambda_n}[\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r})\tag{6.1.2b}$$

因此, 方程 (6.1.2a) 变成积分方程

$$\begin{aligned}\psi_n(\boldsymbol{r})&=-\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\varepsilon\boldsymbol{L}_1\psi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\lambda_n-\lambda_j^{(0)}}\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r})\int_G[\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*\boldsymbol{L}_1\psi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\end{aligned}\tag{6.1.3a}$$

因为当 $\varepsilon\to0$ 时, $\lambda_n\to\lambda_n^{(0)}$, 故上式中 $j=n$ 一项单独写出

$$\begin{aligned}\psi_n(\boldsymbol{r})&=\frac{\varepsilon\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})}{\lambda_n-\lambda_n^{(0)}}\int_G[\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*\boldsymbol{L}_1\psi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&\quad+\sum_{j\neq n}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\lambda_n-\lambda_j^{(0)}}\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r})\int_G[\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*\boldsymbol{L}_1\psi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&=c_n\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})+\sum_{j\neq n}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\lambda_n-\lambda_j^{(0)}}\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r})(\psi_j^{(0)},\boldsymbol{L}_1\psi_n)\end{aligned}\tag{6.1.3b}$$

其中

$$c_n=\frac{(\psi_n^{(0)},\varepsilon\boldsymbol{L}_1\psi_n)}{\lambda_n-\lambda_n^{(0)}}\tag{6.1.3c}$$

另一方面, 用 $\psi_n^{(0)}$ 取方程 (6.1.2a) 两边的内积

$$\begin{aligned}-\varepsilon(\psi_n^{(0)},\boldsymbol{L}_1\psi_n)&=(\psi_n^{(0)},[\boldsymbol{L}_0-\lambda_n\rho]\psi_n)\\&=(\psi_n^{(0)},\boldsymbol{L}_0\psi_n)-(\psi_n^{(0)},\lambda_n\rho\psi_n)\end{aligned}\tag{6.1.4a}$$

利用 $\boldsymbol{L}_0$ 的 Hermite 对称性 $(\psi_n^{(0)}, \boldsymbol{L}_0\psi_n) = (\boldsymbol{L}_0\psi_n^{(0)}, \psi_n)$ 得到

$$\begin{aligned}-\varepsilon(\psi_n^{(0)}, \boldsymbol{L}_1\psi_n) &= (\boldsymbol{L}_0\psi_n^{(0)}, \psi_n) - \lambda_n\rho(\psi_n^{(0)}, \psi_n)\\ &= (\lambda_n^0 - \lambda_n)(\rho\psi_n^0, \psi_n)\end{aligned} \tag{6.1.4b}$$

因此, $c_n = (\rho\psi_n^{(0)}, \psi_n)$. 由于 (6.1.2a) 是齐次方程, $\psi_n$ 可乘任意常数, 故总可取 $c_n = 1$. 于是, 从 (6.1.3b) 和 (6.1.4b) 得到

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda_n^{(0)} + \varepsilon(\psi_n^{(0)}, \boldsymbol{L}_1\psi_n)\\ \psi_n &= \psi_n^{(0)} + \varepsilon\sum_{j\neq n}^{\infty}\frac{\psi_j^{(0)}}{\lambda_n - \lambda_j^{(0)}}(\psi_j^{(0)}, \boldsymbol{L}_1\psi_n)\end{aligned} \tag{6.1.4c}$$

上式与 5.3.2 小节的式 (5.3.30a) 完全一致, 我们用不同的方法导出了它们. 当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 上式可用迭代法解之

$$\begin{aligned}\lambda_n &\approx \lambda_n^{(0)} + \varepsilon(\psi_n^{(0)}, \boldsymbol{L}_1\psi_n^{(0)}) + \varepsilon^2\sum_{j\neq n}^{\infty}\frac{|(\psi_j^{(0)}, \boldsymbol{L}_1\psi_n^{(0)})|^2}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_j^{(0)}} + \cdots\\ \psi_n &\approx \psi_n^{(0)} + \varepsilon\sum_{j\neq n}^{\infty}\frac{\psi_j^{(0)}}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_j^{(0)}}(\psi_j^{(0)}, \boldsymbol{L}_1\psi_n^{(0)}) + \cdots\end{aligned} \tag{6.1.4d}$$

显然, 上述讨论只适合于第 $n$ 个本征值 $\lambda_n^{(0)}$ 是非简并情况, 对简并态, 第一个问题就是零级本征函数 $\psi_n^{(0)}$ 如何选择? 此外, 由于微扰的作用, 简并可能消失, 故简并态的微扰在 6.1.2 中专门讨论. 注意：式 (6.1.4d) 中的下标 “$n$” 表示一个指标集.

**例 6.1.1** 考虑平面上矩形区域 $G$ : $[0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi]$ 上第一类边界条件下的本征值问题

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon xy\right)\psi = \lambda\psi,\ (x,y) \in G\\ \psi|_{\partial G} = 0\end{aligned} \tag{6.1.5a}$$

显然 $\boldsymbol{L}_0 = -\nabla^2$, 而 $\boldsymbol{L}_1 = xy$, $\boldsymbol{L}_0$ 的本征函数系 $\{\psi_{pq}^{(0)}\}$ 为

$$\psi_{pq}^{(0)} = \frac{2}{\pi}\sin px\sin qy,\ (p, q = 1, 2, \cdots) \tag{6.1.5b}$$

相应的本征值 $\lambda_{pq}^{(0)} = p^2 + q^2$, 当 $p \neq q$ 时, $\lambda_{pq}^{(0)} = \lambda_{qp}^{(0)}$. 故当 $p \neq q$ 时, 对应于本征值 $\lambda_{pq}^{(0)}$, 有两个独立的本征函数

$$\psi_{pq}^{(0)} = \frac{2}{\pi}\sin px\sin qy;\quad \psi_{qp}^{(0)} = \frac{2}{\pi}\sin qx\sin py \tag{6.1.5c}$$

这时 $\lambda_{pq}^{(0)}$ 是二度简并态 $(p \neq q)$. 但当 $p = q$ 时, $\lambda_{pq}^{(0)}$ 是非简并的, 可用公式 (6.1.4d) 求微扰量. 例如 $p = q = 1$ 时 $\lambda_{11}^{(0)}$ 的微扰量

$$\Delta\lambda_{11} \equiv \varepsilon(\psi_{11}^0, xy\psi_{11}^0) = \varepsilon\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} xy\sin^2 x\sin^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\varepsilon\pi^2 \tag{6.1.5d}$$

因此, 本征值的一级微扰为 $\lambda_{11} = \lambda_{11}^{(0)} + \varepsilon\pi^2/4 = 2 + \varepsilon\pi^2/4$. 对 $p \neq q$ 的二度简并态微扰讨论见例 6.1.2.

### 6.1.2　算子本身的微扰：简并态

仍考虑方程 (6.1.1c), 但这时设未扰动态 $\lambda_n^{(0)}$ 是 $f$ 度简并的, 相应的 $f$ 个本征函数为 $\{\psi_{nk}^{(0)}, k = 1, 2, \cdots, f\}$. 这时有可能发生这样的情况: 由于 $\boldsymbol{L}_1$ 的作用, 降低 $\lambda_n^{(0)}$ 的简并度. 问题是零级本征函数 $\{\psi_{nk}^{(0)}\}$ 应如何选择? 下面来解决这个问题. 设方程 (6.1.1c) 的解可展成 $\varepsilon$ 幂级数的解为

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda_n^{(0)} + \varepsilon\lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_n^{(2)} + \cdots \\ \psi_n &= \psi_n^{(0)} + \varepsilon\psi_n^{(1)} + \varepsilon^2\psi_n^{(2)} + \cdots\end{aligned} \tag{6.1.6a}$$

代入方程 (6.1.2a), 比较 $\varepsilon$ 的同次幂系数得到

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}_0\psi_n^{(0)} = \lambda_n^{(0)}\rho\psi_n^{(0)} \\ &\boldsymbol{L}_0\psi_n^{(1)} + \boldsymbol{L}_1\psi_n^{(0)} = \rho(\lambda_n^{(0)}\psi_n^{(1)} + \lambda_n^{(1)}\psi_n^{(0)}) \\ &\cdots\cdots\end{aligned} \tag{6.1.6b}$$

由于 $\psi_{nk}^{(0)}$ $(k = 1, 2, \cdots, f)$ 都满足 $\boldsymbol{L}_0\psi_{nk}^{(0)} = \lambda_n^{(0)}\rho\psi_{nk}^{(0)}$, 故作线性组合

$$\psi_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{f} c_k^{(0)}\psi_{nk}^{(0)} \tag{6.1.7a}$$

作为零级本征函数. 此外, 对一级近似本征函数作广义 Fourier 展开

$$\psi_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(1)}\psi_j^{(0)} \tag{6.1.7b}$$

上二式代入方程 (6.1.6b) 第二式应有

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(1)}(\lambda_n^{(0)} - \lambda_j^{(0)})\rho\psi_j^{(0)} = \sum_{k=1}^{f} c_k^{(0)}(\boldsymbol{L}_1 - \lambda_n^{(1)}\rho)\psi_{nk}^{(0)} \tag{6.1.7c}$$

上式两边乘 $[\psi_{nq}^{(0)}]^*$, $(q=1,2,\cdots,f)$ 并积分

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty}c_j^{(1)}(\lambda_n^{(0)}-\lambda_j^0)\int_G\rho[\psi_{nq}^{(0)}]^*\psi_j^{(0)}\mathrm{d}\tau\\&=\sum_{k=1}^{f}c_k^{(0)}\int_G[\psi_{nq}^{(0)}]^*(\boldsymbol{L}_1-\lambda_n^{(1)}\rho)\psi_{nk}^{(0)}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{6.1.8a}$$

因当 $j\neq n$, $\psi_{nq}^{(0)}$ 与 $\psi_j^{(0)}$ 正交, 而当 $j=n$ 时,$\lambda_n^{(0)}=\lambda_j^{(0)}$, 故上式左边恒为零. 于是有

$$\sum_{k=1}^{f}c_k^{(0)}[(\psi_{nq}^{(0)},\boldsymbol{L}_1\psi_{nk}^{(0)})-\lambda_n^{(1)}\delta_{qk}]=0,\ (q=1,2,\cdots,f)\tag{6.1.8b}$$

上式存在非零解的条件是

$$\det[(\psi_{nq}^{(0)},\boldsymbol{L}_1\psi_{nk}^{(0)})-\lambda_n^{(1)}\delta_{qk}]=0\tag{6.1.8c}$$

由上两式可求得 $f$ 个 $\lambda_n^{(1)}$ 及 $f$ 套系数 $c_k^{(0)}$,$(k=1,2,\cdots,f)$. 如果 $f$ 个 $\lambda_n^{(1)}$ 各不相同, 则由式 (6.1.7a) 可以得到 $f$ 个零级近似本征函数, 由于微扰的作用, 第 $n$ 个本征值 $\lambda_n^{(0)}$ 的简并完全消除; 如果 $\lambda_n^{(1)}$ 有重根, 则 $\lambda_n^{(0)}$ 的简并度降低. 方程 (6.1.8c) 称为**久期方程**.

当 $\boldsymbol{L}_1$ 是 Hermite 对称算子时

$$(\psi_{nq}^{(0)},\boldsymbol{L}_1\psi_{nk}^{(0)})=(\boldsymbol{L}_1\psi_{nq}^{(0)},\psi_{nk}^{(0)})=(\psi_{nk}^{(0)},\boldsymbol{L}_1\psi_{nq}^{(0)})^*\tag{6.1.9a}$$

因此, 由元素 $H_{qk}\equiv(\psi_{nq}^{(0)},\boldsymbol{L}_1\psi_{nk}^{(0)})$ 构成的矩阵是 Hermite 对称矩阵, 存在 $f$ 个实的本征值 $\lambda_{np}^{(1)}$, $(p=1,2,\cdots,f)$, 于是本征值 $\lambda_n$ 的一级近似为

$$\lambda_n=\lambda_n^0+\varepsilon\lambda_{np}^1,\ (p=1,2,\cdots,f)\tag{6.1.9b}$$

**例 6.1.2** 设 $\lambda_n^{(0)}$ 是 2 度简并的, 即对应 $\lambda_n^{(0)}$ 有两个本征函数 $\psi_{n1}^{(0)}$ 及 $\psi_{n2}^{(0)}$, 则

$$\begin{aligned}H_{11}\equiv(\psi_{n1}^{(0)},\boldsymbol{L}_1\psi_{n1}^{(0)});\ H_{12}\equiv(\psi_{n1}^{(0)},\boldsymbol{L}_1\psi_{n2}^{(0)})\\H_{21}\equiv H_{12}^*;\ H_{22}\equiv(\psi_{n2}^{(0)},\boldsymbol{L}_1\psi_{n2}^{(0)})\end{aligned}\tag{6.1.10a}$$

故 $\lambda_n^{(1)}$ 满足

$$\begin{vmatrix}H_{11}-\lambda_n^1 & H_{12}\\H_{21} & H_{22}-\lambda_n^1\end{vmatrix}=0\tag{6.1.10b}$$

上式的二个根是

$$\lambda_{n\pm}^{(1)}=\frac{1}{2}[-(H_{11}+H_{22})\pm\Delta]\tag{6.1.10c}$$

其中 $\Delta \equiv \sqrt{(H_{11}-H_{22})^2+4|H_{21}|^2}$. 如果 $\Delta \neq 0$, 简并消除；否则, 微扰后的本征值仍然是简并的, 仅仅有大小的变化.

对一级修正 $\lambda_{n+}^{(1)}$, 由方程 (6.1.8b) 得到 $c_1^{(0)}(H_{11}-\lambda_{n+}^{(1)})+c_2^{(0)}H_{12}=0$, 故由式 (6.1.7a), 对应的零级本征函数为

$$\psi_{n+}^{(0)}=\frac{c_1^{(0)}}{H_{12}}[H_{12}\psi_{n1}^{(0)}+(\lambda_{n+}^{(1)}-H_{11})\psi_{n2}^{(0)}] \tag{6.1.11a}$$

对一级修正 $\lambda_{-}^{(1)}$, 同理可得

$$\psi_{n-}^{(0)}=\frac{c_1^{(0)}}{H_{12}}[H_{12}\psi_{n1}^{(0)}+(\lambda_{n-}^{(1)}-H_{11})\psi_{n2}^{(0)}] \tag{6.1.11b}$$

其中上两式的系数 $c_1^{(0)}$ 可由归一化条件 $(\psi_{n\pm}^{(0)},\psi_{n\pm}^{(0)})=1$ 得到.

如果 $\Delta=0$, 要求 $H_{12}=H_{21}=0$ 和 $H_{11}=H_{22}$, 由 $c_1^{(0)}(H_{11}-\lambda_{n+}^{(1)})+c_2^{(0)}H_{12}=0$ 得到 $c_1^{(0)}=0$, 而 $c_2^{(0)}$ 任意, 于是 $\psi_{n+}^{(0)}=c_2^{(0)}\psi_{n2}^{(0)}$(如果 $\psi_{n2}^{(0)}$ 已经归一化, 可以取 $c_2^{(0)}=1$); 由方程 (6.1.8b) 的另外一个方程 $c_1^{(0)}H_{21}+c_2^{(0)}(H_{22}-\lambda_{n-}^{(1)})=0$ 得到 $c_2^{(0)}=0$, 而 $c_1^{(0)}$ 任意, 于是 $\psi_{n-}^{(0)}=c_1^{(0)}\psi_{n1}^{(0)}$. 因此, 零级本征函数不变.

考虑例 6.1.1 情况, 取 $p$=1 和 $q$=2, $\lambda_{21}^{(0)}=\lambda_{12}^{(0)}=5$, $H_{ij}$ 为

$$\begin{aligned}H_{11}=H_{22}&=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}xy\sin^2 2x\sin^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}\\ H_{21}=H_{12}&=\frac{4}{\pi^2}\left(\int_0^{\pi}x\sin x\sin 2x\mathrm{d}x\right)^2=\frac{16}{9\pi^2}\end{aligned} \tag{6.1.12a}$$

因此, 在微扰作用下本征值 $\lambda_{12}^{(0)}=\lambda_{21}^{(0)}=5$ 分裂成二个

$$\begin{aligned}\lambda_{+}&=5+\varepsilon\lambda_{+}^{(1)}=5+\varepsilon\left(-\frac{\pi^2}{4}+\frac{16}{9\pi^2}\right)\\ \lambda_{-}&=5+\varepsilon\lambda_{-}^{(1)}=5+\varepsilon\left(-\frac{\pi^2}{4}-\frac{32}{9\pi^2}\right)\end{aligned} \tag{6.1.12b}$$

简并消除.

**例 6.1.3** 一维本征值问题

$$\begin{aligned}-\left[\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\varepsilon g(x)\psi\right]=\lambda\psi,\ x\in(0,1)\\ \psi|_{x=0}=\psi|_{x=1}=0\end{aligned} \tag{6.1.13a}$$

零级本征函数系为 $\psi_n^{(0)}=\sqrt{2}\sin(n\pi x)$, 相应的本征值 $\lambda_n^{(0)}=\pi^2n^2$, $(n=1,2,\cdots)$,

于是

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda_n^{(0)} + \varepsilon(\psi_n^{(0)}, \boldsymbol{L}_1\psi_n^{(0)}) \\ &= \lambda_n^{(0)} - 2\varepsilon\int_0^{\pi} g(x)\sin^2(n\pi x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.1.13b}$$

但如果边界条件为周期性边界条件

$$\psi|_{x=0} = \psi|_{x=1};\quad \left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} \tag{6.1.13c}$$

则零级本征值为 $\lambda_n^{(0)} = 4\pi^2 n^2, (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 相应于 $\lambda_n^{(0)}$ 有两个独立的零级本征函数

$$\psi_{nc}^{(0)} = \sqrt{2}\cos(2n\pi x);\ \psi_{ns}^{(0)}(x) = \sqrt{2}\sin(2n\pi x) \tag{6.1.14a}$$

因此, 当 $n \geqslant 1$ 时, $\lambda_n^{(0)}$ 二度简并, 而 $\lambda_0^{(0)} = 0$ 非简并: $\psi_0^{(0)} = \sqrt{2}$. 考虑 $n \geqslant 1$ 情况:

$$\begin{aligned}H_{11} &= -2\int_0^1 g(x)\sin^2(2n\pi x)\mathrm{d}x \\ H_{22} &= -2\int_0^1 g(x)\cos^2(2n\pi x)\mathrm{d}x \\ H_{12} = H_{21} &= -2\int_0^1 g(x)\sin(4n\pi x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.1.14b}$$

$\lambda_n^{(0)}$ 的一级修正为

$$\lambda_{n\pm}^{(1)} = -\frac{1}{2}\left[(H_{11} + H_{22}) \pm \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{21}^2}\right] \tag{6.1.14c}$$

下面求零级本征函数, 由方程 (6.1.8b)

$$\begin{aligned}c_1^{(0)}(H_{11} - \lambda_n^{(1)}) + c_2^{(0)}H_{12} = 0 \\ c_1^{(0)}H_{21} + c_2^{(0)}(H_{22} - \lambda_n^{(1)}) = 0\end{aligned} \tag{6.1.15a}$$

当 $\lambda_n^{(1)} = \lambda_{n\pm}^{(1)}$ 时

$$c_2^{(0)} = -\frac{H_{11} - \lambda_{n\pm}^{(1)}}{H_{12}}c_1^{(0)}\quad 或者\quad c_1^{(0)} = \frac{H_{22} - \lambda_{n\pm}^{(1)}}{H_{21}}c_2^{(0)} \tag{6.1.15b}$$

代入式 (6.1.7a)

$$\psi_n^{(0)} = c_1^{(0)}\psi_{nc}^{(0)} + c_2^{(0)}\psi_{ns}^{(0)} = c_1^{(0)}\left[\psi_{nc}^{(0)} + \frac{H_{11} - \lambda_{n\pm}^{(1)}}{H_{12}}\psi_{ns}^{(0)}\right] \tag{6.1.15c}$$

如取 $c_1^{(0)} = 1$, 则零级近似本征函数分别为 $\psi_{n+}^{(0)}$ 和 $\psi_{n-}^{(0)}$ (注意：没有归一化)

$$\begin{aligned}\psi_{n+}^{(0)} &= \sqrt{2}\left[\cos(2\pi nx) + \frac{H_{11} - \lambda_{n+}^{(1)}}{H_{12}}\sin(2\pi nx)\right]\\ \psi_{n-}^{(0)} &= \sqrt{2}\left[\cos(2\pi nx) + \frac{H_{11} - \lambda_{n-}^{(1)}}{H_{12}}\sin(2\pi nx)\right]\end{aligned} \tag{6.1.16a}$$

相应的一级近似本征值为

$$\begin{aligned}\lambda_{n+} &= 4\pi^2 n^2 - \frac{\varepsilon}{2}\left[(H_{11} + H_{22}) + \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{21}^2}\right]\\ \lambda_{n-} &= 4\pi^2 n^2 - \frac{\varepsilon}{2}\left[(H_{11} + H_{22}) - \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{21}^2}\right]\end{aligned} \tag{6.1.16b}$$

如果 $H_{11} = H_{22}$ 和 $H_{21} = H_{12} = 0$, 则式 (6.1.14c) 的两个根相等: $\lambda_{n+}^{(1)} = \lambda_{n-}^{(1)}$. 因此, 在一级近似下, 简并不能消除, 而要考虑高级近似.

**例 6.1.4** 氢原子的 Stark 效应, 即氢原子在外电场作用下的能级分裂. 氢原子核外电子的 Hamilton 算子为

$$\boldsymbol{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{6.1.17a}$$

外电场 $\boldsymbol{E}$ (假定在 $z$ 方向) 的作用相当于 Hamilton 算子的微扰

$$\boldsymbol{H}' = e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r} = eEz = eEr\cos\vartheta \tag{6.1.17b}$$

根据 2.5.3 节的讨论, 考虑能级 $n = 2$ 的微扰. 由式 (2.5.35a), 未微扰能量本征值为

$$E_2^{(0)} \equiv -\frac{1}{2^2}E_0 \tag{6.1.17c}$$

由于能级与 $l$ 和 $m$ 无关, 当 $n = 2$ 时, 由式 (2.5.35c), 零级本征函数为

$$\begin{aligned}\psi_{21}^{(0)} &\equiv \psi_{200}(r,\vartheta,\varphi) = R_{20}(r)Y_{00}(\vartheta,\varphi)\\ \psi_{22}^{(0)} &\equiv \psi_{210}(r,\vartheta,\varphi) = R_{21}(r)Y_{10}(\vartheta,\varphi)\\ \psi_{23}^{(0)} &\equiv \psi_{211}(r,\vartheta,\varphi) = R_{21}(r)Y_{11}(\vartheta,\varphi)\\ \psi_{24}^{(0)} &\equiv \psi_{21-1}(r,\vartheta,\varphi) = R_{21}(r)Y_{1-1}(\vartheta,\varphi)\end{aligned} \tag{6.1.17d}$$

即

$$
\begin{aligned}
\psi_{21}^{(0)} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)\\
\psi_{22}^{(0)} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{r}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)\cos\vartheta\\
\psi_{23}^{(0)} &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{r}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)\sin\vartheta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\\
\psi_{24}^{(0)} &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{r}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)\sin\vartheta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}
\end{aligned}
\tag{6.1.17e}
$$

故本征值 $E_2^{(0)}$ 是 4 度简并的, 久期方程为

$$
\begin{bmatrix}
H'_{11}-E_2^{(1)} & H'_{12} & H'_{13} & H'_{14}\\
H'_{21} & H'_{22}-E_2^{(1)} & H'_{23} & H'_{24}\\
H'_{31} & H'_{32} & H'_{33}-E_2^{(1)} & H'_{34}\\
H'_{41} & H'_{42} & H'_{43} & H'_{44}-E_2^{(1)}
\end{bmatrix} = 0 \tag{6.1.18a}
$$

其中 $H'_{\sigma\tau}\equiv(\psi_{2\sigma}^{(0)},\boldsymbol{H}'\psi_{2\tau}^{(0)})$. 注意到微扰可以写成

$$
\boldsymbol{H}' = eEr\cos\vartheta = eEr\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}(\vartheta,\varphi) \tag{6.1.18b}
$$

利用球谐函数的正交性, 非零元素只有

$$
H'_{12} = H'_{21} = \int [\psi_{21}^{(0)}]^*\boldsymbol{H}'\psi_{22}^{(0)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = -3eEa_0 \tag{6.1.18c}
$$

故久期方程 (6.1.18a) 简化为

$$
\begin{bmatrix}
-E_2^{(1)} & -3eEa_0 & 0 & 0\\
-3eEa_0 & -E_2^{(1)} & 0 & 0\\
0 & 0 & -E_2^{(1)} & 0\\
0 & 0 & 0 & -E_2^{(1)}
\end{bmatrix} = 0 \tag{6.1.18d}
$$

展开后得到

$$
[E_2^{(1)}]^2\{[E_2^{(1)}]^2-(3eEa_0)^2\} = 0 \tag{6.1.19a}
$$

于是 4 个根为

$$
\begin{gathered}
E_{21}^{(1)} = 3eEa_0;\ E_{22}^{(1)} = -3eEa_0\\
E_{23}^{(1)} = E_{24}^{(1)} = 0
\end{gathered}
\tag{6.1.19b}
$$

其中 $E_{23}^{(1)}=0$ 和 $E_{24}^{(1)}=0$ 为一对重根. 故由于微扰, 原来 4 度简并的能级变成三个能级 $E_2^{(0)}+3eEa_0$, $E_2^{(0)}$ 和 $E_2^{(0)}-3eEa_0$.

**零级本征函数** 由方程 (6.1.8b), 组合系数满足

$$\sum_{\tau=1}^{4} C_\tau \left[(\psi_{2\sigma}^{(0)}, \boldsymbol{H}'\psi_{2\tau}^{(0)}) - E_2^{(1)}\delta_{\sigma\tau}\right] = 0 \quad (\sigma=1,2,3,4) \tag{6.1.20a}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} -E_2^{(1)} & -3eEa_0 & 0 & 0 \\ -3eEa_0 & -E_2^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_2^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_2^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{6.1.20b}$$

(1) 当取 $E_2^{(1)}=E_{21}^{(1)}=3eEa_0$ 时, 从上式得到

$$C_1=-C_2;\ C_3=C_4=0 \tag{6.1.21a}$$

故零级本征函数为

$$\begin{aligned} \psi_1^{(0)} &= \sum_{\nu=1}^{4} C_\nu \psi_{2\nu}^{(0)} = C_1(\psi_{21}^{(0)}-\psi_{22}^{(0)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200}-\psi_{210}) \end{aligned} \tag{6.1.21b}$$

(2) 当取 $E_2^{(1)}=E_{22}^{(1)}=-3eEa_0$ 时, 从方程 (6.1.20b) 得到

$$C_1=C_2;\ C_3=C_4=0 \tag{6.1.22a}$$

故零级本征函数为

$$\begin{aligned} \psi_2^{(0)} &= \sum_{\nu=1}^{4} C_\nu \psi_{2\nu}^{(0)} = C_1(\psi_{21}^{(0)}+\psi_{22}^{(0)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200}+\psi_{210}) \end{aligned} \tag{6.1.22b}$$

(3) 当取 $E_2^{(1)}=E_{23}^{(1)}=E_{24}^{(1)}=0$ 时, 从方程 (6.1.20b) 得到 $C_1=C_2=0$, 以及 $C_3$ 和 $C_4$ 不同时为零, 于是零级本征函数取为

$$\begin{aligned} \psi_3^{(0)} &= C_3\psi_{23}^{(0)} = \psi_{211} \\ \psi_4^{(0)} &= C_4\psi_{24}^{(0)} = \psi_{21-1} \end{aligned} \tag{6.1.22c}$$

### 6.1.3 边界条件的微扰

在声学或电磁工程中, 经常通过修改边界来改变系统的性能 (例如在边界的某一位置加一块吸收材料), 这相当于微扰边界条件. 首先考虑简单的一维本征值问题

$$
\begin{gathered}
-\frac{\mathrm{d}^2\psi_n}{\mathrm{d}x^2}=\lambda_n\psi_n,\ x\in(0,1)\\
\psi_n|_{x=0}=0,\quad \left.\left(\varepsilon\frac{\mathrm{d}\psi_n}{\mathrm{d}x}+\psi_n\right)\right|_{x=1}=0
\end{gathered}\tag{6.1.23a}
$$

微扰出现在边界条件上, 在 $x=1$ 处, 由第一类边界变成第三类边界. 当 $\varepsilon=0$ 时, 本征值问题

$$
\begin{gathered}
-\frac{\mathrm{d}^2\psi_n^{(0)}}{\mathrm{d}x^2}=\lambda_n^{(0)}\psi_n^{(0)},\ x\in(0,1)\\
\psi_n^{(0)}|_{x=0}=\psi_n^{(0)}|_{x=1}=0
\end{gathered}\tag{6.1.23b}
$$

的解为 $\psi_n^{(0)}=\sqrt{2}\sin n\pi x$; $\lambda_n^{(0)}=n^2\pi^2$. 当 $\varepsilon\neq 0$ 时, $\psi_n$ 在 $x=1$ 处满足第三类边界条件. 作微扰展开

$$
\psi_n=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\psi_n^{(j)};\ \lambda_n=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\lambda_n^{(j)}\tag{6.1.23c}
$$

代入方程 (6.1.23a) 得到零级近似 $\psi_n^{(0)}$ 满足的方程为式 (6.1.23b), 而一级近似 $\psi_n^{(1)}$ 满足

$$
\begin{gathered}
-\frac{\mathrm{d}^2\psi_n^{(1)}}{\mathrm{d}x^2}-\lambda_n^{(0)}\psi_n^{(1)}=\lambda_n^{(1)}\psi_n^{(0)},\ x\in(0,1)\\
\psi_n^{(1)}|_{x=0}=0;\ \psi_n^{(1)}|_{x=1}=-\left.\frac{\mathrm{d}\psi_n^{(0)}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}
\end{gathered}\tag{6.1.23d}
$$

为求本征值 $\lambda_n^{(1)}$, 无需求出上式解. 用 $\psi_n^{(0)}$ 乘方程 (6.1.23d) 的第一式并积分, 则得

$$
\begin{aligned}
\lambda_n^{(1)}&=-\int_0^1\left[\psi_n^{(0)}\frac{\mathrm{d}^2\psi_n^{(1)}}{\mathrm{d}x^2}+\lambda_n^{(0)}\psi_n^{(1)}\psi_n^{(0)}\right]\mathrm{d}x\\
&=-\psi_n^{(0)}\left.\frac{\mathrm{d}\psi_n^{(1)}}{\mathrm{d}x}\right|_0^1+\int_0^1\frac{\mathrm{d}\psi_n^{(1)}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\psi_n^{(0)}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\int_0^1\lambda_n^{(0)}\psi_n^{(1)}\psi_n^{(0)}\mathrm{d}x
\end{aligned}\tag{6.1.24a}
$$

由方程 (6.1.23b) 的边界条件得到

$$
\lambda_n^{(1)}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\psi_n^{(0)}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\psi_n^{(1)}-\int_0^1\lambda_n^{(0)}\psi_n^{(1)}\psi_n^{(0)}\mathrm{d}x\tag{6.1.24b}
$$

分部积分得到

$$\lambda_n^{(1)} = \psi_n^{(1)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\psi_n^{(0)}}{\mathrm{d}x}\right|_0^1 - \int_0^1 \psi_n^{(1)} \frac{\mathrm{d}^2\psi_n^{(0)}}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \lambda_n^{(0)}\psi_n^{(1)}\psi_n^{(0)}\mathrm{d}x \tag{6.1.24c}$$

利用方程 (6.1.23b) 及 (6.1.23d)

$$\begin{aligned}\lambda_n^{(1)} &= -\left.\left(\frac{\mathrm{d}\psi_n^{(0)}}{\mathrm{d}x}\right)^2\right|_{x=1} + \lambda_n^{(0)}\int_0^1 (-\psi_n^{(1)}\psi_n^{(0)} + \psi_n^{(1)}\psi_n^{(0)})\mathrm{d}x \\ &= -\left.\left(\frac{\mathrm{d}\psi_n^{(0)}}{\mathrm{d}x}\right)^2\right|_{x=1} = -2\pi^2 n^2\end{aligned} \tag{6.1.24d}$$

因此, 在一级近似下本征值为

$$\lambda_n \approx n^2\pi^2 - 2\varepsilon n^2\pi^2 = n^2\pi^2(1-2\varepsilon) \tag{6.1.24e}$$

显然, 微扰成立条件是 $\varepsilon \ll 1/2$.

**与严格解比较**　与 2.4.2 小节的式 (2.4.16b) 比较, 取 $h = 1/\varepsilon$ 和 $l = 1$. 由方程 (2.4.17a), 本征值 $\lambda$ 满足的方程为

$$-\varepsilon\sqrt{\lambda} = \tan(\sqrt{\lambda}) \tag{6.1.25a}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时,$\sin(\sqrt{\lambda^{(0)}}) = 0$, 故 $\lambda_n^{(0)} = n^2\pi^2$, 令 $\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \delta$ 代入上式

$$-\varepsilon(n\pi+\delta) = \tan(n\pi+\delta) \approx \delta \tag{6.1.25b}$$

故 $\delta \approx -n\pi\varepsilon$, 于是

$$\lambda_n = (n\pi+\delta)^2 \approx n^2\pi^2 + 2n\pi\delta = n^2\pi^2(1-2\varepsilon) \tag{6.1.25c}$$

上式与方程 (6.1.24e) 是一致的.

考虑定义在有限区域 $G$ 上的三维算子 $\boldsymbol{L} = -\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r})$ 的本征值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi_n = \lambda_n\rho(\boldsymbol{r})\psi_n,\ \boldsymbol{r}\in G \\ \left.\left[\psi_n + \varepsilon\beta(\boldsymbol{r})\frac{\partial\psi_n}{\partial n}\right]\right|_{\partial G} = 0\end{gathered} \tag{6.1.26a}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, 作微扰展开

$$\psi_n = \sum_{j=0}\varepsilon^j\psi_n^{(j)};\ \lambda_n = \sum_{j=0}\varepsilon^j\lambda_n^{(j)} \tag{6.1.26b}$$

上式代入方程 (6.1.26a) 得零级近似方程

$$\boldsymbol{L}\psi_n^{(0)}=\lambda_n^{(0)}\rho\psi_n^{(0)},\ \boldsymbol{r}\in G;\ \psi_n^{(0)}|_{\partial G}=0 \tag{6.1.26c}$$

一级近似方程

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}\psi_n^{(1)}-\lambda_n^{(0)}\rho\psi_n^{(1)}=\lambda_n^{(1)}\rho\psi_n^{(0)},\ \boldsymbol{r}\in G\\&\psi_n^{(1)}|_{\partial G}=-\beta(\boldsymbol{r})\left.\frac{\partial\psi_n^{(0)}}{\partial n}\right|_{\partial G}\end{aligned} \tag{6.1.26d}$$

设由方程 (6.1.26c) 可解出零级近似本征函数 $\{\psi_n^{(0)}\}$ 及相应的本征值 $\{\lambda_n^{(0)}\}$. 下面由方程 (6.1.26d) 求本征值的一级修正 $\lambda_n^{(1)}$. 用 $(\psi_n^{(0)})^*$ 乘方程 (6.1.26d) 的第一式两边并积分

$$\lambda_n^{(1)}=\int_G[(\psi_n^{(0)})^*\boldsymbol{L}\psi_n^{(1)}-\lambda_n^{(0)}\rho(\psi_n^{(0)})^*\psi_n^{(1)}]\mathrm{d}\tau \tag{6.1.27a}$$

另一方面, 利用 Green 公式

$$\int_G(u\boldsymbol{L}v-v\boldsymbol{L}u)\mathrm{d}\tau\ =-\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{6.1.27b}$$

取 $u\equiv(\psi_n^{(0)})^*$ 和 $v\equiv\psi_n^{(1)}$, 且由方程 (6.1.26c) 和 (6.1.26d) 中的边界条件, 上式化为

$$\begin{aligned}\int_G(\psi_n^{(0)})^*\boldsymbol{L}\psi_n^{(1)}\mathrm{d}\tau=&\lambda_n^{(0)}\int_G\rho(\psi_n^{(0)})^*\psi_n^{(1)}\mathrm{d}\tau\\&+\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\beta(\boldsymbol{r})\left|\frac{\partial\psi_n^{(0)}}{\partial n}\right|^2\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{6.1.27c}$$

代入方程 (6.1.27a) 得到本征值的一级修正

$$\lambda_n^{(1)}=-\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\beta(\boldsymbol{r})\left|\frac{\partial\psi_n^{(0)}}{\partial n}\right|^2\mathrm{d}S \tag{6.1.27d}$$

如果 $\lambda_n^{(0)}$ 是 $f$ 度简并的, 令零级本征函数 $\psi_n^{(0)}$ 为

$$\psi_n^{(0)}=\sum_{k=1}^{f}c_k^{(0)}\psi_{nk}^{(0)} \tag{6.1.28a}$$

于是, 一级近似方程 (6.1.26d) 变成

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}\psi_n^{(1)}-\lambda_n^{(0)}\rho\psi_n^{(1)}=\lambda_n^{(1)}\rho\sum_{k=1}^{f}c_k^{(0)}\psi_{nk}^{(0)},\ \boldsymbol{r}\in G\\&\psi_n^{(1)}|_{\partial G}=-\beta(\boldsymbol{r})\sum_{k=1}^{f}c_k^{(0)}\left.\frac{\partial\psi_{nk}^{(0)}}{\partial n}\right|_{\partial G}\end{aligned} \tag{6.1.28b}$$

用 $(\psi_{nj}^{(0)})^*, (j=1,2,\cdots,f)$ 乘方程 (6.1.28b) 第一式的两边并积分得到

$$\lambda_n^{(1)}\sum_{k=1}^{f}c_k^{(0)}\int_G\rho(\psi_{nj}^{(0)})^*\psi_{nk}^{(0)}\mathrm{d}\tau=\sum_{k=1}^{f}c_k^{(0)}\alpha_{kj} \tag{6.1.28c}$$

其中

$$\alpha_{kj}=-\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\beta(\boldsymbol{r})\left[\frac{\partial\psi_{nk}^{(0)}}{\partial n}\cdot\frac{\partial(\psi_{nj}^{(0)})^*}{\partial n}\right]\mathrm{d}S \tag{6.1.29a}$$

利用 $(\psi_{nj}^{(0)})^*$ 的正交性, 方程 (6.1.28c) 变成

$$\sum_{k=1}^{f}c_k^{(0)}(\alpha_{kj}-\lambda_n^{(1)}\delta_{kj})=0,\ (j=1,2,\cdots,f) \tag{6.1.29b}$$

于是得到 $\lambda_n^{(1)}$ 满足的方程

$$\det[\alpha_{kj}-\lambda_n^{(1)}\delta_{kj}]=0 \tag{6.1.29c}$$

由上二式可求得 $f$ 套系数 $c_n^{(0)}$ 以及 $f$ 个 $\lambda_n^{(1)}$, 从而求得本征函数的零级近似及本征值的一级近似.

**例 6.1.5** 考虑第二类边界条件的微扰问题 (声学中经常遇到类似的问题)

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi_n=\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})\psi_n,\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left[\frac{\partial\psi_n}{\partial n}+\varepsilon\alpha(\boldsymbol{r})\psi_n\right]\bigg|_{\partial G}=0\end{gathered} \tag{6.1.30a}$$

取微扰展开式 (6.1.26b), 代入上式得到零级和一级近似方程分别为

$$\boldsymbol{L}\psi_n^{(0)}=\lambda_n^{(0)}\rho\psi_n^{(0)},\ \boldsymbol{r}\in G;\quad \frac{\partial\psi_n^{(0)}}{\partial n}\bigg|_{\partial G}=0 \tag{6.1.30b}$$

和

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi_n^{(1)}-\lambda_n^{(0)}\rho\psi_n^{(1)}=\lambda_n^{(1)}\rho\psi_n^{(0)},\ \boldsymbol{r}\in G\\ \frac{\partial\psi_n^{(1)}}{\partial n}\bigg|_{\partial G}=-\alpha(\boldsymbol{r})\psi_n^{(0)}|_{\partial G}\end{gathered} \tag{6.1.30c}$$

用 $(\psi_n^{(0)})^*$ 乘方程 (6.1.30c) 的第一式两边, 并积分

$$\lambda_n^{(1)}=\int_G[(\psi_n^{(0)})^*\boldsymbol{L}\psi_n^{(1)}-\lambda_n^{(0)}\rho(\psi_n^{(0)})^*\psi_n^{(1)}]\mathrm{d}\tau \tag{6.1.30d}$$

利用 Green 公式 (6.1.27b) 以及边界条件得到

$$\lambda_n^{(1)} = \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r})\alpha(\boldsymbol{r})|\psi_n^{(0)}|^2 \mathrm{d}S \tag{6.1.30e}$$

如果 $\lambda_n^{(0)}$ 是 $f$ 度简并的, 令零级本征函数 $\psi_n^{(0)}$ 为展开式 (6.1.28a), 一级近似方程 (6.1.30c) 变成

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}\psi_n^{(1)} - \lambda_n^{(0)}\rho\psi_n^{(1)} = \lambda_n^{(1)}\rho\sum_{k=1}^{f} c_k^{(0)}\psi_{nk}^{(0)},\ \boldsymbol{r} \in G \\ &\left.\frac{\partial\psi_n^{(1)}}{\partial n}\right|_{\partial G} = -\alpha(\boldsymbol{r})\sum_{k=1}^{f} c_k^{(0)}\psi_{nk}^{(0)} \end{aligned} \tag{6.1.31a}$$

用 $(\psi_{nj}^{(0)})^*, (j = 1, 2, \cdots, f)$ 乘方程 (6.1.31a) 第一式两边, 并积分且利用 $(\psi_{nj}^{(0)})^*$ 的正交性得到

$$\lambda_n^{(1)}\sum_{k=1}^{f} c_k^{(0)}\delta_{kj} = \sum_{k=1}^{f} c_k^{(0)}\beta_{kj} \tag{6.1.31b}$$

其中

$$\beta_{kj} = \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r})\alpha(\boldsymbol{r})\psi_{nk}^{(0)}(\psi_{nj}^{(0)})^* \mathrm{d}S \tag{6.1.31c}$$

方程 (6.1.31b) 变成

$$\sum_{k=1}^{f} c_k^{(0)}(\beta_{kj} - \lambda_n^{(1)}\delta_{kj}) = 0,\ (j = 1, 2, \cdots, f) \tag{6.1.31d}$$

余下的讨论与式 (6.1.29b) 类似, 不再重复.

必须指出的是：在导出式 (6.1.27d)、(6.1.29c)、(6.1.30e) 和 (6.1.31d) 过程中, 并没有要求算子 $\boldsymbol{L}$ 的 Hermite 对称性, 故这四个式子对复数 $\alpha(\boldsymbol{r})$ 也成立, 此时本征值是复数, 在声学和电磁场理论中, 表示模式的衰减 (见例 6.1.7).

**例 6.1.6** 考虑区域 $G$ 为半径 $a$ 的圆内, $\partial G$ 为圆周, 二维 Laplace 算子的本征值问题

$$\begin{aligned} &-\nabla^2\psi(\rho,\varphi) = \lambda\psi(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi) \in G \\ &\left.\left[\frac{\partial\psi(\rho,\varphi)}{\partial\rho} + \varepsilon\alpha\psi(\rho,\varphi)\right]\right|_{\partial G} = 0 \end{aligned} \tag{6.1.32a}$$

由 2.3.2 小节的式 (2.3.18c) 和 2.4.1 小节的例 2.4.1, 零级近似本征函数为

$$\begin{aligned} &\psi_{nm}^{(0)}(\rho,\varphi) = A_{nm}J_m\left(\frac{x_{nm}}{a}\rho\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \\ &(n = 0, 1, 2, \cdots;\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{aligned} \tag{6.1.32b}$$

相应的零级本征值为 $\lambda_{nm}^{(0)}=(x_{nm}/a)^2$, 其中 $x_{nm}$ 为方程 $J'_{|m|}(x)=0$ 的第 $n$ 个零点, $A_{nm}$ 为归一化系数: $1/A_{nm}=\pi^{1/2}a\sqrt{1-(m/x_{nm})^2}J_{|m|}(x_{nm}a)$. 显然, 当 $m\neq 0$ 时, 零级本征值是二度简并的, 对应同一个本征值 $\lambda_{nm}^{(0)}=(x_{nm}/a)^2$ 存在二个独立的本征函数, 写成

$$\begin{aligned}\psi_{nm1}^{(0)}(\rho,\varphi)&=A_{nm}J_{|m|}\left(\frac{x_{nm}}{a}\rho\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}|m|\varphi}\\ \psi_{nm2}^{(0)}(\rho,\varphi)&=A_{nm}J_{|m|}\left(\frac{x_{nm}}{a}\rho\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|m|\varphi}\end{aligned}\tag{6.1.32c}$$

于是由式 (6.1.31c)

$$\begin{aligned}\beta_{11}&=-aA_{nm}^2J_{|m|}^2(x_{nm})\int_0^{2\pi}\alpha(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\beta_{22}\\ \beta_{12}&=-aA_{nm}^2J_{|m|}^2(x_{nm})\int_0^{2\pi}\alpha(\varphi)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}|m|\varphi}\mathrm{d}\varphi\\ \beta_{21}&=-aA_{nm}^2J_{|m|}^2(x_{nm})\int_0^{2\pi}\alpha(\varphi)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}|m|\varphi}\mathrm{d}\varphi\end{aligned}\tag{6.1.32d}$$

上式代入方程 (6.1.31d) 得到

$$\begin{aligned}c_1^{(0)}(\beta_{11}-\lambda_{nm}^{(1)})+c_2^{(0)}\beta_{21}=0\\ c_1^{(0)}\beta_{12}+c_2^{(0)}(\beta_{22}-\lambda_{nm}^{(1)})=0\end{aligned}\tag{6.1.32e}$$

可见: 如果 $\alpha(\varphi)$ 与角度有关, 使 $\beta_{12}\neq 0$ 和 $\beta_{21}\neq 0$, 那么零级本征函数的简并性消除, 由于微扰作用, 零级本征函数是 $\psi_{nm1}^{(0)}(\rho,\varphi)$ 和 $\psi_{nm2}^{(0)}(\rho,\varphi)$ 的组合. 物理上, 由于 $\alpha(\varphi)$ 与角度有关, 破坏了 Laplace 算子的旋转对称性 (见 1.1.1 小节讨论).

如果简单假定 $\alpha(\varphi)=\alpha_0$(常数), 则

$$\beta_{11}=2\pi a\alpha_0A_{nm}^2J_{|m|}^2(x_{nm})=\beta_{22};\ \beta_{12}=\beta_{21}=0\tag{6.1.32f}$$

故本征值精确到一级微扰为

$$\lambda_{nm}\approx\lambda_{nm}^{(0)}+\varepsilon\lambda_{nm}^{(1)}=\frac{x_{nm}^2}{a^2}+\frac{2\varepsilon\alpha_0}{a(1-m^2/x_{nm}^2)}\tag{6.1.32g}$$

此时, 零级本征函数不变, 仍然是 $\psi_{nm1}^{(0)}(\rho,\varphi)$ 和 $\psi_{nm2}^{(0)}(\rho,\varphi)$, 简并没有消除! 事实上, 由于 $\alpha(\varphi)=\alpha_0$, Laplace 算子仍然具有旋转对称性.

注意: 当 $m=0$ 时, 零级本征值是非简并的, 直接用方程 (6.1.30e) 即可.

**与严格解比较**　假定 $\alpha(\varphi)=\alpha_0$(常数, 否则得不到严格的解析解), 精确的本征值 $\lambda_{nm}$ 是下列方程的根

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}J_{|m|}(\sqrt{\lambda_{nm}}\rho)\right]_{\rho=a}+\varepsilon\alpha_0J_{|m|}(\sqrt{\lambda_{nm}}\rho)=0\tag{6.1.33a}$$

令 $x=\sqrt{\lambda_{nm}}\rho$, 上式变换成

$$\sqrt{\lambda_{nm}}\,J'_{|m|}(x)\Big|_{x=\sqrt{\lambda_{nm}}a}+\varepsilon\alpha J_{|m|}(\sqrt{\lambda_{nm}}a)=0 \tag{6.1.33b}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时, $\sqrt{\lambda_{nm}^{(0)}}=x_{nm}/a$ (其中 $x_{nm}$ 是 $J'_{|m|}(x)=0$ 的第 $n$ 个根); 当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时, 设微扰解为 $\sqrt{\lambda_{nm}}a=x_{nm}+\delta$, 代入方程 (6.1.33b) 得到

$$(x_{mm}+\delta)J'_{|m|}(x_{nm}+\delta)+\varepsilon a\alpha_0 J_{|m|}(x_{nm}+\delta)=0 \tag{6.1.33c}$$

分二种情况讨论上式

① 当 $x_{nm}\neq 0$ 时, 注意到

$$\begin{aligned}&J'_{|m|}(x_{nm}+\delta)\approx J'_{|m|}(x_{nm})+J''_{|m|}(x_{nm})\delta=J''_{|m|}(x_{nm})\delta\\&J_m(x_{nm}+\delta)\approx J_{|m|}(x_{nm})+J'_{|m|}(x_{nm})\delta=J_{|m|}(x_{nm})\end{aligned} \tag{6.1.33d}$$

代入方程 (6.1.33c) 得到本征值的一级微扰为

$$\delta\approx-\varepsilon a\alpha_0\frac{J_{|m|}(x_{nm})}{x_{nm}J''_{|m|}(x_{nm})} \tag{6.1.33e}$$

因为 Bessel 函数满足 Bessel 方程且注意到 $J'_{|m|}(x_{mm})=0$, 故

$$x_{nm}^2J''_{|m|}(x_{nm})+(x_{nm}^2-m^2)J_{|m|}(x_{nm})=0 \tag{6.1.33f}$$

代入式 (6.1.33e) 得到

$$\delta\approx\frac{\varepsilon a\alpha_0}{x_{nm}(1-m^2/x_{nm}^2)} \tag{6.1.34a}$$

于是, 本征值精确到一级微扰为

$$\lambda_{nm}\approx\frac{1}{a^2}(x_{nm}+\delta)^2\approx\frac{x_{nm}^2}{a^2}+\frac{2\varepsilon\alpha_0}{a(1-m^2/x_{nm}^2)} \tag{6.1.34b}$$

上式与式 (6.1.32g) 是完全一致的

② 当 $x_{00}=0$ 时, 由方程 (6.1.33c)

$$\delta J'_0(\delta)+\varepsilon a\alpha_0J_0(\delta)=0 \tag{6.1.34c}$$

利用 Bessel 函数的近似式 $J'_0(\delta)=-J_1(\delta)\approx-\delta/2$ 和 $J_0(\delta)\approx 1$, $\delta^2=2\varepsilon a\alpha_0$, 故对零本征值必须精确到 $\delta^2$, 即 $\lambda_{00}=\delta^2/a^2\approx 2\varepsilon\alpha/a$. 可见, 只要在式 (6.1.34b) 中取 $m^2/x_{nm}^2\to 0$ 即可.

值得指出的是：如果 $\alpha_0$ 是复的, 微扰的作用使本征值是复数, 尽管到一级近似, 在实际的物理系统中也是非常有意义的, 见例 6.1.7 讨论.

**本征函数展开法** 考虑本征方程 (6.1.30a), 零级近似 $\{\psi_n^{(0)}\}$ 满足方程 (6.1.30b). 因为 $\{\psi_n^{(0)}\}$ 是完备的正交函数系, 可以把 $\psi_n(\boldsymbol{r})$ 直接用 $\{\psi_j^{(0)}\}$ 来作广义 Fourier 展开

$$\psi_n(\boldsymbol{r})=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r});\ \ a_j=\int_G\rho[\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r})]^*\psi_n(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau \tag{6.1.35a}$$

注意: $\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r})$ 满足第二类边界条件, 而 $\psi_n(\boldsymbol{r})$ 满足第三类边界条件, 故式 (6.1.35a) 是在均方平均意义下的展开, 不能直接代入方程 (6.1.30a) 求展开系数 $a_j$. 利用 Green 公式 (6.1.27b), 取 $u\equiv(\psi_j^{(0)})^*$ 和 $v\equiv\psi_n$, 且由方程 (6.1.30a) 和 (6.1.30b) 中的边界条件, 得到

$$(\lambda_n-\lambda_j^{(0)})a_j\ =\varepsilon\sum_{q=0}^{\infty}a_q\chi_{qj} \tag{6.1.35b}$$

其中

$$\chi_{qj}\equiv\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\alpha(\boldsymbol{r})\psi_q^{(0)}(\boldsymbol{r})[\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r})]^*\mathrm{d}S \tag{6.1.35c}$$

方程 (6.1.35b) 改写成

$$\sum_{q=0}^{\infty}[(\lambda_n-\lambda_q^{(0)})\delta_{qj}\ -\varepsilon\chi_{qj}]a_q=0 \tag{6.1.36a}$$

显然, 上式是齐次的无穷联立代数方程组, 存在非零解的条件是系数行列式为零, 于是得到决定本征值 $\lambda_n$ 的方程

$$\det[(\lambda_n-\lambda_q^{(0)})\delta_{qj}-\varepsilon\chi_{qj}]=0 \tag{6.1.36b}$$

当 $q=j$ 时

$$\chi_{qq}=\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\alpha(\boldsymbol{r})|\psi_q^{(0)}(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}S \tag{6.1.36c}$$

不妨假定 $\chi_{qj}\approx0,\ (q\neq j)$, 则方程 (6.1.36b) 只有对角元素, 于是

$$\lambda_n\approx\lambda_n^{(0)}+\varepsilon\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\alpha(\boldsymbol{r})|\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}S \tag{6.1.36d}$$

显然, 上式与式 (6.1.30e) 的一级微扰结果完全一致. 系数 $\chi_{qj}$ 的物理意义是明确的: 对未微扰的零级近似, 每个本征模式 $\psi_n^{(0)}$ 是独立的; 由于微扰的作用, 原来独立的模式 $\psi_n^{(0)}$ 间产生相互耦合, $\chi_{qj}$ 表示相互耦合的强度. 近似 $\chi_{qj}\approx0,\ (q\neq j)$ 意味: 一级微扰忽略了模式间的相互耦合, 仅仅改变了本征值的大小. 当然如果 $\alpha(\boldsymbol{r})$ 是复的, 则微扰引进了模式的衰减, 这在声学中是十分重要的, 见例 6.1.7.

**Green 函数法** 以上介绍的本征函数展开法给出了本征值的一级微扰, 而无法给出本征函数的一级修正. 为此, 我们介绍用 Green 函数方法来求解本征函数系

$\{\psi_n(\boldsymbol{r})\}$ 和相应的本征值系列 $\{\lambda_n\}$, 该方法可以得到简洁的 $\psi_n(\boldsymbol{r})$ 和 $\lambda_n$ 的迭代方程. 考虑本征方程 (6.1.30a), 零级近似 $\{\psi_n^{(0)}\}$ 满足方程 (6.1.30b), 定义 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\\ \left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{\partial G}=0\end{gathered}\tag{6.1.37a}$$

容易得到用零级近似式展开的 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^{(0)}-\lambda_n}\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r})[\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*\tag{6.1.37b}$$

注意: 由于 $\lambda_n$ 可能是复数, Green 函数的对称性 (复共轭对称性) 不成立 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\neq G^*(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$. Green 公式 (6.1.27b) 中 $u=\psi_n$ 和 $v=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$

$$\begin{aligned}&\int_G[\psi_n(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{L}'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{L}'\psi_n(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}\tau'\\ =&-\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[\psi_n(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi_n(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{6.1.37c}$$

式中 “′” 表示对 $\boldsymbol{r}'$ 作用. 利用方程 (6.1.30a) 和 (6.1.37a), 上式给出

$$\psi_n(\boldsymbol{r})=-\varepsilon\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\alpha(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\tag{6.1.37d}$$

上式是关于 $\psi_n(\boldsymbol{r})$ 的第一类积分方程. 把 Green 函数式 (6.1.37b) 求和中的 $j=n$ 项分开, 上式转换为

$$\begin{aligned}\psi_n(\boldsymbol{r})=&-\frac{\varepsilon\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})}{\lambda_n^{(0)}-\lambda_n}\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\alpha(\boldsymbol{r}')[\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*\psi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\\ &-\varepsilon\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\alpha(\boldsymbol{r}')G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\end{aligned}\tag{6.1.37e}$$

其中

$$G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\equiv\sum_{j\neq n}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^{(0)}-\lambda_n}\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r})[\psi_j^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*\tag{6.1.37f}$$

注意到: ①方程 (6.1.37d) 是关于 $\psi_n$ 的齐次方程, 可以乘任意常数; ②当 $\varepsilon\to0$ 时, $\psi_n(\boldsymbol{r})\to\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})$ 和 $\lambda_n\to\lambda_n^{(0)}$. 因此可以取

$$-\frac{\varepsilon}{\lambda_n^{(0)}-\lambda_n}\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\alpha(\boldsymbol{r}')[\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*\psi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'=1\tag{6.1.38a}$$

于是, 我们得到本征函数 $\psi_n$ 和本征值 $\lambda_n$ 的积分方程

$$\psi_n(\boldsymbol{r}) = \psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}) - \varepsilon \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}')\alpha(\boldsymbol{r}')G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{6.1.38b}$$

$$\lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \varepsilon \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}')\alpha(\boldsymbol{r}')[\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*\psi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{6.1.38c}$$

显然, 上二式具有性质：当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\psi_n(\boldsymbol{r}) \to \psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})$ 和 $\lambda_n \to \lambda_n^{(0)}$. 一级近似可示为

$$\begin{gathered}\psi_n(\boldsymbol{r}) \approx \psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}) - \varepsilon \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}')\alpha(\boldsymbol{r}')G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \\ \lambda_n \approx \lambda_n^{(0)} + \varepsilon \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}')\alpha(\boldsymbol{r}')|\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}')|^2\mathrm{d}S'\end{gathered} \tag{6.1.38d}$$

上式第二式与方程 (6.1.36d) 的结果是一致的, 而这里我们容易得到本征函数的一阶近似!

**例 6.1.7**　求解有限区域 $G$ 内的波动方程, 初始条件可以忽略

$$\begin{gathered}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = f(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G \\ \left[\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial n} + \varepsilon\beta(\boldsymbol{r})\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right]_{\partial G} = 0\end{gathered} \tag{6.1.39a}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$ (声学问题中, $\varepsilon = 0$ 对应刚性墙), $\beta(\boldsymbol{r})$ 为实函数, 边界条件中出现对时间的导数, 这样复杂的边界条件来源于实际问题. 设第二类边界条件下 Laplace 算子本征值问题 (即方程 (6.1.30b), 取 $\boldsymbol{L} = -\nabla^2$ 和 $\rho(\boldsymbol{r}) = 1$) 的解为 $\{\psi_n^{(0)}\}$ 和 $\{\lambda_n^{(0)}\}$, 且 $\{\psi_n^{(0)}\}$ 形成正交、归一的完备系. 由于无需考虑初始条件, 通过 Fourier 变换把方程 (6.1.39a) 转换到频率域, 且利用 Fourier 变换的微分性质 (见 3.1.3 小节的式 (3.1.34d)), 得到

$$\begin{gathered}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},\omega) + \omega^2\psi(\boldsymbol{r},\omega) = f(\boldsymbol{r},\omega),\ \boldsymbol{r}\in G \\ \left[\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},\omega)}{\partial n} + \varepsilon\alpha(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},\omega)\right]_{\partial G} = 0\end{gathered} \tag{6.1.39b}$$

其中 $\alpha(\boldsymbol{r},\omega) \equiv -\mathrm{i}\omega\beta(\boldsymbol{r})$. 直接对 $\psi(\boldsymbol{r},\omega)$ 作广义 Fourier 展开

$$\psi(\boldsymbol{r},\omega) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}) \tag{6.1.39c}$$

其中展开系数为

$$c_n = \int_G \psi_n(\boldsymbol{r},\omega)[\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})]^*\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{6.1.39d}$$

取 $u=\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $v=[\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})]^*$, 由 Green 公式 (6.1.27b) 得到

$$\int_G [\psi\nabla^2(\psi_n^{(0)})^* - (\psi_n^{(0)})^*\nabla^2\psi]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \iint_{\partial G}\left[\psi\frac{\partial(\psi_n^{(0)})^*}{\partial n} - (\psi_n^{(0)})^*\frac{\partial\psi}{\partial n}\right]\mathrm{d}S \tag{6.1.40a}$$

利用方程 (6.1.30b)、(6.1.39b) 和 (6.1.39d), 上式给出

$$(\lambda_n^{(0)}-\omega^2)c_n + \varepsilon\sum_{m=0}^{\infty} c_m\chi_{nm} = \int_G [\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})]^* f(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{6.1.40b}$$

其中

$$\chi_{nm} \equiv \iint_{\partial G}\alpha(\boldsymbol{r})[\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})]^*\psi_m^{(0)}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{6.1.40c}$$

上式表明: 在微扰边界条件下, 区域 $G$ 中的场 $\psi(\boldsymbol{r},\omega)$ 可表示成零级本征模式的叠加, 但每个模式是相互耦合的!

当 $\varepsilon\to 0$ 时, 零级本征模式的相互耦合较弱, 可以取 $\chi_{nm}\approx 0$, $(n\neq m)$, 于是

$$(\lambda_n^{(0)}-\omega^2+\varepsilon\chi_{nn})c_n \approx \int_G [\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})]^* f(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{6.1.41a}$$

即

$$c_n \approx \frac{1}{\lambda_n^{(0)}-\omega^2+\varepsilon\chi_{nn}}\int_G [\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})]^* f(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{6.1.41b}$$

上式代入方程 (6.1.39c) 得到方程 (6.1.39b) 的一级近似解为

$$\psi(\boldsymbol{r},\omega) \approx \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega) f(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{6.1.42a}$$

其中 Green 函数定义为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})[\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*}{\lambda_n^{(0)}-\omega^2+\varepsilon\chi_{nn}} \tag{6.1.42b}$$

通过逆 Fourier 变换把方程 (6.1.42a) 转换到时域就得到方程 (6.1.39a) 的一级近似解

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\boldsymbol{r},\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})\int_G g_n(\boldsymbol{r}',t)[\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\end{aligned} \tag{6.1.43a}$$

其中

$$g_n(\boldsymbol{r}',t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)f(\boldsymbol{r}',\omega)}{\lambda_n^{(0)}-\omega^2+\varepsilon\chi_{nn}}\mathrm{d}\omega \tag{6.1.43b}$$

为了简单, 令源的形式为 $f(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\delta(t,t')\ /\ \mathrm{d}t$, 即 $t=t'$ 时刻, 源发出一个脉冲信号, 于是 $f(\boldsymbol{r},\omega)=-\mathrm{i}\omega f(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{i}\omega t')/2\pi$, 方程 (6.1.43b) 简化成

$$g_n(\boldsymbol{r}',t)\equiv-\frac{f(\boldsymbol{r}')}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[-\mathrm{i}\omega(t-t')]}{\omega^2-\lambda_n^{(0)}+\mathrm{i}\varepsilon\omega\delta_n}\mathrm{d}\omega \tag{6.1.43c}$$

其中

$$\delta_n\equiv\iint_{\partial G}\beta(\boldsymbol{r})|\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}S \tag{6.1.43d}$$

上式中频率的积分可用复变函数完成: 极点满足的方程为

$$\omega^2+\mathrm{i}\varepsilon\omega\delta_n-\lambda_n^{(0)}=0 \tag{6.1.44a}$$

二个极点近似为

$$\omega_\pm=\pm\sqrt{\lambda_n^{(0)}-\mathrm{i}\varepsilon\omega\delta_n}\approx\pm\sqrt{\lambda_n^{(0)}}-\mathrm{i}\gamma_n \tag{6.1.44b}$$

其中 $\gamma_n=\varepsilon\delta_n/2$. 显然, 二个极点位于复平面的下部, 当 $t-t'>0$, 取积分围道在下半平面, 如图 6.1.1, 于是

$$\begin{aligned}I(t)&\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[-\mathrm{i}\omega(t-t')]}{\omega^2-\lambda_n^{(0)}+\mathrm{i}\varepsilon\omega\delta_n}\mathrm{d}\omega\approx-2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}(\omega_+)+\mathrm{Res}(\omega_-)\right]\\&=-2\pi\mathrm{i}\left\{\frac{\exp[-\mathrm{i}\omega_+(t-t')]}{(\omega_+-\omega_-)}-\frac{\exp[-\mathrm{i}\omega_-(t-t')]}{(\omega_--\omega_+)}\right\}\end{aligned} \tag{6.1.44c}$$

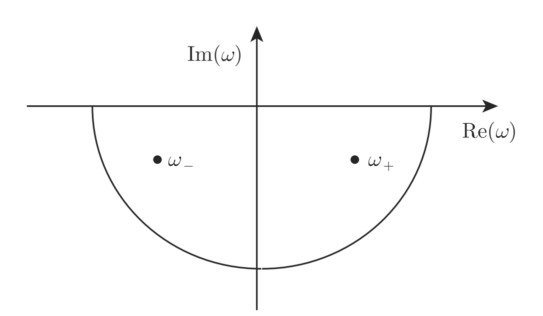



图 6.1.1 极点位于复平面的下部

上式中第一个等号后的 “−” 是因为积分围道在下半平面. 于是

$$I(t)\approx-2\pi\frac{\sin[\sqrt{\lambda_n^{(0)}}(t-t')]}{\sqrt{\lambda_n^{(0)}}}\mathrm{e}^{-\gamma_n(t-t')} \tag{6.1.45a}$$

如果 $t-t'<0$, 积分围道应该取上半平面, 而上半平面没有极点, 故积分为零. 上式代入方程 (6.1.43c) 和 (6.1.43a) 得到 (注意：微分仅对快速变化的正弦部分进行)

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r})\cos[\sqrt{\lambda_n^{(0)}}(t-t')]\exp[-\gamma_n(t-t')]\\ \cdot\displaystyle\int_G[\psi_n^{(0)}(\boldsymbol{r}')]^*f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}',\quad t>t'\\ 0,\quad t<t'\end{cases}\tag{6.1.45b}$$

上式的意义十分明确：微扰 $\alpha(\boldsymbol{r})$ 引起本征模随时间的衰减! 而 $\gamma_\lambda$ 出现在指数上, 即使 $\varepsilon\delta_n/2>0$ 很小, 足够长时间后, 本征模也衰减到零!

说明：对简并态微扰, 意义在于微扰的作用使简并消除, 在量子力学中对应于能级的分裂；对边界条件微扰 (经常在声学或电磁场工程中出现的情况), 意义在于微扰的作用使本征值是复数, 从而引进衰减.

### 6.1.4　区域微扰

考虑算子 $\boldsymbol{L}=-\nabla[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$ 的本征值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi_n=\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})\psi_n,\boldsymbol{r}\in G\\ \left.\left(\alpha\psi_n+\beta\frac{\partial\psi_n}{\partial n}\right)\right|_{\Gamma(\varepsilon)}=0\end{gathered}\tag{6.1.46a}$$

其中 $G$ 的边界 $\Gamma(\varepsilon)$ 含有小参数 $\varepsilon$. 当 $\varepsilon=0$ 时, $\Gamma(0)$ 是规则区域 (比如矩形或圆) 而当 $\varepsilon\ll1$, 区域的变化可看作微扰. 下面通过具体例子来说明如何求解上述问题.

考虑近似圆形膜的横向本征振动

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2u(\rho,\varphi,t)}{\partial t^2}=\nabla^2u(\rho,\varphi,t),\ (\rho,\varphi)\in G\\ u(\rho,\varphi,t)|_{\rho=0}<\infty;\ u(\rho,\varphi,t)|_{\rho=1+\varepsilon f(\varphi)}=0\end{gathered}\tag{6.1.46b}$$

膜的平均半径为 1, 而 $\varepsilon f(\varphi)$ 为偏差, 可视作微扰. 令

$$u(\rho,\varphi,t)=\psi(\rho,\varphi)\exp(\mathrm{i}\omega t)\tag{6.1.46c}$$

其中 $\omega$ 为待求的本征振动频率. 代入方程 (6.1.46b) 得

$$\begin{gathered}-\nabla^2\psi=\omega^2\psi,\ (\rho,\varphi)\in G\\ \psi|_{\rho=0}<\infty;\ \psi|_{\rho=1+\varepsilon f(\varphi)}=0\end{gathered}\tag{6.1.47a}$$

作微扰展开

$$\begin{aligned}&\psi=\psi^{(0)}(\rho,\varphi)+\varepsilon\psi^{(1)}(\rho,\varphi)+\cdots\\ &\omega=\omega^{(0)}+\varepsilon\omega^{(0)}+\cdots\end{aligned}\tag{6.1.47b}$$

代入方程 (6.1.47a) 得到 $\psi^{(0)}(\rho,\varphi)$ 和 $\psi^{(0)}(\rho,\varphi)$ 满足的方程及边界条件为

$$\begin{gathered}-\nabla^2\psi^{(0)}=(\omega^{(0)})^2\psi^{(0)}\\ \psi^{(0)}|_{\rho=0}<\infty;\ \psi^{(0)}|_{\rho=1}=0\end{gathered}\tag{6.1.48a}$$

及

$$\begin{gathered}-\nabla^2\psi^{(1)}-\omega_0^2\psi^{(1)}=2\omega^{(0)}\omega^{(1)}\psi^{(0)}\\ \psi^{(1)}|_{\rho=0}<\infty;\ \psi^{(1)}|_{\rho=1}=-\left.\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}f(\varphi)\end{gathered}\tag{6.1.48b}$$

上二式边界条件也可由下法求得：因 $\varepsilon\ll 1$, 故作 Taylor 展开

$$\begin{aligned}\psi(\rho,\varphi)|_{\rho=1+\varepsilon f(\varphi)}&=\psi[1+\varepsilon f(\varphi),\varphi]\\ &=\psi(1,\varphi)+\varepsilon\left.\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}\cdot f(\varphi)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=1}\cdot f^2(\varphi)+\cdots\end{aligned}\tag{6.1.48c}$$

由方程 (6.1.47a) 的边界条件和展开式 (6.1.47b), 到 $\varepsilon$ 一阶近似

$$\psi^{(0)}(1,\varphi)+\varepsilon\psi^{(1)}(1,\varphi)+\varepsilon\left.\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}\cdot f(\varphi)+\cdots=0\tag{6.1.49a}$$

可推得

$$\psi^{(0)}(1,\varphi)=0;\ \psi^{(1)}(1,\varphi)+\left.\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}\cdot f(\varphi)=0\tag{6.1.49b}$$

上式就是方程 (6.1.48a) 和 (6.1.48b) 中的边界条件.

零级近似方程 (6.1.48a) 解容易求得为 (注意：为了方便, 上式写成实数形式)

$$\begin{gathered}\psi^{(0)}(\rho,\varphi)=J_m(x_{nm}\rho)(a_{nm}^c\cos m\vartheta+a_{nm}^s\sin m\vartheta)\\ (m=0,1,2,\cdots)\end{gathered}\tag{6.1.50a}$$

其中 $x_{nm}$ 是 $m$ 阶 Bessel 函数 $J_m$ 的第 $n$ 个零点: $J_m(x_{nm})=0$; 本征振动频率 $\omega$ 的零级近似 $\omega_{nm}^{(0)}=x_{nm}$. 故当 $m\neq 0$ 时, 对每一个 $\omega_{nm}^{(0)}=x_{nm}$ 存在两个线性独立的本征函数

$$\psi_{cnm}^{(0)}=J_m(x_{nm}\rho)\cos m\varphi;\ \psi_{snm}^{(0)}=J_m(x_{nm}\rho)\sin m\varphi\tag{6.1.50b}$$

因此, 当 $m\neq 0$ 时, $x_{nm}$ 二度简并, 取微扰后的零级近似本征函数 $\psi_{nm}^{(0)}$ 为

$$\psi_{nm}^{(0)}=a_{mn}\ \psi_{cnm}^{(0)}+b_{nm}\psi_{snm}^{(0)}\tag{6.1.50c}$$

代入方程 (6.1.48b) 得

$$
\begin{aligned}
&-\nabla^2\psi^{(1)}-x_{mn}^2\psi^{(1)}=2x_{nm}\omega^{(1)}\psi_{nm}^{(0)}\\
&\psi^{(1)}|_{\rho=1}=-\left.\frac{\partial\psi_{nm}^{(0)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}\cdot f(\vartheta)
\end{aligned}
\tag{6.1.50d}
$$

用 $\psi_{cnm}^{(0)}$ 乘方程 (6.1.50d) 的第一式两边, 并在圆域内 ($\rho<1$) 积分

$$
\begin{aligned}
\text{右边}&=\int_0^1\int_0^{2\pi}2x_{nm}\omega^{(1)}\psi_{nm}^{(0)}\psi_{cnm}^{(0)}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\\
&=2x_{nm}\omega^{(1)}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left[a_{mn}(\psi_{cnm}^{(0)})^2+b_{mn}\psi_{snm}^{(0)}\psi_{cnm}^{(0)}\right]\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\\
&=2x_{nm}\omega^{(1)}\pi a_{mn}\int_0^1J_m^2(x_{nm}\rho)\rho\mathrm{d}\rho=x_{mn}\omega^{(1)}\pi {J'}_m^2(x_{nm})a_{mn}
\end{aligned}
\tag{6.1.51a}
$$

其中已利用 $\psi_{cnm}^{(0)}$ 和 $\psi_{snm}^{(0)}$ 正交性关系以及 Bessel 函数的积分关系

$$
\int_0^\rho J_m^2(k\rho')\rho'\mathrm{d}\rho'=\frac{1}{2}\rho^2{J'}_m^2(k\rho)+\frac{1}{2}\rho^2\left(1-\frac{m^2}{k^2\rho^2}\right)J_m^2(k\rho)
\tag{6.1.51b}
$$

当 $\rho=1$ 和 $J_m(x_{nm})=0$ 时

$$
\int_0^1J_m^2(x_{nm}\rho)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}{J'}_m^2(x_{nm})
\tag{6.1.51c}
$$

另一方面, 对左边积分

$$
\text{左边}=-\int_G\psi_{cnm}^{(0)}\nabla^2\psi^{(1)}\mathrm{d}S-x_{nm}^2\int_G\psi_{cnm}^{(0)}\psi^{(1)}\mathrm{d}S
\tag{6.1.52a}
$$

利用二维 Green 公式 (其中 $\mathrm{d}L$ 是线元)

$$
\int_G\psi_{cnm}^{(0)}\nabla^2\psi^{(1)}\mathrm{d}S=\int_G\psi^{(1)}\nabla^2\psi_{cnm}^{(0)}+\oint_{\partial G}\left(\psi_{cnm}^{(0)}\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial n}-\psi^{(1)}\frac{\partial\psi_{cnm}^{(0)}}{\partial n}\right)\mathrm{d}L
$$

以及 $\psi_{cnm}^{(0)}$ 满足的方程及边界条件: $-\nabla^2\psi_{cnm}^{(0)}=x_{nm}^2\psi_{cnm}^{(0)}$ 和 $\psi_{cnm}^{(0)}|_{\rho=1}=0$, 我们得到

$$
\begin{aligned}
\text{左边}&=\oint_{\partial G}\left.\left(\frac{\partial\psi_{mn}^{(0)}}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\psi_{cnm}^{(0)}}{\partial\rho}\right)\right|_{\rho=1}\cdot f(\varphi)\mathrm{d}L\cdot\\
&=x_{mn}^2{J'}_{mn}^2(x_{mn})(a_{nm}\alpha_m+b_{nm}\beta_m)
\end{aligned}
\tag{6.1.52b}
$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_m &= \int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos^2 m\varphi \mathrm{d}\varphi \\ \beta_m &= \int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin m\varphi\cos m\varphi \mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{6.1.52c}$$

由式 (6.1.51a) 和 (6.1.52a) 得

$$(a_{nm}\alpha_m + b_{nm}\beta_m)x_{nm}^2 {J'}_{nm}^2(x_{nm}) = x_{nm}\omega^{(1)}\pi {J'}_m^2(x_{nm})a_{nm} \tag{6.1.52d}$$

即

$$a_{nm}\left(\alpha_m - \frac{\omega^{(1)}\pi}{x_{nm}}\right) + b_{nm}\beta_m = 0 \tag{6.1.53a}$$

同样, 以 $\psi_{smn}^{(0)}$ 乘方程 (6.1.50d) 的第一式两边且在圆域内 $(\rho < 1)$ 积分, 可得

$$a_{mn}\gamma_m + b_{mn}\left(\mu_m - \frac{\omega^{(1)}\pi}{x_{nm}}\right) = 0 \tag{6.1.53b}$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma_m &= \int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos m\varphi\sin m\varphi \mathrm{d}\varphi = \beta_m \\ \mu_m &= \int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin^2 m\varphi \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi - \alpha_m\end{aligned} \tag{6.1.53c}$$

方程 (6.1.53a) 和 (6.1.53b) 有解的条件是系数行列式为零, 即

$$\left(\alpha_m - \frac{\omega^{(1)}\pi}{x_{nm}}\right)\left(\mu_m - \frac{\omega^{(1)}\pi}{x_{nm}}\right) - \beta_m\gamma_m = 0 \tag{6.1.54a}$$

如果 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0$, $\mu_m = -\alpha_m$, 容易可求得 $\omega^{(0)}$ 的两个根

$$\omega_{\pm}^{(1)} = \pm x_{mn}\frac{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}}{\pi} \tag{6.1.54b}$$

因此, 我们求得本征振动频率的一级近似解为

$$\omega_{nm}^{\pm} = x_{nm}\left(1 \pm \varepsilon\frac{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}}{\pi}\right), \quad (m \geqslant 1) \tag{6.1.54c}$$

由式 (6.1.50c), 相应的零级近似本征振动为 $(m \geqslant 1)$

$$u^{\pm}(\rho,\varphi,t) = (a_{nm}^{\pm}\psi_{cnm}^{(0)} + b_{mn}^{\pm}\psi_{snm}^{(0)})\exp(\mathrm{i}\omega_{nm}^{\pm}t) \tag{6.1.54d}$$

如果 $\alpha_m \neq 0$ 或者 $\beta_m \neq 0$, 由于微扰而使简并消除. 当 $m=0$ 时, 如果

$$\alpha_0 = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos^2 m\varphi \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0 \tag{6.1.55a}$$

而且 $\beta_0 = \gamma_0 = \mu_0 = 0$, 方程 (6.1.53a) 和 (6.1.53b) 变成

$$b_{0n} = 0;\ a_{0n}\left(\alpha_0 - \omega^{(1)}\frac{\pi}{x_{0n}}\right) = 0 \tag{6.1.55b}$$

故 $\omega^{(1)} = \alpha_0 x_{0n}/\pi = 0$, 即在一级近似下, 微扰对 $m=0$ 本征态无影响.

**例 6.1.8** 半径为 1 的圆区域由于微扰变成椭圆

$$\rho^2 = \frac{1}{1+2\varepsilon\cos^2\varphi} \approx 1 - 2\varepsilon\cos^2\varphi \tag{6.1.56a}$$

故 $\rho \approx 1 - \varepsilon\cos^2\varphi$; $f(\varphi) = -\cos^2\varphi$; $\alpha_0 = -\pi$ (注意: $\int_0^{2\pi} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi \neq 0$). 因此, 当 $m=0$ 时, 零级本征函数及一级近似本征值为

$$\psi_{0n}^{(0)} = a_{0n}J_0(x_{0n}\rho); \quad \omega_{0n} \approx x_{0n}(1-\varepsilon) \tag{6.1.56b}$$

当 $\varepsilon > 0$ 时, 椭圆大于圆区域, 故本征值变小; $\varepsilon < 0$ 时, 椭圆小于圆区域, 本征值变大, 这与第四章的结论是一致的.

### 6.1.5 Schrödinger 方程的含时微扰

考虑色散型 Schrödinger 方程的初值问题

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{L}\psi(\boldsymbol{r},t),\ t>0 \\ &\psi(\boldsymbol{r},t)|_{t=0} = \psi_0(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{6.1.57a}$$

设算子可表示成 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0 + \varepsilon\boldsymbol{L}_1(t)$, 其中 $\boldsymbol{L}_0$ 不显含时间且本征值问题

$$\boldsymbol{L}_0\psi_n(\boldsymbol{r}) = \lambda_n\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{6.1.57b}$$

精确可解, 即已经求得正交、归一的完备系 $\{\psi_n, \lambda_n\}$.

当 $\varepsilon = 0$ 时, $\psi^{(0)}(\boldsymbol{r},t)$ 满足方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi^{(0)}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{L}_0\psi^{(0)}(\boldsymbol{r},t),\ t>0 \tag{6.1.57c}$$

通解为

$$\psi^{(0)}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(0)}(t)\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{6.1.58a}$$

系数 $a$ 满足

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a_n^{(0)}(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_n a_n^{(0)}(t),\ t>0 \tag{6.1.58b}$$

即

$$a_n^{(0)}(t)=a_n^{(0)}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\lambda_n}{\hbar}t\right) \tag{6.1.58c}$$

系数 $a_n^{(0)}$ 由初始条件 $\psi(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\psi_0(\boldsymbol{r})$ 决定为 $a_n^{(0)}=(\psi_n,\psi_0)$. 上式代入式 (6.1.58a) 得到

$$\psi^{(0)}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,\psi_0)\psi_n(\boldsymbol{r})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\lambda_n}{\hbar}t\right) \tag{6.1.58d}$$

当 $\varepsilon\neq 0$ 时, 可设方程 (6.1.57a) 的解为

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\psi_n(\boldsymbol{r})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\lambda_n}{\hbar}t\right) \tag{6.1.59a}$$

由初始条件得到

$$\psi_0(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(0)\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{6.1.59b}$$

即

$$a_n(0)=(\psi_n,\psi_0) \tag{6.1.59c}$$

式 (6.1.59a) 代入方程 (6.1.57a) 得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\hbar\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\lambda_n}{\mathrm{i}\hbar}a_n(t)\right]\psi_n(\boldsymbol{r})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\lambda_n}{\hbar}t\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)[\boldsymbol{L}_0+\varepsilon\boldsymbol{L}_1(t)]\psi_n(\boldsymbol{r})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\lambda_n}{\hbar}t\right)\end{aligned} \tag{6.1.59d}$$

两边乘 $\psi_m^*(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{i}\lambda_m t/\hbar)$ 并且对空间积分得到

$$\mathrm{i}\hbar\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t}\delta_{nm}=\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)L_{mn}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)] \tag{6.1.60a}$$

其中 $L_{mn}(t)\equiv(\psi_m,\boldsymbol{L}_1\psi_n)$ 和 $\omega_{mn}\equiv(\lambda_m-\lambda_n)/\hbar$. 上式即为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a_m(t)}{\mathrm{d}t}=\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)L_{mn}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t) \tag{6.1.60b}$$

当 $\varepsilon\ll 1$ 时, 引进微扰解

$$a_m(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k a_m^{(k)}(t) \tag{6.1.60c}$$

代入方程 (6.1.60b) 和 (6.1.59c) 得到

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\hbar\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{\mathrm{d}a_m^{(k)}(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k a_n^{(k)}(t)\varepsilon L_{mn}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)\\ \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k a_m^{(k)}(0)=(\psi_m,\psi_0)\end{gathered}\tag{6.1.60d}$$

比较 $\varepsilon$ 的同次幂得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon^0:\quad \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a_m^{(0)}(t)}{\mathrm{d}t}=0\\ &\varepsilon^1:\quad \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a_m^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(0)}(t)L_{mn}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)\\ &\varepsilon^2:\quad \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a_m^{(2)}(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(1)}(t)L_{mn}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)\\ &\qquad\quad \cdots\cdots\end{aligned}\tag{6.1.61a}$$

以及初始条件

$$a_m^{(0)}(0)=(\psi_m,\psi_0);\ \ a_m^{(k)}(0)=0,\ (k=1,2,\cdots)\tag{6.1.61b}$$

由方程 (6.1.61a) 的第一式得零级近似的解为：$a_m^{(0)}(t)=(\psi_m,\psi_0)$(常数). 由方程 (6.1.61a) 的第二式得一级近似满足的方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a_m^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,\psi_0)L_{mn}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)\tag{6.1.61c}$$

和初始条件 $a_m^{(1)}(0)=0$. 于是, 一级近似为

$$a_m^{(1)}(t)=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,\psi_0)\int_0^t L_{mn}(t')\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t')\mathrm{d}t'\tag{6.1.61d}$$

上式代入式 (6.1.59a) 得到方程 (6.1.57a) 的一级近似解为

$$\psi(\boldsymbol{r},t)\approx\sum_{n=1}^{\infty}[(\psi_n,\psi_0)+\varepsilon a_n^{(1)}(t)]\psi_n(\boldsymbol{r})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\lambda_n}{\hbar}t\right)\tag{6.1.62a}$$

为了看清上式的物理意义, 设初始条件恰好为第 $p$ 故本征函数, 即 $\psi_0(\boldsymbol{r})=\psi_p(\boldsymbol{r})$. 于是 $(\psi_n,\psi_0)=(\psi_n,\psi_p)=\delta_{np}$, 代入式 (6.1.62a)

$$\psi(\boldsymbol{r},t)\approx\psi_p(\boldsymbol{r})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\lambda_p}{\hbar}t\right)+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(1)}(t)\psi_n(\boldsymbol{r})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\lambda_n}{\hbar}t\right)\tag{6.1.62b}$$

其中

$$a_n^{(1)}(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t L_{np}(t')\exp(\mathrm{i}\omega_{np}t')\mathrm{d}t' \tag{6.1.62c}$$

对照微扰为零的情况, 由式 (6.1.58d)

$$\psi^{(0)}(\boldsymbol{r},t) = \psi_p(\boldsymbol{r})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\lambda_p}{\hbar}t\right) \tag{6.1.63a}$$

即系统永远处于本征函数 $\psi_p(\boldsymbol{r})$ 的状态. 当微扰不为零时, 式 (6.1.62b) 表明, 系统向其他本征态 “跃迁”, “跃迁” 到本征态 $\psi_q(\boldsymbol{r})$ 的**跃迁概率**为 $W_{p\to q} \equiv |a_m^{(1)}(t)|^2$, 即

$$W_{p\to q} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t L_{qp}(t')\exp(\mathrm{i}\omega_{qp}t')\mathrm{d}t'\right|^2 \tag{6.1.63b}$$

上式在量子力学中讨论量子跃迁有重要的应用.

## 6.2 正则微扰和多尺度展开

由 6.1 节可看出, 本征值问题微扰的一个特点是零级近似可解, 这样的微扰称之为**正则微扰**. 正则微扰一般不改变问题的基本性质, 特别是方程的阶数. 但是如果小参数 $\varepsilon$ 出现在方程的高阶导数上, 定解问题的性质由于 $\varepsilon \neq 0$ 而完全改变, 而且这时零级近似一般是超定的, 这样的微扰称之为**奇异微扰**. 我们将在 6.3 节详细讨论之.

### 6.2.1 一致有效展开

当所考虑问题定义在有限区域 $G$ 内时, 一般能得到在 $G$ 上一致有效展开, 但如果问题是无界的 (如 $t > 0$), 则微扰展开往往只在某一区间才成立. 这时在不同的区间应有不同的展开式. 我们首先讨论前一种情形, 并以具体例子来说明之.

**例 6.2.1** 平面上单位圆内的第一类边值问题

$$\nabla^2\psi + \varepsilon^2\psi = 0,\ \boldsymbol{r} \in G;\ \psi|_{r=1} = 1 \tag{6.2.1a}$$

其中 $\varepsilon \ll 1$, 区域 $G$ 为圆内 $x^2 + y^2 < 1$. 作微扰展开

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}\psi_n \tag{6.2.1b}$$

代入方程 (6.2.1a) 并比较 $\varepsilon$ 的同次幂, 可得 $\psi_0$ 满足的方程及边界条件

$$\nabla^2\psi_0 = 0;\quad \psi_0|_{r=1} = 1 \tag{6.2.1c}$$

可见零级近似 $\psi_0$ 满足 Laplace 方程及第一类边值条件, 而 $\psi_n$, $(n \geqslant 1)$ 满足 Possion 方程及第一类边值条件

$$\nabla^2\psi_n = -\psi_{n-1},\ (n \geqslant 1);\quad \psi_n|_{r=1} = 0 \tag{6.2.1d}$$

从方程 (6.2.1c) 可解得 $\psi_0(r) = 1$. 考虑一阶近似 $\psi_1$

$$\nabla^2\psi_1 = -\psi_0 = -1;\quad \psi_1|_{r=1} = 0 \tag{6.2.2a}$$

在极坐标内上式变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}r}\right) = -r \tag{6.2.2b}$$

积分两次并利用方程 (6.2.2a) 中的边界条件可得

$$\psi = \frac{1-r^2}{4} \tag{6.2.2c}$$

因此, 近似到 $\varepsilon^2$, 方程 (6.2.1a) 的解为

$$\psi(r) = 1 + \varepsilon^2\left(\frac{1-r^2}{4}\right) + O(\varepsilon^4) \tag{6.2.3a}$$

而方程 (6.2.1a) 的严格解为

$$\psi(r) = \frac{J_0(\varepsilon r)}{J_0(\varepsilon)} \tag{6.2.3b}$$

当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 因 $r \leqslant 1$, 故 $\varepsilon r \ll 1$, 上式作展开

$$\frac{J_0(\varepsilon r)}{J_1(\varepsilon)} = \frac{1-(\varepsilon r)^2/4 + O(\varepsilon^4)}{1-\varepsilon^2/4 + O(\varepsilon^4)} \approx 1 + \varepsilon^2\left(\frac{1-r^2}{4}\right) + O(\varepsilon^4) \tag{6.2.3c}$$

可知, 只要 $\varepsilon \ll 1$, 式 (6.2.3a) 是严格解的一个很好近似, 而且近似解在整个区域 $G$ 内都成立.

**例 6.2.2** 边界区域的微扰. 考虑 $G$ 内 Laplace 方程的第一类边值问题

$$\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2} = 0,\ (x,y) \in G \tag{6.2.4a}$$

区域为 $G:\ [0 < x < l_x,\ \varepsilon x < y < l_y]$, 如图 6.2.1. 边界条件为

$$\begin{gathered}\psi|_{x=0} = \psi|_{x=l_x} = 0\\ \psi|_{y=l_y} = 0;\ \psi|_{y=\varepsilon x} = f(x)\end{gathered} \tag{6.2.4b}$$

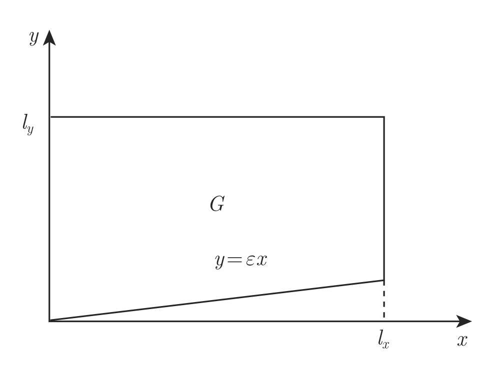



图 6.2.1　区域的微扰

作微扰展开

$$\psi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\psi_n(x,y) \tag{6.2.4c}$$

代入方程 (6.2.4a), $\psi_n(x,y)$ 满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_n}{\partial y^2}=0 \tag{6.2.5a}$$

下面求 $\psi_0$ 和 $\psi_1$ 满足的边界条件: 对 $\psi_0(x,y)$ 显然有

$$\begin{gathered}\psi_0|_{x=0}=\psi_0|_{x=l_x}=0\\ \psi_0|_{y=l_y}=0;\ \psi_0|_{y=0}=f(x)\end{gathered} \tag{6.2.5b}$$

为求 $\psi_1$ 满足的边界条件, 把方程 (6.2.4b) 的边界条件作展开

$$\psi(x,\varepsilon x)\approx\psi(x,0)+\varepsilon x\frac{\partial\psi(x,0)}{\partial y}=f(x) \tag{6.2.5c}$$

把式 (6.2.4c) 代入上式

$$\psi_0(x,0)+\varepsilon\left[\psi_1(x,0)+x\frac{\partial\psi_0(x,0)}{\partial y}\right]+O(\varepsilon^2)=f(x) \tag{6.2.5d}$$

因此 $\psi_1(x,y)$ 满足的边界条件为

$$\begin{gathered}\psi_1|_{x=0}=\psi_1|_{x=l_x}=0\\ \psi_1|_{y=l_y}=0;\ \psi_1|_{y=0}=-x\left.\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right|_{y=0}\end{gathered} \tag{6.2.5e}$$

容易求得零级近似 $\psi_0$ 为

$$\psi_0(x,y)=\sqrt{\frac{2}{l_x}}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sinh\left[\frac{k\pi(l_y-y)}{l_x}\right]\sin\left(\frac{k\pi x}{l_x}\right) \tag{6.2.5f}$$

其中

$$b_k=\sqrt{\frac{2}{l_x}}\frac{1}{\sinh(k\pi l_y/l_x)}\int_0^{l_x}f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l_x}\right)\mathrm{d}x \tag{6.2.5g}$$

利用式 (6.2.5f) , 边界方程 (6.2.5e) 的第三式变成

$$\psi_1(x,y)|_{y=0}=\sqrt{\frac{2}{l_x}}\sum_{k=1}^{\infty}xb_k\left(\frac{k\pi}{l_x}\right)\cosh\left(\frac{k\pi l_y}{l_x}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l_x}\right) \tag{6.2.6a}$$

于是, 一级微扰解为

$$\psi_1(x,y)=\sqrt{\frac{2}{l_x}}\sum_{k=1}^{\infty}b_k'\sinh\left[\frac{k\pi(l_y-y)}{l_x}\right]\sin\left(\frac{k\pi x}{l_x}\right) \tag{6.2.6b}$$

其中

$$b_k'=\sqrt{\frac{2}{l_x}}\frac{1}{\sinh(k\pi l_y/l_x)}\int_0^{l}\psi_1(x,0)\sin\left(\frac{k\pi x}{l_x}\right)\mathrm{d}x \tag{6.2.6c}$$

由于在区间 $0<x<l_x$ 内, 式 (6.2.6b) 一致收敛, 故当 $\varepsilon\to 0$ 时, $\psi\to\psi_0$. 因此上述边界区域的微扰是稳定的.

**例 6.2.3** 设 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{L}_1\psi$ 是线性或非线性算子, 但其包含的偏导数阶数不超过两阶, 在 $G$ 内考虑边值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi+\varepsilon\boldsymbol{L}_1\psi=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left.\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered} \tag{6.2.7a}$$

设 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数系 $\{\psi_n\}$ 构成完备的正交、归一系, 相应的本征值为 $\lambda_n$, 则 $\boldsymbol{L}$ 的 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})}{\lambda_n} \tag{6.2.7b}$$

这时方程 (6.2.7a) 可化成积分方程

$$\psi(\boldsymbol{r})=f_1(\boldsymbol{r})-\varepsilon\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{L}_1\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{6.2.7c}$$

其中

$$f_1(\boldsymbol{r})\equiv\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{6.2.7d}$$

如果 $\boldsymbol{L}_1\psi$ 是非线性算子, 方程 (6.2.7c) 是 Hammerstein 积分方程. 当 $\varepsilon$ 足够小时, 可用迭代法求解, 只要 $\boldsymbol{L}_1\psi$ 有较好的性质 (参看第五章). 考虑简单情形 $\boldsymbol{L}_1\psi=-g(\boldsymbol{r})\psi$, 方程 (6.2.7c) 变成线性积分方程

$$\psi(\boldsymbol{r})=f_1(\boldsymbol{r})+\varepsilon\int_G g(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{6.2.8a}$$

如果 $\varepsilon$ 满足

$$|\varepsilon|^2 \cdot ||k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|| \ll 1 \tag{6.2.8b}$$

其中 $k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=g(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, 用迭代法解方程 (6.2.8a)

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{6.2.9a}$$

近似解即为

$$\begin{aligned}\psi_0(\boldsymbol{r})&=f_1(\boldsymbol{r})=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\ \psi_1(\boldsymbol{r})&=\int_G k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_0(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\ &\cdots\\ \psi_n(\boldsymbol{r})&=\int_G k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_{n-1}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\end{aligned} \tag{6.2.9b}$$

由此可见, 利用 Green 函数和积分方程理论能给问题的讨论带来很大的方便.

**例 6.2.4** 考虑一维边值问题

$$\begin{aligned}&-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\varepsilon(\sin\pi x)\psi=\sin\pi x,\ \ x\in(0,1)\\ &\psi|_{x=0}=\psi|_{x=1}=0\end{aligned} \tag{6.2.10a}$$

算子 $\boldsymbol{L}=-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ 的本征值为 $\lambda_n=n^2\pi^2$, 相应的本征函数为 $\psi_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x$, 故 Green 函数为

$$G(x,x')=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\sin n\pi x'}{n^2\pi^2} \tag{6.2.10b}$$

于是, 零级近似解和一级修正为

$$\begin{aligned}\psi_0(x)&=\int_0^1 G(x,x')\sin\pi x'\mathrm{d}x'=\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x\\ \psi_1(x)&=-\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 G(x,x')\sin^2\pi x'\mathrm{d}x'\end{aligned} \tag{6.2.10c}$$

利用 $G(x,x')$ 的另一表达式

$$G(x,x')=\begin{cases}x(x'-1), & 0\leqslant x\leqslant x'\leqslant 1\\ x'(x-1), & 0\leqslant x'\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{6.2.11a}$$

方程 (6.2.10c) 的第二式变成

$$\begin{aligned}\psi_1(x)&=-\frac{1}{\pi^2}\left[(x-1)\int_0^x x'\sin^2\pi x'\mathrm{d}x'+x\int_x^1(x'-1)\sin^2\pi x'\mathrm{d}x'\right]\\ &=\frac{1}{4\pi^2}(x-1)x+\frac{1}{8\pi^2}(\cos 2\pi x-1)\end{aligned} \tag{6.2.11b}$$

因此, 方程 (6.2.10a) 的近似解为

$$\psi(x)=\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x+\varepsilon\left[\frac{1}{4\pi^2}(x^2-x)+\frac{1}{8\pi^4}(\cos 2\pi x-1)\right]+O(\varepsilon^2) \qquad (6.2.11c)$$

### 6.2.2 非一致有效展开和参数变形法

当考虑的问题定义在无界区域 (典型的问题是涉及时间变量的初值问题 ($t>0$)), 微扰展开往往只在某一区间才成立. 考虑下列定义在 $x\in(0,l)$ 和 $t\in(0,\infty)$ 上的混合问题

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\varepsilon u(x,t)=0 \qquad (6.2.12a)$$

边界条件和初始条件为

$$\begin{gathered} u|_{x=0}=u|_{x=l}=0,\ t\in(0,\infty)\\ u|_{t=0}=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l};\ u_t|_{t=0}=0 \end{gathered} \qquad (6.2.12b)$$

其中 $\varepsilon\ll 1$ 可看作微扰, 令微扰级数为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n u_n(x,t) \qquad (6.2.12c)$$

代入方程 (6.2.12a) 和 (6.2.12b), $u_0(x,t)$ 和 $u_1(x,t)$ 满足的方程及定解条件

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=0,\ x\in(0,l),\ t\in(0,\infty)\\ u_0|_{x=0}=u_0|_{x=l}=0\\ u_0|_{t=0}=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l};\ \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \end{gathered} \qquad (6.2.13a)$$

及

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=-u_0,\ x\in(0,l),\ t\in(0,\infty)\\ u_1|_{x=0}=u_1|_{x=l}=0;\ u_1|_{t=0}=0;\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \end{gathered} \qquad (6.2.13b)$$

显然, 方程 (6.2.13a) 的解为

$$u_0(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi t}{l} \qquad (6.2.14a)$$

代入方程 (6.2.13b) 不难得到

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= -\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\int_0^t \sin\frac{\pi(t-\tau)}{l}\cos\frac{\pi\tau}{l}\mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{l}{2}}t\sin\frac{\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l} \end{aligned} \tag{6.2.14b}$$

因此近似到 $\varepsilon$ 级, 方程 (6.2.12a) 和 (6.2.12b) 的解为

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\left(\cos\frac{\pi t}{l} - \frac{\varepsilon t}{2\pi}l\sin\frac{\pi}{l}t\right) + O(\varepsilon^2) \tag{6.2.14c}$$

显然, 上式只有当 $\varepsilon t \ll 1$ 时才成立, 当经过足够长的时间 $t \sim 1/\varepsilon$ 后, 第二项将超过第一项, 微扰展开式 (6.2.12c) 已没有意义. 因此在整个时轴上, 上式不是一致有效的展开, 它仅在 $t \ll 1/\varepsilon$ 时间内才成立. 上式第二项称为**久期项**(secular term).

为了考察久期项产生的原因, 我们来严格求解定解问题式 (6.2.12a) 和 (6.2.12b), 用分离变数法不难求得严格解为

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\left[\left(\frac{\pi^2}{l^2}+\varepsilon\right)^{1/2}t\right] \tag{6.2.15a}$$

当 $\varepsilon \ll \pi^2/l^2$ 时, 利用展式

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{\pi^2}{l^2}+\varepsilon} \approx \frac{\pi}{l}\left(1+\frac{l^2}{2\pi^2}\varepsilon\right) \tag{6.2.15b}$$

于是式 (6.2.15a) 变成

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi}{l}\left(1+\frac{l^2}{2\pi^2}\varepsilon\right)t \\ &= \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\left(\cos\frac{\pi t}{l}\cos\frac{l}{2\pi}\varepsilon t - \sin\frac{\pi t}{l}\sin\frac{l}{2\pi}\varepsilon t\right) \end{aligned} \tag{6.2.15c}$$

又当 $\varepsilon t \ll 1$ 时, 上式近似为

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\left(\cos\frac{\pi t}{l} - \frac{\varepsilon t}{2\pi}l\sin\frac{\pi t}{l}\right) \tag{6.2.15d}$$

即为式 (6.2.14c). 因此, 式 (6.2.14c) 仅仅是严格解展开的第一项, 当 $\varepsilon t \sim 1$ 时, 幂级数应取无穷多项, 展开的每一项 $u_n$ 都要考虑进去, 否则将出现发散项, 即久期项. 当问题涉及到无界区域时, 久期项的产生是微扰展开的普遍现象, 为了仍能应用微扰法求解实际问题, 产生了消除久期项的许多办法, 其中最简单的即是**变形参数法**.

**变形参数法** 为了说明变形参数法的基本思想, 仍考虑上述例子. 分析严格解可知, 微扰的作用实际上仅仅改变了频率, 而展式 (6.2.12c) 显然是不恰当的. 因此, 我们必须把频率 $\omega$ 也作 $\varepsilon$ 展开

$$\omega=\omega_0(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots) \tag{6.2.16a}$$

显然, 上式相当于自变量 $t$ 作变换, 即**变形参数**

$$\tau=t(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots) \tag{6.2.16b}$$

把 $u$ 作式 (6.2.12c) 展开的同时, 把参数 $t$ 也作变形展开就是变形参数法的基本思想, 其中 $(\omega_1,\omega_2,\cdots)$ 的选择可消去久期项.

下面利用变形参数法求解方程 (6.2.12a) 和 (6.2.12b), 把展开式 (6.2.12c) 和 (6.2.16b) 代入方程 (6.2.12a) 和 (6.2.12b), 比较 $\varepsilon$ 的同次幂得

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=0,\ x\in(0,l),\ t\in(0,\infty)\\ u_0|_{\tau=0}=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l};\quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0\end{gathered} \tag{6.2.17a}$$

以及

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=-\left(2\omega_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial\tau^2}+u_0\right)\\ u_1|_{\tau=0}=0;\quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0\end{gathered} \tag{6.2.17b}$$

由方程 (6.2.17a) 得

$$u_0(x,\tau)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi\tau}{l} \tag{6.2.18a}$$

代入方程 (6.2.17b) 得 $u_1$ 满足的方程

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=-\left(-\frac{2\pi^2\omega_1}{l^2}+1\right)u_0 \tag{6.2.18b}$$

为了消去久期项, 只要令 $-2\omega_1\pi^2/l^2+1=0$ 即可, 于是取 $\omega_1=l^2/(2\pi^2)$. 因方程 (6.2.17b) 中初值和非齐次项都为零, 故 $u_1=0$. 于是有解

$$\begin{aligned}u(x,t)&\approx\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\left[\frac{\pi}{l}(1+\varepsilon\omega_1)t\right]\\ &=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\left[\frac{\pi}{l}\left(1+\frac{l^2}{2\pi^2}\varepsilon\right)t\right]\end{aligned} \tag{6.2.18c}$$

上式即为式 (6.2.15c). 可见参数变形法能给出较好的结果. 注意：参数变形法在 $\varepsilon t\sim 1$ 也能给出比较好的结果, 但时间进一步增长到 $\varepsilon^2 t\sim 1$ 时, 又必须考虑展开式 (6.2.15b) 中 $\varepsilon^2$ 项, 因为 $\varepsilon^2 t$ 出现在余弦函数中, 其贡献是不能忽略的.

下面我们用参数变形法来分析几个非线性问题.

### 6.2.3 参数变形法应用于非线性振动和波动

考虑单摆的有限振幅振动

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2\vartheta(t)}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2\sin\vartheta(t)=0,\ t>0\\ \vartheta|_{t=0}=\alpha;\ \vartheta'|_{t=0}=0\end{gathered}\tag{6.2.19a}$$

其中 $\alpha\ll 1$ 作变换 $u(t)=\vartheta(t)/\alpha$ (角度无量纲化), 上式变成

$$\begin{gathered}\ddot{u}(t)+\omega_0^2 u(t)=\omega_0^2\left(u-\frac{1}{\alpha}\sin\alpha u\right)\\ u|_{t=0}=1;\ u'|_{t=0}=0\end{gathered}\tag{6.2.19b}$$

注意：当 $\alpha\to 0$ 时, $u-\sin\alpha u/\alpha\to 0$, 相当于振动频率为 $\omega_0$ 的线性单摆. 令 $\varepsilon=\alpha^2\ll 1$(即小振幅振动), 方程 (6.2.19b) 的第一式右边作 Taylor 展开得到

$$\ddot{u}(t)+\omega_0^2 u(t)=\omega_0^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\varepsilon^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\tag{6.2.19c}$$

若作通常的微扰展开

$$u(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m u_m(t)\tag{6.2.19d}$$

易得

$$u(t)=\cos\omega_0 t+\varepsilon\left(\frac{1}{16}\omega_0 t\sin\omega_0 t+\frac{1}{192}\cos\omega_0 t-\frac{1}{192}\cos 3\omega_0 t\right)+\cdots$$

出现久期项 $\varepsilon\omega_0 t\sin\omega_0 t$, 显然当 $\varepsilon\omega_0 t\sim 16$ 时, 微扰展开式 (6.2.19d) 失效. 采用参数变形法, 作展开

$$\begin{gathered}u(t)=u_0(\tau)+\varepsilon u_1(\tau)+\varepsilon^2 u_2(\tau)+\cdots\\ t=\tau(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega^2+\cdots)\end{gathered}\tag{6.2.20a}$$

代入方程 (6.2.19c), 比较 $\varepsilon$ 的同次幂

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}\tau^2}+\omega_0^2u_0=0\\ u_0(\tau)|_{\tau=0}=1;\quad \left.\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0}=0\end{gathered}\tag{6.2.20b}$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}\tau^2}+\omega_0^2 u_1=-2\omega_0^2\omega_1 u_0+\frac{\omega_0^2}{6}u_0^2$$
$$u_1(\tau)|_{\tau=0}=0;\quad \left.\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0}=0 \tag{6.2.20c}$$

显然, 方程 (6.2.20b) 的解为 $u_0(\tau)=\cos\omega_0\tau$, 代入方程 (6.2.20c) 得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}\tau^2}+\omega_0^2 u_1(\tau)=\omega_0^2\left(\frac{1}{8}-2\omega_1\right)\cos\omega_0\tau+\frac{1}{24}\omega_0^2\cos 3\omega\tau \tag{6.2.21a}$$

$u_1$ 的久期项来源于上式右边第一项, 如果取 $\omega_1=1/16$, 则久期项消失. 于是

$$u_1(\tau)=\frac{1}{192}(\cos\omega_0\tau-\cos 3\omega_0\tau) \tag{6.2.21b}$$

因此在一级近似下, 方程 (6.2.19c) 的解为

$$u(\tau)=\cos\omega_0\tau+\frac{\varepsilon}{192}(\cos\omega_0\tau-\cos 3\omega_0\tau)+O(\varepsilon^2) \tag{6.2.21c}$$

其中

$$\omega_0\tau=\omega_0(1+\varepsilon\omega_1)^{-1}t\approx\omega_0(1-\varepsilon\omega_1)t\equiv\omega t \tag{6.2.21d}$$

即振动的频率为 $\omega\approx\omega_0(1-\varepsilon/16)$, 而周期 $T\approx T_0(1+\varepsilon/16)=T_0(1+\alpha^2/16)$. 由此可见, 非线性项的效应为: (1) 出现高次谐波; (2) 改变振动的周期, 而且周期与初始振幅有关. 一般, 我们总是强调第一点, 而忽略了第二点.

参数变形法同样可应用于非线性波动问题. 考虑立方非线性 Klein-Gordon 方程的初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\gamma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c^2 u=\beta u^3,\ (-\infty<x<\infty)$$
$$u|_{t=0}=\varepsilon\cos kx;\ u_t|_{t=0}=0 \tag{6.2.22a}$$

其中 $\varepsilon\ll 1$. 令 $v=u/\varepsilon$ (无量纲化, 同时使微扰参数出现在方程中) 则上式变成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\gamma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+c^2 v=\beta\varepsilon^2 v^3$$
$$v|_{t=0}=\cos kx;\ v_t|_{t=0}=0 \tag{6.2.22b}$$

因 $\varepsilon^2\ll 1$, 作微扰展开

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}v_n(x,t) \tag{6.2.22c}$$

具体计算表明, $v_1$ 项将产生久期项, 故需作参数变形展开

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}v_n(x,\tau);\ \tau=t(1+\varepsilon^2\omega_1+\cdots) \tag{6.2.23a}$$

代入方程 (6.2.22b) 得

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\tau^2}-\gamma^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+c^2v_0=0\\ v_0|_{\tau=0}=\cos kx;\quad \left.\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0\end{gathered} \tag{6.2.23b}$$

以及

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\tau^2}-\gamma^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+c^2v_1=-2\omega_1\frac{\partial^2 v_0}{\partial\tau^2}+\beta v_0^3\\ v_1|_{\tau=0}=0;\quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0\end{gathered} \tag{6.2.23c}$$

由方程 (6.2.23b) 解得 $v_0(x,\tau)=\cos kx\cos\omega_0\tau$, 其中 $\omega_0^2=\gamma^2k^2+c^2$, 代入式 (6.2.23c) 得

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial\tau^2}-\gamma^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+c^2v_1=\beta\cos^3 kx\cos^3\omega_0\tau+2\omega_1\omega_0^2\cos kx\cos\omega_0\tau \tag{6.2.24a}$$

利用公式 $4\cos^3 kx=3\cos kx+\cos 3kx$, 上式变成

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v_1}{\partial\tau^2}-\gamma^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+c^2v_1=\left(\frac{9}{16}\beta+2\omega_0^2\omega_1\right)\cos kx\cos\omega_0\tau\\ &+\frac{\beta}{16}(3\cos 3kx\cos\omega_0\tau+3\cos kx\cos 3\omega_0\tau+\cos 3kx\cos 3\omega_0\tau)\end{aligned} \tag{6.2.24b}$$

为消去久期项, 令上式右边第一项为零得到 $\omega_1=-9\beta/(32\omega_0^2)$. 于是得到一级近似的振动频率为

$$\omega\approx\omega_0(1+\varepsilon\omega_1)=\sqrt{\gamma^2k^2+c^2}\left(1-\frac{9\varepsilon^2\beta}{32\omega_0^2}\right) \tag{6.2.24c}$$

由上两式可知, 非线性项 $\beta u^3$ 的效应是: (1) 产生谐波; (2) 振动频率 $\omega$ 与振幅有关, 这是非线性振动和波动的普遍现象.

**例 6.2.5**　求立方非线性 Klein-Gordon 方程的周期性驻波解, 即求解下列问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\gamma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c^2u=\varepsilon u^3,\ x\in(0,\pi)\\ u(x,t)|_{x=0}=u(x,t)|_{x=\pi}=0;\ u(x,t+T)=u(x,t)\end{gathered} \tag{6.2.25a}$$

其中 $\varepsilon \ll 1$ , $T = 2\pi/\omega$, $T$ 和 $\omega$ 分别为待求周期和频率. 利用参数变形展开

$$\begin{aligned} &u = u_0(x,\tau) + \varepsilon u_1(x,\tau) + \varepsilon^2 u_2(x,\tau) + \cdots \\ &\tau = \omega(\varepsilon)\ t = (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots)\ t \end{aligned} \tag{6.2.25b}$$

代入方程 (6.2.25a) 可得递推方程

$$\begin{aligned} &\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + c^2 u_0 = 0 \\ &\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c^2 u_1 = -2\omega_0\omega_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + u_0^3 \\ &\cdots \end{aligned} \tag{6.2.26a}$$

以及定解条件

$$\begin{gathered} u_i(x,\tau)|_{x=0} = u_i(x,\tau)|_{x=\pi} = 0 \\ u_i(x,\tau+2\pi) = u_i(x,\tau) \end{gathered} \tag{6.2.26b}$$

其中 $i = 0,1,2,\cdots$, 容易求得零级近似的周期驻波解为

$$u_0 = a_{mn}\sin mx\cos n\tau; \quad \omega_0^2 = \frac{\gamma^2 m^2 + c^2}{n^2} \tag{6.2.27a}$$

其中 $m, n =, 2, \cdots$, 上式代入方程 (6.2.26c) 的第二式得

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c^2 u_1 = &\left(2\omega_0\omega_1 n^2 a_{mn} + \frac{9}{16}a_{mn}^3\right)\sin mx\cos n\tau \\ &+ \frac{1}{16}a_{mn}^3(3\cos 3n\tau\sin mx - 3\cos n\tau\sin 3mx - \cos 3n\tau\sin 3mx) \end{aligned} \tag{6.2.27b}$$

其中已经利用了关系 $4\cos^3 kx = 3\cos kx + \cos 3kx$ 和 $4\sin^3 kx = 3\sin kx - \sin 3kx$. 为了消去 $u_1$ 的久期项, 应取 $\omega_1 = -9a_{mn}^2/(32\omega_0 n^2)$. 于是得到一级近似的振动频率为

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon^2) \approx \omega_0 \left[1 - \frac{9\varepsilon a_{mn}^2}{32(\gamma^2 m^2 + c^2)}\right] \tag{6.2.27c}$$

由上式可知, 振动频率与振幅 $a_{mn}^2$ 有关.

变形参数法是解决微扰展开出现久期项的最简单方法, 在一定条件下, 它也可能失效, 例如, 当上式 $\gamma^2 m^2 + c^2 \approx O(\varepsilon)$ 时, $\varepsilon\omega_1$ 和 $\omega_0$ 同一数量级, 因此必须考虑 $\omega_2, \omega_3, \cdots$, 这时展开式 (6.2.25b) 已无实际意义. 解决这个问题的方法是 6.2.4 小节介绍的多尺度展开法.

### 6.2.4　多尺度展开法

参数变形法假定系统的运动只有一个时标, 微扰的作用改变了系统时标. 本节的问题是, 如果微扰的作用增加了系统运动的时标, 应该如何作微扰展开? 首先看简单的初值问题

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0,\ t>0\\ y(0)=0;\ y'(0)=1\end{gathered}\tag{6.2.28a}$$

作微扰展开

$$y(t)=y_0(t)+\varepsilon y_1(t)+\cdots\tag{6.2.28b}$$

代入方程 (6.2.28a) 可以得到

$$y(t)\approx\sin t-\frac{1}{2}\varepsilon t\sin t\tag{6.2.28c}$$

可见这一展开出现了久期项. 事实上, 方程 (6.2.28a) 的严格解为

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon t\right)\sin\left[\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2}t\right]\tag{6.2.29a}$$

可见微扰的作用不仅改变了系统的振动频率和振幅, 而且出现了一项缓变项, 即增加了一个新的缓变时标或尺度. 为了描述这二个时标 (尺度), 引进新的变量

$$t_1=t;\ t_2=\varepsilon^\alpha t\tag{6.2.29b}$$

利用求导法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\mathrm{d}t_2}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t_2}=\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon^\alpha\frac{\partial}{\partial t_2}\tag{6.2.29c}$$

代入方程 (6.2.28a) 的第一式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}+2\varepsilon^\alpha\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}+\varepsilon^{2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right)y+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon^\alpha\frac{\partial}{\partial t_2}\right)y+y=0\tag{6.2.30a}$$

$$y|_{t_1=t_2=0}=0;\quad\left.\left(\frac{\partial y}{\partial t_1}+\varepsilon^\alpha\frac{\partial y}{\partial t_2}\right)\right|_{t_1=t_2=0}=1\tag{6.2.30b}$$

然后作微扰展开

$$y(t)=y_0(t_1,t_2)+\varepsilon y_1(t_1,t_2)+\cdots\tag{6.2.30c}$$

代入方程 (6.2.30a) 得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}+2\varepsilon^\alpha\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}+\varepsilon^{2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right)(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)\\&+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon^\alpha\frac{\partial}{\partial t_2}\right)(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)+(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)=0\end{aligned}\tag{6.2.31a}$$

因此零阶方程和初始条件为

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2}+y_0=0;\ \ y_0|_{t_1=t_2=0}=0;\ \ \left.\frac{\partial y_0}{\partial t_1}\right|_{t_1=t_2=0}=1 \tag{6.2.31b}$$

与方程 (6.2.17b) 类似, 久期项是因为在一阶近似方程中出现 $2\varepsilon^\alpha\partial^2 y_0/\partial t_1\partial t_2$ 而引起的, 现在可能抵消这项的只有 $\varepsilon\partial y_0/\partial t_1$, 于是只能选择 $\alpha=1$. 因此一阶近似方程和初始条件为

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2}+y_1=-2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1\partial t_2}+\frac{\partial y_0}{\partial t_1}\\ y_1|_{t_1=t_2=0}=0;\quad \left.\frac{\partial y_1}{\partial t_1}\right|_{t_1=t_2=0}=-\left.\frac{\partial y_0}{\partial t_2}\right|_{t_1=t_2=0}\end{gathered} \tag{6.2.31c}$$

方程 (6.2.31b) 的通解和初始条件为

$$\begin{gathered}y_0(t_1,t_2)=a_0(t_2)\sin t_1+b_0(t_2)\cos t_1\\ a_0(0)=1;\ \ b_0(0)=0\end{gathered} \tag{6.2.32a}$$

代入方程 (6.2.31c)

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2}+y_1=\left(2\frac{\mathrm{d}b_0}{\mathrm{d}t_2}+b_0\right)\sin t_1-\left(2\frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}t_2}+a_0\right)\cos t_1 \tag{6.2.32b}$$

为了消除久期项, 选择

$$2\frac{\mathrm{d}b_0}{\mathrm{d}t_2}+b_0=0;\ \ 2\frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}t_2}+a_0=0 \tag{6.2.32c}$$

利用方程 (6.2.32a) 中的初始条件得

$$b_0(t_2)=0;\ \ a_0(t_2)=\exp\left(-\frac{1}{2}t_2\right) \tag{6.2.33a}$$

因此微扰解为

$$y(t)\approx\exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon t\right)\sin t \tag{6.2.33b}$$

与严格解式 (6.2.29a) 比较可知, 利用多尺度展开, 零阶近似已给出比较好的结果. 但是当 $t$ 进一步变大, $\varepsilon^2 t\sim 1$ 时, 由严格解式 (6.2.29a) 可知, 必须增加一个新的时标 $t_3=\varepsilon^2 t$. 于是, 时标变换式 (6.2.29b) 变成三个尺度 $t_1=t$ , $t_2=\varepsilon^\alpha t$ 和 $t_3=\varepsilon^2 t$. 相应地, 式 (6.2.29c) 变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\mathrm{d}t_2}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t_2}+\frac{\mathrm{d}t_3}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t_3}=\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_3} \tag{6.2.34a}$$

重复以上计算过程, 不难得到三个尺度的展开近似解为

$$y(t) \approx \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon t\right)\sin\left(1-\frac{\varepsilon^2}{8}\right)t \tag{6.2.34b}$$

注意: 本例中, 由于指数衰减, 当 $t$ 足够大后, 二级项 $\varepsilon^2$ 的贡献不明显.

以上例子看出, 尽管多尺度展开法把常微分方程化成了更复杂的偏微分方程, 但能给出比较好的微扰解. 多尺度展开法可与参数变形法结合, 如上例子中作变换

$$t_1 = t(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots);\ t_2 = \varepsilon t \tag{6.2.35a}$$

可得更好的微扰结果. 此外, 时标的选择是多种多样的, 例如可取非线性时标变换

$$t_1 = f(t,\varepsilon);\ t_2 = \varepsilon^{\alpha} t;\ t_3 = \varepsilon^{\beta} t \tag{6.2.35b}$$

**例 6.2.6** 考虑弹簧的老化, 振动方程和初始条件为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + k^2(\varepsilon t)y = 0,\ t>0;\ y(0)=a;\ y'(0)=b \tag{6.2.36a}$$

弹簧的老化是缓变过程, $\varepsilon$ 是小量, $k(\varepsilon t)$ 随时间缓慢变化. 作非线性时标变换

$$t_1 = f(t,\varepsilon);\ t_2 = \varepsilon t \tag{6.2.36b}$$

$f(t,\varepsilon)$ 必须满足: (1) 非负且是 $t$ 的增函数; (2) $t_1$ 是快时标, $t_2$ 是慢时标, 即当 $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon t \ll f(t,\varepsilon)$; (3) $f(t,\varepsilon)$ 是光滑函数. 根据微分法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2} \tag{6.2.37a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = f_t^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + f_{tt}\frac{\partial}{\partial t_1} + 2\varepsilon f_t\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \tag{6.2.37b}$$

代入方程 (6.2.36a)

$$\left(f_t^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + f_{tt}\frac{\partial}{\partial t_1} + 2\varepsilon f_t\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right)y + k^2(\varepsilon t)y = 0 \tag{6.2.37c}$$

当 $k(\varepsilon t)=k_0$ 与时间无关时, 快时标表示振动, 即 $t_1=f(t,\varepsilon)=k_0 t$, 因此当 $k$ 是时间的函数时取 $f_t = k(\varepsilon t)$, 即

$$f(t) = \int_0^t k(\varepsilon\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.2.38a}$$

作微扰展开

$$y(t) = y_0(t_1,t_2) + \varepsilon y_1(t_1,t_2) + \cdots \tag{6.2.38b}$$

代入方程 (6.2.37c) 得到零阶近似

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2}+y_0=0;\ \ y_0|_{t_1=t_2=0}=a$$
$$k(0)\ \frac{\partial y_0}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=t_2=0}=b \tag{6.2.39a}$$

上式的通解和初始条件为

$$\begin{gathered}y_0(t_1,t_2)=a_0(t_2)\sin t_1+b_0(t_2)\cos t_1\\ k(0)a_0(0)=b,\ \ b_0(0)=a\end{gathered} \tag{6.2.39b}$$

一阶近似为

$$k^2\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2}+y_1\right)=-2k\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1\partial t_2}-k'\frac{\partial y_0}{\partial t_1}=-(a_0k'+2ka_0')\cos t_1+(b_0k'+2kb_0')\sin t_1 \tag{6.2.40a}$$

为了消除久期项, 令 $a_0k'+2ka_0'=0$ 和 $b_0k'+2kb_0'=0$, 即

$$a_0(t_2)=\frac{\alpha_0}{\sqrt{k(\varepsilon t)}};\ \ b_0(t_2)=\frac{\beta_0}{\sqrt{k(\varepsilon t)}} \tag{6.2.40b}$$

其中 $\alpha_0$ 和 $\beta_0$ 是常数. 因此零阶近似解为

$$y(t)\approx\frac{1}{\sqrt{k(\varepsilon t)}}\left[\alpha_0\sin\left(\int_0^t k(\varepsilon\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\beta_0\cos\left(\int_0^t k(\varepsilon\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right] \tag{6.2.40c}$$

由方程 (6.2.36a) 中初始条件得到 $\beta_0=a\sqrt{k(0)}$ 和 $\alpha_0=b/\sqrt{k(0)}$.

下面介绍用多尺度展开法讨论非线性波动方程, 注意与上节参数变形法的区别. 考虑立方非线性 Klein-Gordon 方程的行波

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u+\varepsilon u^3,\ \ x\in\ (-\infty,\infty) \tag{6.2.41a}$$

其中 $\varepsilon\ll 1$. 如果 $\varepsilon=0$, 可用 Fourier 积分法求上式的传播问题

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)]\mathrm{d}k \tag{6.2.41b}$$

其中 $\omega$ 与 $k$ 的关系 $\omega=\sqrt{1+k^2}$ 称为**色散关系**. 考虑简单的行波 $u_0(kx-\omega t)$, 如果作微扰展开

$$u(x,t)=u_0(kx-\omega t)+\varepsilon u_1(x,t)+\cdots \tag{6.2.41c}$$

代入方程 (6.2.41a), 计算表明一阶项 $u_1(x,t)$ 出现久期项. 因此上述展开不恰当, 需作多时标展开. 三个时标分别为 $\vartheta = kx - \omega t$,$x_2 = \varepsilon x$ 和 $t_2 = \varepsilon t$, 代入方程 (6.2.41a) 得到

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} - 2\varepsilon\left(k\frac{\partial}{\partial x_2} + \omega\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\frac{\partial}{\partial\vartheta} + O(\varepsilon^2)\right]u + u + \varepsilon u^3 = 0 \tag{6.2.42a}$$

作微扰展开

$$u(x,t) = u_0(\vartheta, x_2, t_2) + \varepsilon u_1(\vartheta, x_2, t_2) + .... \tag{6.2.42b}$$

代入方程 (6.2.42a) 得到零阶近似为

$$\frac{\partial^2 u_0(\vartheta, x_2, t_2)}{\partial\vartheta^2} + u_0(\vartheta, x_2, t_2) = 0 \tag{6.2.42c}$$

因此

$$u_0(\vartheta, x_2, t_2) = A(x_2, t_2)\cos[\vartheta + \phi(x_2, t_2)] \tag{6.2.42d}$$

其中函数 $A(x_2, t_2)$ 和 $\phi(x_2, t_2)$ 的选择由高阶近似给出. 一阶近似为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\vartheta^2} + u_1 &= 2\left(k\frac{\partial}{\partial x_2} + \omega\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\frac{\partial u_0}{\partial\vartheta} - u_0^3\\ &= -2\left(k\frac{\partial A}{\partial x_2} + \omega\frac{\partial A}{\partial t_2}\right)\sin(\vartheta+\phi) - \frac{1}{4}A^3\cos 3(\vartheta+\phi)\\ &\quad -2\left[\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \omega\frac{\partial\phi}{\partial t_2}\right) + \frac{3}{8}A^2\right]A\cos(\vartheta+\phi)\end{aligned} \tag{6.2.43a}$$

为了消除现久期项, 令

$$\left(k\frac{\partial}{\partial x_2} + \omega\frac{\partial}{\partial t_2}\right)A = 0;\ \ \left(k\frac{\partial}{\partial x_2} + \omega\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\phi + \frac{3}{8}A^2 = 0 \tag{6.2.43b}$$

利用特征坐标解上述一阶偏微分方程, 令

$$r = \omega x_2 + kt_2;\ \ s = \omega x_2 - kt_2 \tag{6.2.44a}$$

方程 (6.2.43b) 变成

$$\frac{\partial A}{\partial r} = 0;\ \ \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{3}{16\omega k}A^2 \tag{6.2.44b}$$

即

$$A = A(s);\ \ \phi = -\frac{3}{16\omega k}A^2 r + \phi_0(s) \tag{6.2.44c}$$

因此零阶近似解为

$$u \approx A(\omega x_2 - kt_2)\cos\left[\vartheta - \frac{3}{16\omega k}(\omega x_2 + kt_2) + \phi_0(\omega x_2 - kt_2)\right]$$

假定初始条件为

$$u(x,0)=\alpha\cos(kx);\ u_t(x,0)=\alpha\omega\sin(kx) \tag{6.2.45a}$$

用三个时标 $\vartheta$,$x_2$ 和 $t_2$ 表示, 上式变为

$$u(\vartheta,x_2,0)=\alpha\cos\vartheta;\ \frac{\partial u(\vartheta,x_2,0)}{\partial\vartheta}=-\alpha\sin\vartheta \tag{6.2.45b}$$

因此 $A(\omega x_2)=\alpha$ 和 $\phi_0(\omega x_2)=3A^2x_2/16$. 最后得到零阶近似解

$$u\approx\alpha\cos\left[kx-\left(\omega+\frac{3\varepsilon\alpha^2}{16\omega}\right)t\right] \tag{6.2.46a}$$

波传播的相速度为

$$v_p\equiv\left(1+\frac{3\varepsilon\alpha^2}{16\omega^2}\right)\frac{\omega}{k} \tag{6.2.46b}$$

可见由于非线性, 相速度增加且增加量与波的振幅平方成正比.

### 6.2.5 均质化近似方法

工程和科学问题中研究的材料经常是多组分或具有子结构的复合材料, 简单的例子有多层复合材料、纤维增强复合材料、多孔介质、含有大量颗粒的流体等. 严格求解这种材料中的波动或热传导过程是非常困难的. 事实上, 当物理过程的特征长度 (用 $L$ 表示, 如波长, 热扩散长度等) 远远大于微观结构的特征长度时 (用 $l$ 表示, 如多层复合材料的层厚, 颗粒平均间距等), 可以用等效的物理参数来近似表征复合材料中波动或热传导过程. 这种近似称为**均质化 (Homogenization) 近似**, 也称为**等效介质近似**.

以微分算子 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$ 的边值问题为例, 复合材料的微结构反映到系数 $p(\boldsymbol{r})$ 和 $q(\boldsymbol{r})$ 上就是增加了一个随空间快尺度变化的部分, 可以表示为 $p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)$ 和 $q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)(\varepsilon\to 0)$. 边值问题为

$$\begin{gathered}-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)\nabla]\psi(\boldsymbol{r})+q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)\psi(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left[\alpha\psi(\boldsymbol{r})+\beta\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]_{\partial G}=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered} \tag{6.2.47a}$$

其中系数 $p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)$ 和 $q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)$ 的第一个变量 $\boldsymbol{r}$ 表示的非均匀性尺度大于或等于特征长度 $L$, 而第二个变量 $\boldsymbol{r}/\varepsilon$ 表示的非均匀性尺度 $l$ 远小于特征长度 $L$, 为快尺度变量. 均质化近似的目的是：在 $\varepsilon\to 0$ 条件下, 求 $\bar{p}(\boldsymbol{r})$ 和 $\bar{q}(\boldsymbol{r})$, 使 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的零级近似 $\psi_0(\boldsymbol{r})$ 满足

$$\begin{gathered}-\nabla\cdot[\bar{p}(\boldsymbol{r})\nabla]\psi_0(\boldsymbol{r})+\bar{q}(\boldsymbol{r})\psi_0(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left[\alpha\psi_0(\boldsymbol{r})+\beta\frac{\partial\psi_0(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]_{\partial G}=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered} \tag{6.2.47b}$$

其中 $\bar{p}(\boldsymbol{r})$ 和 $\bar{q}(\boldsymbol{r})$ 称为等效系数, 包含了快尺度变化部分对零级近似 $\psi_0(\boldsymbol{r})$ 的贡献. 注意：当 $p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)=p(\boldsymbol{r}/\varepsilon)$ 和 $q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)=q(\boldsymbol{r}/\varepsilon)$ 时, 等效系数 $\bar{p}(\boldsymbol{r})$ 和 $\bar{q}(\boldsymbol{r})$ 为常数, 这是实际问题中经常出现的情况.

**一维边值问题** 下面以简单的一维边值问题为例, 说明均质化近似的过程. 考虑定义在 $x\in(0,1)$ 的边值问题

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x,y)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right]=f(x),\ x\in(0,1)$$
$$\psi(0)=a;\ \psi(1)=b \tag{6.2.48a}$$

其中 $y=x/\varepsilon$ 为快尺度变量. 为了更清楚看出快尺度变量的意义, 图 6.2.2 画出了不同的系数 $p_1(x,y)=x[1+0.2\sin^3(x/\varepsilon)]$ 和 $p_2(x,y)=x^2[1+0.2\sin^3(x/\varepsilon)]$ 随 $x$ 的变化, 图中虚线表明系数随慢尺度变量 $x$ 的变化：$p(x)=x$ 和 $p(x)=x^2$.

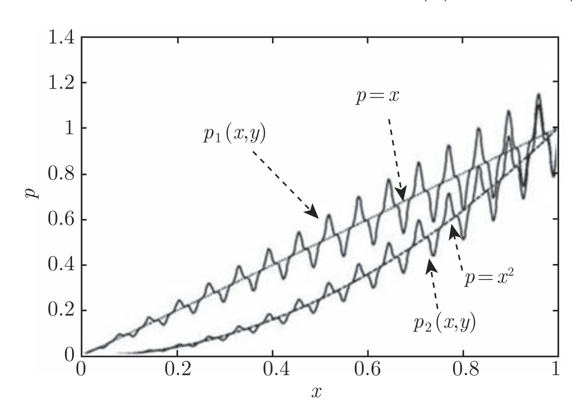



图 6.2.2 系数 $p(x,y)$ 随 $x$ 的变化

对方程 (6.2.48a) 进行二个尺度 $x=x$ 和 $y=x/\varepsilon$ 变换, 利用导数关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.2.48b}$$

不难得到

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[p(x,y)\left(\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]=-\varepsilon^2 f(x) \tag{6.2.48c}$$

作多尺度展开

$$\psi=\psi_0(x,y)+\varepsilon\psi_1(x,y)+\varepsilon^2\psi_2(x,y)+\cdots \tag{6.2.49a}$$

其中每一项都是光滑、有界的函数. 上式代入方程 (6.2.48c) 得到

(1) 零级近似满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[p(x,y)\frac{\partial\psi_0(x,y)}{\partial y}\right]=0 \tag{6.2.49b}$$

容易得到上式的解为

$$\psi_0(x,y)=C_1(x)+C_0(x)\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{p(x,s)} \tag{6.2.49c}$$

其中 $y_0$ 为任意参考点, $C_1(x)$ 和 $C_0(x)$ 是待定函数. 由于 $y=x/\varepsilon$, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, $y\to\infty$, 而如果 $p(x,s)$ 是光滑函数, 则

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{p(x,s)}\geqslant\frac{1}{\mathrm{Max}[p(x,s)]}\int_{y_0}^{y}\mathrm{d}s=\frac{y-y_0}{\mathrm{Max}[p(x,s)]}\to\infty \tag{6.2.49d}$$

其中 $\mathrm{Max}[p(x,s)]$ 是 $p(x,y)$ 关于变量 $y$ 的最大值. 为了保证 $\psi_0(x,y)$ 有界, 必须取 $C_0(x)\equiv 0$, 故 $\psi_0(x,y)=C_1(x)\equiv\psi_0(x)$ 与 $y$ 无关. 注意: 零级近似方程的作用就是表明 $\psi_0$ 与快尺度变量无关;

(2) 一级近似满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[p(x,y)\frac{\partial\psi_1(x,y)}{\partial y}\right]=-\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}\psi_0(x)}{\mathrm{d}x} \tag{6.2.50a}$$

注意: 得到上式利用了 $\psi_0(x,y)=\psi_0(x)$ 与 $y$ 无关的事实, 此时不难得到上式的解为

$$\begin{aligned}\psi_1(x,y)&=B_1(x)+B_0(x)\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{p(x,s)}-y\frac{\mathrm{d}\psi_0(x)}{\mathrm{d}x}\\&=B_1(x)+y\left[\frac{B_0(x)}{y}\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{p(x,s)}-\frac{\mathrm{d}\psi_0(x)}{\mathrm{d}x}\right]\end{aligned} \tag{6.2.50b}$$

其中 $B_1(x)$ 和 $B_0(x)$ 是待定函数. 由式 (6.2.49d), 为了保证 $\psi_1(x,y)$ 有界, 必须要求

$$\lim_{y\to\infty}\left[\frac{B_0(x)}{y}\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{p(x,s)}-\frac{\mathrm{d}\psi_0(x)}{\mathrm{d}x}\right]=0 \tag{6.2.51a}$$

上式可以改写成

$$\frac{\mathrm{d}\psi_0(x)}{\mathrm{d}x}=B_0(x)\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{p(x,s)} \tag{6.2.51b}$$

(3) 二级近似满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[p(x,y)\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}\right]=-f(x)-B_0'(x)-\frac{\partial}{\partial y}\left[p(x,y)\frac{\partial\psi_1(x,y)}{\partial x}\right] \tag{6.2.52a}$$

注意: 得到上式, 利用了方程 (6.2.50b). 不难得到方程 (6.2.52a) 的解为

$$\begin{aligned}\psi_2(x,y)=&D_0(x)\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{p(x,s)}-\int_{y_0}^{y}\frac{\partial\psi_1(x,s)}{\partial x}\mathrm{d}s\\&+D_1(x)-[f(x)+B_0'(x)]\int_{y_0}^{y}\frac{s\mathrm{d}s}{p(x,s)}\end{aligned} \tag{6.2.52b}$$

其中 $D_1(x)$ 和 $D_0(x)$ 是待定函数. 显然上式中前二个积分都是 $y$ 的一次函数, 通过选择适当的待定函数 $D_0(x)$, 可以保证积分有限, 但第三个积分是 $y^2$ 增长的, 故这项就是多尺度展开的久期项! 为了保证 $\psi_2(x,y)$ 有界, 必须取

$$f(x)+B_0'(x)=0 \tag{6.2.52c}$$

上式代入方程 (6.2.51b) 得到

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\bar{p}(x)\frac{\mathrm{d}\psi_0(x)}{\mathrm{d}x}\right]=f(x) \tag{6.2.53a}$$

其中 $\bar{p}(x)$ 与快尺度 $y=x/\varepsilon$ 变量无关

$$\bar{p}(x)\equiv\left[\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{p(x,s)}\right]^{-1} \tag{6.2.53b}$$

方程 (6.2.53a) 就是我们要求的均质化近似方程, $\bar{p}(x)$ 为等效介质参数.

**例 6.2.7** 考虑一维 Helmholtz 方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x,y)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x,y)\psi(x)=f(x) \tag{6.2.54a}$$

其中 $p(x,y)$ 和 $q(x,y)$ 是快尺度变量 $y=x/\varepsilon$ 的周期函数：$p(x,y)=p(x,y+l_p)$ 和 $q(x,y)=q(x,y+l_p)$(其中 $l_p$ 为周期). 相应地, 方程 (6.2.48c) 修改成

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[p(x,y)\left(\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]=-\varepsilon^2 f(x)+\varepsilon^2 q(x,y)\psi \tag{6.2.54b}$$

作式 (6.2.49a) 的多尺度展开后代入上式得到的零级和一级近似方程与式 (6.2.49b) 和 (6.2.50a) 相同, 故零级近似 $\psi_0$ 与快尺度变量无关, 即 $\psi_0(x,y)=\psi_0(x)$ 满足方程 (6.2.51b). 而二级近似方程 (6.2.52a) 修改为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[p(x,y)\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}\right]&=-f(x)-B_0'(x)+q(x,y)\psi_0(x)\\&\quad-\frac{\partial}{\partial y}\left[p(x,y)\frac{\partial\psi_1(x,y)}{\partial x}\right]\end{aligned} \tag{6.2.54c}$$

上式的解为

$$\begin{aligned}\psi_2(x,y)=&\,D_1(x)+D_0(x)\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{p(x,s)}-\int_{y_0}^{y}\frac{\partial\psi_1(x,s)}{\partial x}\mathrm{d}s\\&-[f(x)+B_0'(x)]\int_{y_0}^{y}\frac{s\mathrm{d}s}{p(x,s)}+\psi_0(x)\int_{y_0}^{y}\frac{1}{p(x,t)}\int^{t}q(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.2.54d}$$

由于 $q(x,y)$ 是快尺度变量 $y=x/\varepsilon$ 的周期函数, 我们用一个周期的平均 $\bar{q}(x)$ 来代替上式中的 $q(x,s)$

$$\bar{q}(x)=\frac{1}{l_p}\int_{l_p}q(x,s)\mathrm{d}s \tag{6.2.55a}$$

于是, 方程 (6.2.54d) 近似为

$$\begin{aligned}\psi_2(x,y)\approx D_1(x)+D_0(x)\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{p(x,s)}-\int_{y_0}^{y}\frac{\partial\psi_1(x,s)}{\partial x}\mathrm{d}s\\ -[f(x)+B_0'(x)-\bar{q}(x)\psi_0(x)]\int_{y_0}^{y}\frac{s\mathrm{d}s}{p(x,s)}\end{aligned} \tag{6.2.55b}$$

因此与式 (6.2.52c) 类似的方程为

$$f(x)+B_0'(x)-\bar{q}(x)\psi_0(x)=0 \tag{6.2.55c}$$

代入方程 (6.2.51b)

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\bar{p}(x)\frac{\mathrm{d}\psi_0(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\bar{q}(x)\psi_0(x)=f(x) \tag{6.2.55d}$$

其中 $\bar{p}(x)$ 由式 (6.2.53b) 决定.

**例 6.2.8** 考虑定义在 $x\in(0,L)$ 的热扩散问题

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,y)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right]+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=f(x,t),\ t>0\\ &\psi(x,t)|_{t=0}=g(x);\ \psi(0,t)=a;\ \psi(L,t)=b\end{aligned} \tag{6.2.56a}$$

其中 $y=x/\varepsilon$ 为快尺度变量. 与前面的讨论相同, 对空间变量进行二个尺度 $x_1=x$ 和 $y=x/\varepsilon$ 变换 (注意: 与常微分方程不同, 偏微分方程问题中用新的变量 $x_1$ 表示 $x$ 比较清楚); 对时间变量也必须引进二个不同的时标: $t_1=t$ 和 $\tau=t/\varepsilon^{\alpha}$, 其中标度系数 $\alpha$ 待定. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{6.2.56b}$$

代入方程 (6.2.56a) 得到

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[k(x_1,y)\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi\right]-\left(\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon^{-\alpha+2}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi=-\varepsilon^2 f(x_1,t_1) \tag{6.2.56c}$$

作多尺度展开

$$\psi=\psi_0(x_1,y,t_1,\tau)+\varepsilon\psi_1(x_1,y,t_1,\tau)+\varepsilon^2\psi_2(x_1,y,t_1,\tau)+\cdots \tag{6.2.56d}$$

把上式代入方程 (6.2.56c), 分析表明：为了保证零级近似包含时间变量, 标度系数必须取 $\alpha=2$. 于是, $\varepsilon$ 的各级近似为

(1) 零级近似满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[k(x_1,y)\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right]-\frac{\partial\psi_0}{\partial\tau}=0 \tag{6.2.57a}$$

由前面讨论的启发, 零级近似应与快尺度变量 $y$ 无关, 故取 $\psi_0(x_1,y,t_1,\tau)=\psi_0(x_1,t_1)$, 显然 $\psi_0(x_1,t_1)$ 满足上式；

(2) 一级近似满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[k(x_1,y)\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right]-\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}=-\frac{\partial k(x_1,y)}{\partial y}\frac{\partial\psi_0(x_1,t_1)}{\partial x_1} \tag{6.2.57b}$$

不难得到上式的解可表示为

$$\begin{aligned}\psi_1=&\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{y_0}^{y}\frac{1}{k(x_1,q)}\int_{y_0}^{q}\psi_1(x_1,s,t,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}q+D_1(x_1,t)\\&+y\left[D_0(x_1,t)\frac{1}{y}\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{k(x_1,s)}-\frac{\partial\psi_0(x_1,t)}{\partial x_1}\right]\end{aligned} \tag{6.2.57c}$$

其中 $D_1(x)$ 和 $D_0(x)$ 是待定函数. 与分析方程 (6.2.50b) 类似, 我们得到与式 (6.2.51b) 类似的等式

$$\frac{\partial\psi_0(x_1,t_1)}{\partial x_1}=D_0(x_1,t_1)\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{k(x_1,s)} \tag{6.2.57d}$$

(3) 二级近似满足的方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[k(x_1,y)\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right]-\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau}=&-f(x_1,t_1)-\frac{\partial}{\partial y}\left[k(x_1,y)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right]\\&+\frac{\partial\psi_0}{\partial t_1}-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[k(x_1,y)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.2.58a}$$

另一方面, 由方程 (6.2.57c), 对变量 $y$ 求一次偏导数后得到

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1}=\frac{1}{k(x_1,y)}\left[D_0(x_1,t)+\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{y_0}^{y}\psi_1(x_1,s,t,\tau)\mathrm{d}s\right] \tag{6.2.58b}$$

上式代入方程 (6.2.58a) 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[k(x_1,y)\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right]-\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau}=&-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial\tau}\int_{y_0}^{y}\psi_1(x_1,s,t,\tau)\mathrm{d}s\\&-\frac{\partial}{\partial y}\left[k(x_1,y)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right]+\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial t_1}-f(x_1,t_1)-\frac{\partial D_0(x_1,t)}{\partial x_1}\right]\end{aligned} \tag{6.2.58c}$$

与方程 (6.2.52a) 类似, 上式右边最后一个方括号内的项为久期项, 于是

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial t_1}-f(x,t)-\frac{\partial D_0(x_1,t)}{\partial x_1}=0 \tag{6.2.59a}$$

上式代入方程 (6.2.57d), 不难得到均质化近似方程

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\bar{k}(x_1)\frac{\partial\psi_0(x_1,t_1)}{\partial x_1}\right]+\frac{\partial\psi_0(x_1,t_1)}{\partial t_1}=f(x_1,t_1) \tag{6.2.59b}$$

其中等效介质参数 $\bar{k}(x_1)$ 为

$$\bar{k}(x_1)\equiv\left[\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{k(x_1,s)}\right]^{-1} \tag{6.2.59c}$$

**例 6.2.9** 设例 6.2.8 中 $k(x,y)$ 是关于 $y$ 的周期函数, 即 $k(x,y)=k(x,y+l)$, 其中 $l$ 为周期, 设在区间 $x\in(0,L)$ 有 $M$ 个周期, 则由式 (6.2.59c)

$$\bar{k}(x_1)\equiv\left[\frac{M}{Ml}\int_{y_0}^{l-y_0}\frac{\mathrm{d}s}{k(x_1,s)}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{l}\int_0^l\frac{\mathrm{d}s}{k(x_1,y_0+s)}\right]^{-1} \tag{6.2.60a}$$

进一步假定每个周期由 $k_1$ 和 $k_2$ 二种均匀材料组成, 宽度分别为 $\Delta_1$ 和 $\Delta_2(\Delta_1+\Delta_2=l)$, 由上式

$$\bar{k}(x_1)=\left[\frac{1}{l}\left(\frac{\Delta_1}{k_1}+\frac{\Delta_2}{k_2}\right)\right]^{-1}=\frac{k_1k_2}{k_1f+k_2(1-f)} \tag{6.2.60b}$$

其中 $f\equiv\Delta_1/l$ 称为 $k_1$ 材料的占空比.

**例 6.2.10** 设 $k(x,y)$ 为层状介质:$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_M=L$, 其中 $\Delta x_j=x_j-x_{j-1}=O(\varepsilon)$ 以及 $\varepsilon=L/M$, 每层的热传导系数 $k_j$, $(j=1,2,\cdots M)$ 为常数, 由式 (6.2.59c) (注意：$\Delta y_j=\Delta x_j/\varepsilon$)

$$\bar{k}\equiv\left(\frac{1}{L/\varepsilon}\sum_{j=1}^{M}\frac{\Delta y_j}{k_j}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{L}\sum_{j=1}^{M}\frac{\Delta x_j}{k_j}\right)^{-1} \tag{6.2.60c}$$

**高维边值问题** 以上均质化过程也可以应用到高维边值问题或混合问题. 事实上, 对高维问题进行均质化更有实际意义, 尽管更为复杂. 考虑定义在 $n$ 维区域 $G$ 上的非均匀介质中的稳定温度场分布, 满足的边值问题为

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot[k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)\nabla\psi(\boldsymbol{r})]=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\&\psi(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{aligned} \tag{6.2.61a}$$

其中 $k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)$ 是各向同性的非均匀介质的热传导系数.

进一步, 假定 $k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$ 关于快尺度变量是周期性的函数, 即存在矢量 $\boldsymbol{y}_p$ (称为周期矢量), 对区域 $G$ 内的所有 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{y}$, 成立关系

$$k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})=k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}_p) \tag{6.2.61b}$$

上式意味着区域 $G$ 中的子结构是周期性的, 每个子结构可以看作相同的元胞 $\Omega_0$. 我们仍然用多尺度展开法求相应的均质化方程. 引进二个尺度的变量: $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{r}/\varepsilon=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 后, 梯度算子的变换关系为

$$\nabla\to\nabla_{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{\varepsilon}\nabla_{\boldsymbol{y}} \tag{6.2.61c}$$

其中 $\nabla_{\boldsymbol{r}}$ 和 $\nabla_{\boldsymbol{y}}$ 分别表示对变量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{r}/\varepsilon$ 作用. 上式的分量形式为

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\to\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_j} \tag{6.2.61d}$$

把式 (6.2.61c) 代入方程 (6.2.61a) 的第一式得到

$$(\nabla_{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\nabla_{\boldsymbol{r}})\cdot[k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})(\nabla_{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\nabla_{\boldsymbol{r}})\psi]=\varepsilon^2f(\boldsymbol{r}) \tag{6.2.62a}$$

另一方面, 对 $\psi$ 作多尺度展开

$$\psi=\psi_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})+\varepsilon\psi_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})+\varepsilon^2\psi_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})+\cdots \tag{6.2.62b}$$

由于 $k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$ 的周期性, 我们要求上式各项对快变量 $\boldsymbol{y}$ 也是周期函数. 上式代入方程 (6.2.62a) 得到 $\varepsilon$ 的各级近似为

(1) 零级近似满足的方程

$$\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot[k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})]=0 \tag{6.2.63a}$$

显然零级近似方程表明 $\psi_0$ 与快尺度变量 $\boldsymbol{y}$ 无关, 即取 $\psi_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})=\psi_0(\boldsymbol{r})$ 既满足方程 (6.2.63a), 又满足周期性条件;

(2) 一级近似满足的方程

$$\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot[k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})]=-\nabla_{\boldsymbol{y}}k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_0(\boldsymbol{r}) \tag{6.2.63b}$$

上式是关于快尺度变量 $\boldsymbol{y}$ 的偏微分方程, 由于 $\psi_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$ 关于 $\boldsymbol{y}$ 的周期性, 仅需在周期单元 $\Omega_0$ 内求解即可. 注意到 $\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_0(\boldsymbol{r})$ 与 $\boldsymbol{y}$ 无关, 且 $\psi_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$ 与 $\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_0(\boldsymbol{r})$ 是线性关系, 故把方程 (6.2.63b) 的解写成

$$\psi_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{a}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_0(\boldsymbol{r})+c(\boldsymbol{r}) \tag{6.2.63c}$$

其中 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是矢量场. 上式代入方程 (6.2.63b) 得到

$$\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot[k\nabla_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]=-\nabla_{\boldsymbol{y}}k\cdot\boldsymbol{b} \tag{6.2.64a}$$

其中 $\boldsymbol{b}\equiv\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_0(\boldsymbol{r})=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 与 $\boldsymbol{y}$ 无关. 上式的分量形式为

$$\sum_{j=1}^{n}b_j\left[\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{y}}a_j)+\frac{\partial k}{\partial y_j}\right]=0 \tag{6.2.64b}$$

其中 $n=2$(二维) 或者 3(三维). 取矢量场 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$ 满足的方程

$$\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{y}}a_j)=-\frac{\partial k}{\partial y_j},\ \boldsymbol{y}\in\ \Omega_0,\ (j=1,2,\cdots,n) \tag{6.2.64c}$$

则式 (6.2.63c) 必定是方程 (6.2.63b) 的一个解; 注意: $a_j$ 与 $\partial G$ 上的边界条件和 $f(\boldsymbol{r})$ 无关, 而仅与子结构元胞有关!

(3) 二级近似满足的方程

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_2)=&-\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_1)-\nabla_{\boldsymbol{r}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_1)\\&-\nabla_{\boldsymbol{r}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_0)+f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{y}\in\Omega_0\end{aligned} \tag{6.2.65a}$$

为了得到 $\psi_0(\boldsymbol{r})$ 满足的均质化方程, 定义函数 $\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$ 在元胞 $\Omega_0$ 内对 $\boldsymbol{y}$ 的平均

$$\langle\phi\rangle=\frac{1}{|\Omega_0|}\int_{\Omega_0}\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Omega_0 \tag{6.2.65b}$$

其中 $|\Omega_0|$ 是元胞 $\Omega_0$ 的面积 (二维) 或体积 (三维), $\mathrm{d}\Omega_0$ 是元胞 $\Omega_0$ 的面元 (二维) 或体元 (三维). 对方程 (6.2.65a) 二边在元胞 $\Omega_0$ 内对 $\boldsymbol{y}$ 平均

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_2)\rangle=&-\langle\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_1)\rangle-\langle\nabla_{\boldsymbol{r}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_1)\rangle\\&-\langle\nabla_{\boldsymbol{r}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_0)\rangle+\langle f(\boldsymbol{r})\rangle\end{aligned} \tag{6.2.65c}$$

注意到: (1) 上式左边项为

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_2)\rangle&=\frac{1}{|\Omega_0|}\int_{\Omega_0}\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_2)\mathrm{d}\Omega_0\\&=\frac{1}{|\Omega_0|}\iint_{\Omega_0}k\frac{\partial\psi_2}{\partial n_y}\mathrm{d}S_0=0\end{aligned} \tag{6.2.66a}$$

其中 $\mathrm{d}S_0$ 是元胞 $\Omega_0$ 边界上的线元 (二维) 或者面元 (三维). 因 $k$ 和 $\psi_2$ 为周期性函数, 故上式中面积分或线积分为零; 同理, $\langle\nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot(k\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_1)\rangle=0$; (2) 由式 (6.2.63c)

$$\langle k\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_1\rangle_i=\left\langle k\frac{\partial\psi_1}{\partial y_i}\right\rangle=\sum_{j=1}^{n}\left\langle k\frac{\partial a_j}{\partial y_i}\right\rangle b_j=\sum_{j=1}^{n}\left\langle k\frac{\partial a_j}{\partial y_i}\right\rangle\frac{\partial\psi_0}{\partial x_j}$$

故

$$\langle \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot (k\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_1)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle k\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_1\rangle_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle k\frac{\partial a_j}{\partial y_i}\right\rangle \frac{\partial \psi_0}{\partial x_j} \tag{6.2.66b}$$

(3) 方程 (6.2.65c) 的右边最后二项为 $\langle f(\boldsymbol{r})\rangle = f(\boldsymbol{r})$ 以及

$$\langle \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot (k\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_0)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle k\rangle \frac{\partial \psi_0}{\partial x_i} \tag{6.2.66c}$$

把以上诸式代入方程 (6.2.65c), 最后得到 $\psi_0(\boldsymbol{r})$ 满足的均质化方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[k_{ij}\frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{r})}{\partial x_j}\right] = f(\boldsymbol{r}) \tag{6.2.67a}$$

其中

$$k_{ij} \equiv \langle k\rangle \delta_{ij} + \left\langle k\frac{\partial a_j}{\partial y_i}\right\rangle \tag{6.2.67b}$$

而函数 $a_j$ 是方程 (6.2.64c) 的解.

必须指出的是, 从子结构尺度看 (称为 “微尺度”), 稳定温度场满足的是各向同性的非均匀介质的方程, 而均质化后得到的是各向异性、非均匀介质的方程 (6.2.67a), 也可以说, “微尺度” 具有周期结构的各向同性材料, 在 “大尺度” 来看, 材料是各向异性的.

**例 6.2.11** 考虑周期结构中的波动方程

$$\nabla \cdot [k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)\nabla\psi(\boldsymbol{r})] + q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}/\varepsilon)\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G \tag{6.2.68a}$$

的均质化问题. 作多尺度变换 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}/\varepsilon = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 后的方程为

$$(\nabla_{\boldsymbol{y}} + \varepsilon\nabla_{\boldsymbol{r}})\cdot[k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})(\nabla_{\boldsymbol{y}} + \varepsilon\nabla_{\boldsymbol{r}})\psi] + \varepsilon^2 q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{r}) = \varepsilon^2 f(\boldsymbol{r}) \tag{6.2.68b}$$

把展开式 (6.2.62b) 代入上式得到与式 (6.2.63a) 和 (6.2.63b) 同样的零级近似和一级近似方程. 相应地, 二级近似方程 (6.2.65a) 修改为

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{y}} \cdot (k\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_2) = &-\nabla_{\boldsymbol{y}} \cdot (k\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_1) - \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot (k\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_1) \\ &-\nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot (k\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi_0) + f(\boldsymbol{r}) - q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\psi_0(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{y}\in \Omega_0 \end{aligned} \tag{6.2.68c}$$

上式在元胞 $\Omega_0$ 内对 $\boldsymbol{y}$ 的平均, 并且利用式 (6.2.66a), (6.2.66b) 和 (6.2.66c) 得到均质化方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[k_{ij}\frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{r})}{\partial x_j}\right] + \langle q(\boldsymbol{r})\rangle\,\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) \tag{6.2.68d}$$

其中 $k_{ij}$ 由方程 (6.2.67b) 决定, 而 $\langle q(\boldsymbol{r})\rangle$ 是函数 $q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$ 在元胞 $\Omega_0$ 内对 $\boldsymbol{y}$ 的平均.

# 6.3　奇异微扰及边界层理论

上节已指出, 当小参数 $\varepsilon$ 出现在方程的高阶导数上时, 零级近似方程的类型及阶数都要变化. 因此不可能同时满足给定的初始条件或边界条件. 一般来说, 这是由于方程的解在边界或初值处变化十分剧烈, 而通常的微扰展开无法表示这种现象而产生的. 解决这个问题的方法即是本节要介绍的边界层理论.

### 6.3.1　边界层理论的基本思想

为了阐明边界层理论的基本思想, 首先讨论一个简单但可严格求解的边值问题. 考虑二阶常微分方程的边值问题 (其中 $\varepsilon \ll 1$)

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}+\psi=0,\ x\in(0,1)\\ \psi(x)|_{x=0}=\alpha;\ \psi(x)|_{x=1}=\beta\end{gathered}\tag{6.3.1a}$$

对 $\psi(x)$ 作通常的微扰展开

$$\psi(x)=\psi_0(x)+\varepsilon\psi_1(x)+\cdots\tag{6.3.1b}$$

代入方程 (6.3.1a) 得到 $\psi_0(x)$ 和 $\psi_1(x)$ 满足的方程及边界条件

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}+\psi_0=0,\ x\in(0,1)\\ \psi_0(x)|_{x=0}=\alpha;\ \psi_0(x)|_{x=1}=\beta\end{gathered}\tag{6.3.2a}$$

及

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}+\psi_1=-\frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}x^2},\ x\in(0,1)\\ \psi_1(x)|_{x=0}=0;\ \psi_1(x)|_{x=1}=0\end{gathered}\tag{6.3.2b}$$

由上两式可见, $\psi_0(x)$ 和 $\psi_1(x)$ 满足一阶方程, 但定解条件有两个. 因此它们是超定的, 一般来说 $\psi_0(x)$ 和 $\psi_1(x)$ 的解不存在 (除非 $\alpha$ 与 $\beta$ 满足一定的关系). 为了使 $\psi_0(x)$ 和 $\psi_1(x)$ 有解, 应抛弃掉一个边界条件 (意义见后面讨论), 如果要求 $\psi_0(x)$ 满足 $\psi_0(x)|_{x=0}=0$, 则得解 (称为左解)$\psi_0(x)\equiv\psi_0^{(L)}(x)$

$$\psi_0^{(L)}(x)=\alpha\exp(-x)\tag{6.3.3a}$$

反之, 如要求满足 $\psi_0(x)|_{x=1}=\beta$, 则得解 (称为右解)$\psi_0(x)\equiv\psi_0^{(R)}(x)$

$$\psi_0^{(R)}(x)=\beta\exp(1-x)\tag{6.3.3b}$$

问题是哪一个解有意义? 下面的讨论表明应取满足 $\psi_0|_{x=1}=\beta$ 的解 $\psi_0^{(R)}(x)$. 把上式代入方程 (6.3.2b), 取满足 $\psi_1(x)|_{x=1}=0$ 的解 $\psi_1^{(R)}(x)$

$$\psi_1^{(R)}(x)=\beta(1-x)\exp(1-x) \tag{6.3.3c}$$

于是我们得到方程 (6.3.1a) 的一个近似解

$$\psi(x)\approx\beta\exp(1-x)+\varepsilon\beta(1-x)\exp(1-x)+\cdots \tag{6.3.3d}$$

显然上式在 $x=0$ 点不满足条件 $\psi(x)|_{x=0}=\alpha$. 因此至少在 $x=0$ 点附近, 上式不是方程 (6.3.1a) 的一个很好的近似解. 为了进一步考察式 (6.3.3d) 的意义, 我们来求方程 (6.3.1a) 的精确解, 通解为

$$\psi(x)=A\exp(\chi_+x)+B\exp(\chi_-x) \tag{6.3.4a}$$

其中 $\chi_\pm=(-1\pm\sqrt{1-4\varepsilon})/2\varepsilon$. 当 $\varepsilon\to0$ 时 $\chi_\pm$ 有近似式

$$\chi_+=-1-\varepsilon,\ \chi_-=1-\frac{1}{\varepsilon} \tag{6.3.4b}$$

利用边界条件可求得常数 $A$ 和 $B$

$$A\approx\beta\mathrm{e};\ B\approx\alpha-\beta\mathrm{e} \tag{6.3.4c}$$

因此, 当 $\varepsilon\ll1$ 时, 方程 (6.3.1a) 的近似解为

$$\psi(x)\approx\beta\exp(1-x)+(\alpha-\beta\mathrm{e})\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}+x\right) \tag{6.3.5a}$$

当 $x>0$ 时, 上式近似为

$$\psi(x)\approx\beta\exp(1-x),\ \varepsilon\to0 \tag{6.3.5b}$$

显然, 上式即是满足右边界条件的零级近似. 但是当 $x$ 接近边界点 $x=0$, 即当 $x\sim\varepsilon$ 时, 式 (6.3.5b) 第二项已不能略去

$$\psi(x)\approx\alpha\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{6.3.5c}$$

显然, 上式与式 (6.3.3a) 存在本质的区别. 由此可见, 通常的微扰展开式 (6.3.1b) 在边界点 $x=0$ 是不合适的, 比较式 (6.3.5a) 和 (6.3.3d), 如图 6.3.1, 显然式 (6.3.3d) 仅在 $x=0$ 附近 $\Delta x\sim\varepsilon$ 的薄层内与严格解式 (6.3.5a) 相差甚大, 而在此区域以外, 仍是一个很好的近似. 由于 $\psi(x)$ 要满足边界条件 $\psi(x)|_{x=0}=\alpha$, 在 $\Delta x\sim\varepsilon$ 区域变化十分剧烈, 从式 (6.3.5c) 也可看出这点.

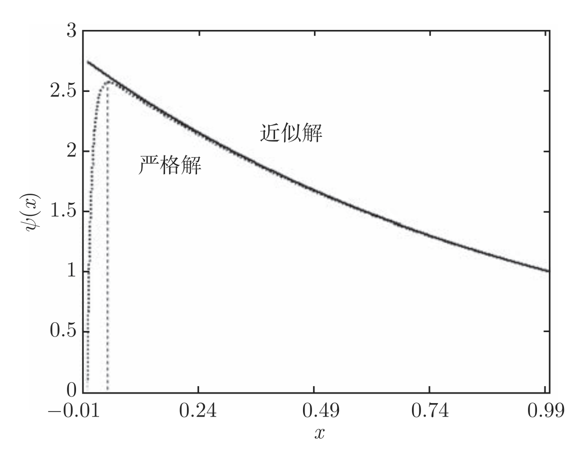



图 6.3.1 近似解和严格解比较 $\alpha=0,\ \beta=1.0,\ \varepsilon=0.01$

当 $x\to 0$ 时, $\psi$ 依赖于 "快尺度" 变量 $\xi=x/\varepsilon$, 称这种通常的微扰展开不成立的区域为**边界层**. 如何寻求边界内的微扰展开即是边界层理论的目的. 由上讨论可知, 在 $x=0$ 附近, 必须按 "快尺度" 变量 $\xi=x/\varepsilon$ 作展开, 变换 $\xi=x/\varepsilon$ 的意义很明显, 由于 $\varepsilon\ll 1$, $x/\varepsilon$ 相当于把坐标拉伸, 从而改变 $x=0$ 处解变化的剧烈程度. 因此在 $x=0$ 附近作展开

$$\psi(\xi)=\psi_0(\xi)+\varepsilon\psi_1(\xi)+\cdots \tag{6.3.6a}$$

上式代入 (6.3.1a) 可得 $\psi_0(\xi)$ 和 $\psi_1(\xi)$ 满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}\xi}=0;\quad \frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}\xi}=-\psi_0 \tag{6.3.6b}$$

因在 $x=0$ 附近展开, 故只有一个边界条件可供使用

$$\psi_0(\xi)|_{\xi=0}=\alpha;\ \psi_1(\xi)|_{\xi=0}=0 \tag{6.3.6c}$$

上两式的解为

$$\begin{gathered}\psi_0(\xi)=\alpha+[\exp(-\xi)-1]b_0\\ \psi_1(\xi)=-(\alpha-b_0)\xi+b_0\xi\exp(-\xi)+b_1[\exp(-\xi)-1]\end{gathered} \tag{6.3.6d}$$

式中仍有二个常数待定, 问题是如何决定常数 $b_0$ 和 $b_1$. 为了讨论的方便, 用 $\psi^{(o)}(x)$ 表示由通常的微扰展式 (6.3.1b) 得到的解式 (6.3.3d)

$$\psi^{(o)}(x)=\beta\exp(1-x)+\varepsilon\beta(1-x)\exp(1-x)+\cdots \tag{6.3.7a}$$

$\psi^{(o)}(x)$ 仅在边界层以外成立, 故称 $\psi^{(o)}(x)$ 为外部解; 用 $\psi^{(i)}(\xi)$ 表示边界层内的展式 (6.3.6a)

$$\psi^{(i)}(\xi)=\alpha+[\exp(-\xi)-1]b_0$$
$$+\varepsilon\left\{-(\alpha-b_0)\xi+b_0\xi\exp(-\xi)+b_1[\exp(-\xi)-1]\right\}+\cdots \tag{6.3.7b}$$

$\psi^{(i)}(\xi)$ 在边界层内成立, 故称为内部解. 因此, 我们得到了在不同区域内成立的二个展式 $\psi^{(o)}(x)$ 和 $\psi^{(i)}(\xi)$. 为了使 $\psi^{(o)}(x)$ 和 $\psi^{(i)}(\xi)$ 能表达整个区域 $[0,1]$ 上的解, 希望 $\psi^{(o)}(x)$ 和 $\psi^{(i)}(\xi)$ 的成立区域能相互交迭, 否则在 $\psi^{(o)}(x)$ 和 $\psi^{(i)}(\xi)$ 不交迭的区域, 解仍未知. 下面考察式 (6.3.7a) 和 (6.3.7b) 能否交迭以及相互交迭的条件. 为此把 $\psi^{(o)}(x)$ 用 “内变数”$\xi$ 来表达

$$\psi^{(o)}(\varepsilon\xi)=\beta\exp(1-\varepsilon\xi)+\varepsilon\beta(1-\varepsilon\xi)\exp(1-\varepsilon\xi) \tag{6.3.8a}$$

式中 $\xi$ 保持不变, 而作 $\varepsilon$ 展开后得到的式子用 $[\psi^{(o)}(\varepsilon\xi)]^{(i)}$ 表示

$$[\psi^{(o)}(\varepsilon\xi)]^{(i)}\approx\beta\mathrm{e}+\varepsilon\beta\mathrm{e}(1-\xi) \tag{6.3.8b}$$

另一方面把 $\psi^{(i)}(\xi)$ 用 “外变数”$x$ 来表示

$$\psi^{(i)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=\alpha-b_0+b_0\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$$
$$+\varepsilon\left[-b_1+b_1\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)-(\alpha-b_0)\frac{x}{\varepsilon}+b_0\frac{x}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]+\cdots \tag{6.3.8c}$$

用 $\left[\psi^{(i)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]^{(o)}$ 表示上式中 $x$ 保持不变, 而作 $\varepsilon\to 0$ 展开后得到的式子

$$\left[\psi^{(i)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]^{(o)}\approx\alpha-b_0+\varepsilon(-b_1)-(\alpha-b_0)x \tag{6.3.8d}$$

$\psi^{(o)}(x)$ 和 $\psi^{(i)}(\xi)$ **相互交迭的条件**是

$$[\psi^{(o)}(\varepsilon\xi)]^{(i)}=\left[\psi^{(i)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]^{(o)} \tag{6.3.9a}$$

于是有

$$\beta\mathrm{e}(1-x)+\beta\mathrm{e}\varepsilon=(\alpha-b_0)(1-x)-b_1\varepsilon \tag{6.3.9b}$$

比较 $\varepsilon$ 的同次幂应有 $b_1=-\beta\mathrm{e}$ 和 $b_0=\alpha-\beta\mathrm{e}$, 代入式 (6.3.7b) 得到 $x=0$ 附近的解

$$\psi^{(i)}(x)=\left\{\alpha+(-\alpha+\beta\mathrm{e})\left[1-\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]\right\}$$
$$+\varepsilon\left\{-\beta\mathrm{e}\frac{x}{\varepsilon}+(\alpha-\beta\mathrm{e})\frac{x}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)+\beta\mathrm{e}\left[1-\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]\right\}+\cdots$$
$$=\beta\mathrm{e}(1-x)+(\alpha-\beta\mathrm{e})(1+x)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\beta\mathrm{e}\left[1-\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]+\cdots \tag{6.3.9c}$$

显然 $\psi^{(i)}(x)$ 在 $x=0$ 处满足边界条件 $\psi^{(i)}(0)=\alpha$. 如图 6.3.2, 比较上式与严格解式 (6.3.5a) 可知, $\psi^{(i)}(x)$ 确是在 $x=0$ 附近的一个很好的近似解, 但在 $x=1$ 附近则相差甚远.

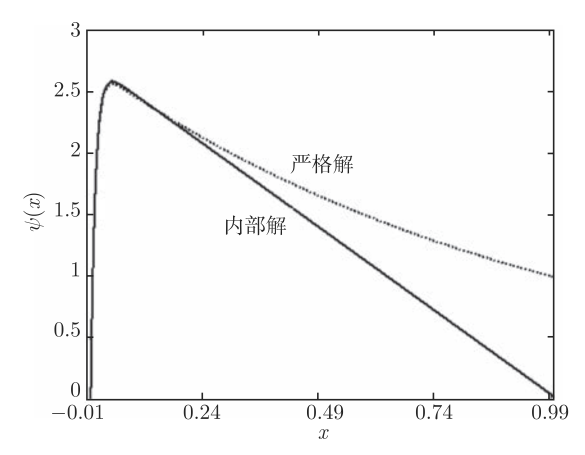



图 6.3.2 内部解 $\psi^{(\mathrm{i})}$ 和严格解比较 $\alpha=0,\ \beta=1.0,\ \varepsilon=0.01$

上述决定内部解的系数方法称为**渐近匹配法**, 其基本思想是: 内部解 $\psi^{(i)}(\xi)$ 依“外变量”$x$ 作展开 $(\varepsilon\to 0)$ 得到的渐近式 $[\psi^{(i)}]^{(o)}$ 应等于外部解 $\psi^{(o)}(x)$ 依“内部变量”$x/\varepsilon=\xi$ 作展开 $(\varepsilon\to 0)$ 得到的渐近式 $[\psi^{(o)}]^{(i)}$.

本例中已知道 $x=0$ 处是边界层, 而内部变量 $\xi=x/\varepsilon$, 在一般问题中并没有这些先验知识. 因此在实际问题中, 可利用物理条件首先判断边界层在何处, 也可尝试找出边界层, 其方法是

(1) 假定某一个边界是边界层, 则作内部变量变换 $\xi=\varepsilon^{-\nu}x$

(2) 选择恰当的 $\nu$, 使 $\psi^{(i)}(\xi)$ 与 $\psi^{(o)}(x)$ 能渐近匹配, 如果 $\psi^{(i)}(\xi)$ 与 $\psi^{(o)}(x)$ 能匹配, 则这个边界是边界层, 否则一定在另一个边界处;

(3) 进行步骤 (1) 和 (2) 的同时, 也求得了 $\psi^{(i)}(\xi)$ 与 $\psi^{(o)}(x)$, 并且 $\psi^{(i)}(\xi)$ 与 $\psi^{(o)}(x)$ 在中间某一区域是交迭的, 故相当于求得整个区域内的近似解.

**复合解** 在实际计算中, 并不确切知道 $\psi^{(i)}(\xi)$ 与 $\psi^{(o)}(x)$ 交迭的区域, 故分段表示 $\psi(x)$ 比较麻烦, 通常用 $\psi^{(i)}(\xi)$ 和 $\psi^{(o)}(x)$ 的组合来表示整个区域上的近似解 $\psi^{(c)}(x)$

$$\begin{aligned}\psi^{(c)}(x)&=\psi^{(o)}(x)+\psi^{(i)}(\xi)-[\psi^{(o)}(\varepsilon^{\nu}\xi)]^{(i)}\\&=\psi^{(o)}(x)+\psi^{(i)}(\xi)-\left[\psi^{(i)}\left(\frac{x}{\varepsilon^{\nu}}\right)\right]^{(o)}\end{aligned}\tag{6.3.10a}$$

$\psi^{(c)}(x)$ 称为**复合解**. $\psi^{(c)}(x)$ 在边界层与 $\psi^{(i)}(\xi)$ 一致, 而在外部与 $\psi^{(o)}(x)$ 一致. 这

是容易证明的: 在边界层区域

$$[\psi^{(c)}]^{(i)} = [\psi^{(o)}]^{(i)} + [\psi^{(i)}]^{(i)} - [[\psi^{(o)}]^{(i)}]^{(i)} \tag{6.3.10b}$$

因 $[\psi^{(i)}]^{(i)} = \psi^{(i)}$ 和 $[[\psi^{(o)}]^{(i)}]^{(i)} = [\psi^{(o)}]^{(i)}$, 故 $[\psi^{(c)}]^{(i)} = \psi^{(i)}$. 而在外部区域

$$\begin{aligned}[\psi^{(c)}]^{(o)} &= [\psi^{(o)}]^{(o)} + [\psi^{(i)}]^{(o)} - [[\psi^{(i)}]^{(o)}]^{(o)} \\ &= \psi^{(o)} + [\psi^{(i)}]^{(o)} - [\psi^{(i)}]^{(o)} = \psi^{(o)}\end{aligned} \tag{6.3.11a}$$

因此我们得到方程 (6.3.1a) 近似到 $O(\varepsilon)$ 级的复合解

$$\begin{aligned}\psi^{(c)}(x) = (\alpha - \beta e)(1 + x)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ +\beta\exp(1 - x) + O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{6.3.11b}$$

比较上式与式 (6.3.5a), 如图 6.3.3, $\psi^{(c)}(x)$ 确是一个在整个区域内都较好的近似解. 下面举几个例子说明用渐近匹配法求奇异微扰问题的近似解.

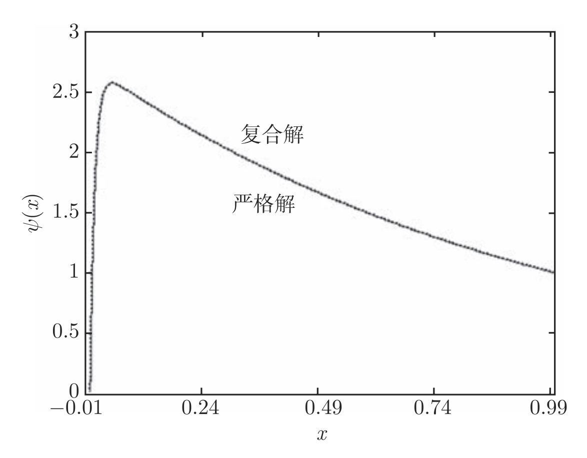



图 6.3.3　复合解与严格解的比较, 二者基本一样

### 6.3.2　二阶线性方程的边值问题

利用渐近匹配法求变系数二阶线性方程的下列边值问题的微扰解

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + p_0(x)\psi = 0,\ x \in (0,1) \\ \psi(x)|_{x=0} = \alpha;\ \psi(x)|_{x=1} = \beta\end{gathered} \tag{6.3.12a}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, $p_1(x)$ 在 [0,1] 内不变号 (反例见例 6.3.2), $p_1(x) > 0$ 或者 $p_1(x) < 0$. 首先分析何处是边界层, 假定边界层发生在 $x = 0$ 处, 引进内变量

$$\xi = \varepsilon^{-v}x\text{或者}x = \varepsilon^{v}\xi,\ (v > 0) \tag{6.3.12b}$$

代入方程 (6.3.12a) 得内部解 $\psi^{(i)}(\xi)$ 满足的方程

$$\varepsilon^{1-2v}\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2}+\varepsilon^{-v}p_1(\varepsilon^v\xi)\frac{\mathrm{d}\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi}+p_0(\varepsilon^v\xi)\psi^{(i)}=0 \tag{6.3.12c}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时, $p_1(\varepsilon^v\xi)\to p_1(0)$ 和 $p_0(\varepsilon^v\xi)\to p_0(0)$, 于是上式变成

$$\varepsilon^{1-2v}\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2}+\varepsilon^{-v}p_1(0)\frac{\mathrm{d}\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi}+p_0(0)\psi^{(i)}=0 \tag{6.3.12d}$$

如取 $v=1$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2}+p_1(0)\frac{\mathrm{d}\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi}=0 \tag{6.3.13a}$$

上式的通解为

$$\psi^{(i)}(\xi)=a_0+b_0\exp[-p_1(0)\xi] \tag{6.3.13b}$$

由内部解满足的边界条件 $\psi^{(i)}(\xi)|_{\xi=0}=\alpha$ 得 $a_0=\alpha-b_0$, 因此

$$\psi^{(i)}(\xi)=\alpha+b_0\left\{\exp[-p_1(0)\xi]-1\right\} \tag{6.3.13c}$$

当 $p_1(0)<0$ 时, 如取 $\varepsilon\to 0$, $\exp[-p_1(0)\xi]$ 指数发散, 因此边界层不可能在 $x=0$ 处; 当 $p_1(0)>0$ 时, 如取 $\varepsilon\to 0$, $\exp[-p_1(0)\xi]$ 指数衰减, 边界层有可能在 $x=0$ 处; 当 $p_1(0)=0$ 时, 方程 (6.3.13a) 的解应该为

$$\psi^{(i)}(\xi)=\alpha+b_0\xi \tag{6.3.13d}$$

同样有 $\psi^{(i)}(\xi)\to\pm\infty(\varepsilon\to 0)$, 但此时边界层仍然有可能在 $x=0$ 处, 不过 $v$ 的取值不恰当, 见例 6.3.1 讨论. 下面设 $p_1(x)>0$. 为求常数 $b_0$, 展开外部解 $\psi^{(o)}(x)$ 成

$$\psi^{(o)}(x)=\psi_0^{(o)}(x)+\varepsilon\psi_1^{(o)}(x)+\cdots \tag{6.3.14a}$$

代入方程 (6.3.12a) 得到零级近似 $\psi_0^{(o)}(x)$ 满足的方程

$$p_1(x)\frac{\mathrm{d}\psi_0^{(o)}(x)}{\mathrm{d}x}+p_0(x)\psi_0^{(o)}(x)=0 \tag{6.3.14b}$$

因 $p_1(x)>0$, 边界层在 $x=0$ 处, 故 $\psi_0^{(o)}(x)$ 满足右边界条件 $\psi(x)|_{x=1}=\beta$, 于是近似到 $O(\varepsilon)$ 级外部解为

$$\psi^{(o)}(x)\approx\beta\exp\left[\int_x^1\frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right] \tag{6.3.14c}$$

渐近匹配过程如下:

(1) $\psi^{(o)}(x)$ 用内部变量 $\xi=x/\varepsilon$ 表示

$$\psi^{(o)}(\varepsilon\xi)\approx\beta\exp\left[\int_{\varepsilon\xi}^{1}\frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right] \tag{6.3.15a}$$

保持内部变量 $\xi$ 不变, 对小参数 $\varepsilon$ 作展开并取首项

$$[\psi^{(o)}(\varepsilon\xi)]^{(i)}\approx\beta\exp\left[\int_{0}^{1}\frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right] \tag{6.3.15b}$$

(2) $\psi^{(i)}(\xi)$ 用外部变量 $x$ 表示, 由式 (6.3.13b)

$$\psi^{(i)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\approx\alpha-b_0+b_0\exp\left[-p_1(0)\frac{x}{\varepsilon}\right] \tag{6.3.15c}$$

保持 $x$ 不变, 对小参数 $\varepsilon$ 作展开并取首项

$$\left[\psi^{(i)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]^{(o)}\approx\alpha-b_0 \tag{6.3.15d}$$

(3) 由渐近匹配条件得

$$b_0=\alpha-\beta\exp\left[\int_{0}^{1}\frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right] \tag{6.3.16a}$$

因此零级近似的内部解为

$$\begin{aligned}\psi^{(i)}(\xi)=&\left\{\alpha-\beta\exp\left[\int_{0}^{1}\frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\right\}\exp[-p_1(0)\xi]\\&+\beta\exp\left[\int_{0}^{1}\frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right]+O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{6.3.16b}$$

在 [0,1] 内均成立的复合解 ($\varepsilon\to 0$) 为

$$\begin{aligned}\psi^{(c)}(x)=&\left\{\alpha-\beta\exp\left[\int_{0}^{1}\frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\right\}\exp\left[-p_1(0)\frac{x}{\varepsilon}\right]\\&+\beta\exp\left[\int_{x}^{1}\frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right]+O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{6.3.16c}$$

**例 6.3.1** 考虑下列边值问题

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}-x\psi=0,\ x\in(0,1)\\ \psi(x)|_{x=0}=\alpha;\ \psi|_{x=1}=\beta\end{gathered} \tag{6.3.17a}$$

因 $p_1(0)=0$, 故式 (6.3.16c) 不适合. 仍设边界层在 $x=0$ 处 (因为 $p_1(x)\geqslant 0$) 且作外部展开

$$\psi^{(o)}(x)=\psi_0^{(o)}(x)+\varepsilon\psi_1^{(o)}(x)+\cdots \tag{6.3.17b}$$

代入方程 (6.3.17a) 得

$$x\frac{\mathrm{d}\psi_0^{(o)}(x)}{\mathrm{d}x}-x\psi_0^{(o)}(x)=0 \tag{6.3.17c}$$

上式满足右边界条件的解为

$$\psi_0^{(o)}(x)=\beta\exp(x-1) \tag{6.3.17d}$$

因此零级近似 $\psi_0^{(o)}(x)$ 为

$$\psi_0^{(o)}(x)=\beta\exp(x-1)+O(\varepsilon) \tag{6.3.18a}$$

另一方面, 考虑边界层内部解, 作内部变量变换

$$\xi=\varepsilon^{-v}x \quad \text{或} \quad x=\varepsilon^{v}\xi\ ,\ (v>0) \tag{6.3.18b}$$

代入方程 (6.3.17a) 得

$$\varepsilon^{1-2v}\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2}+\xi\frac{\mathrm{d}\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi}-\varepsilon^{v}\xi\psi^{(i)}=0 \tag{6.3.18c}$$

这时 $v$ 应取 $v=1/2$, 否则不可能与外部解匹配, 于是上式变成

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2}+\xi\frac{\mathrm{d}\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi}=0 \tag{6.3.19a}$$

上式满足左边界的解为

$$\psi^{(i)}(\xi)=a_0\int_0^{\xi}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau+\alpha \tag{6.3.19b}$$

其中 $a_0$ 为常数, 由外部解 $\psi^{(o)}(x)$ 和内部解 $\psi^{(i)}(\xi)$ 的匹配求得.

渐近匹配过程如下:

(1) 外部解 $\psi^{(o)}(x)$ 用内部变量表示

$$\psi^{(o)}(\varepsilon^{1/2}\xi)\approx\beta\exp(x-1)=\beta\exp(\varepsilon^{1/2}\xi-1) \tag{6.3.20a}$$

保持内部变量 $\xi$ 不变, 对小参数 $\varepsilon$ 作展开

$$[\psi^{(o)}(\varepsilon^{1/2}\xi)]^{(i)}=\beta\mathrm{e}^{-1}(1+\sqrt{\varepsilon}\xi+\cdots)\approx\beta\mathrm{e}^{-1} \tag{6.3.20b}$$

(2) 内部解 $\psi^{(i)}(\xi)$ 用外部变量表示

$$\psi^{(i)}(\varepsilon^{-1/2}x)\approx a_0\int_0^{\varepsilon^{-1/2}x}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau+\alpha \tag{6.3.20c}$$

保持外部变量 $x$ 不变, 作展开

$$[\psi^{(i)}(\varepsilon^{-1/2}x)]^{(o)} = a_0\int_0^{\infty}\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau + \alpha + \cdots \approx a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \alpha \tag{6.3.20d}$$

(3) 由渐近匹配条件 $[\psi^{(o)}(\varepsilon^{1/2}\xi)]^{(i)} = [\psi^{(i)}(\varepsilon^{-1/2}x)]^{(o)}$ 得

$$\beta\mathrm{e}^{-1} = a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \alpha \tag{6.3.21a}$$

因此

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\beta\mathrm{e}^{-1} - \alpha) \tag{6.3.21b}$$

于是方程 (6.3.17a) 的复合解为

$$\begin{aligned}\psi^{(c)}(x) =& \beta\exp(x-1) + \alpha - \beta\mathrm{e}^{-1}\\ &+\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\beta\mathrm{e}^{-1} - \alpha)\int_0^{\xi}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{6.3.21c}$$

上例假定 $p_1(x)$ 在 [0,1] 内无零点, 当 $p_1(x)$ 在 [0,1] 存在零点时, 零点附近可能形成边界层, 其意义是解 $\psi(x)$ 在 $p_1(x)$ 的零点附近变化剧烈, 不能用通常的微扰展开来求近似解.

**例 6.3.2** 考虑边值问题

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} - \left(x-\frac{1}{2}\right)\psi = 0,\ x\in(0,1)\\ \psi(x)|_{x=0} = \alpha;\ \psi(x)|_{x=1} = \beta\end{gathered} \tag{6.3.22a}$$

这时 $p_1(x) = (x-1/2)$: 当 $x<1/2$ 时, $p_1(x)<0$; 当 $x>1/2$ 时, $p_1(x)>0$. 不难表明在 $x=1/2$ 处存在边界层. 作外部展开

$$\psi^{(o)}(x) = \psi_0^{(o)}(x) + \varepsilon\psi_1^{(o)}(x) + \cdots \tag{6.3.22b}$$

代入方程 (6.3.22a) 得

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\psi_0^{(o)}}{\mathrm{d}x} - \left(x-\frac{1}{2}\right)\psi_0^{(o)} = 0 \tag{6.3.22c}$$

当 $x\neq 1/2$ 时, 上式的解为

$$\psi_0^{(o)}(x) = c_0\exp(x) \tag{6.3.22d}$$

因此有分段表示的外部解

$$\psi_r^{(o)}(x) = \beta\exp(x-1) + \cdots,\ (x>1/2) \tag{6.3.23a}$$

$\psi_r^{(o)}(x)$ 满足右边界条件, 以及

$$\psi_l^{(o)}(x) = \alpha \exp(x) + \cdots,\ (x < 1/2) \tag{6.3.23b}$$

$\psi_l^{(o)}(x)$ 满足左边界条件. 在边界层 $x = 1/2$ 处作内部变量变换

$$\xi = \frac{x - 1/2}{\varepsilon^v} \quad \text{或者} \quad x = \frac{1}{2} + \varepsilon^v \xi,\ (\ v > 0) \tag{6.3.24a}$$

代入方程 (6.3.22a) 可知应取 $v = 1/2$, 于是内部解满足

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi\frac{\mathrm{d}\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{6.3.24b}$$

上式的一般解是

$$\psi^{(i)}(\xi) = b_0 + a_0\int_0^\xi \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau \tag{6.3.24c}$$

渐近匹配过程如下:

(1) $x = 1/2$ 右边外部解 $\psi_r^{(o)}(x)$ 用内变量表示

$$\psi_r^{(o)}\left(\varepsilon^{1/2}\xi + \frac{1}{2}\right) \approx \beta \mathrm{e}^{\sqrt{\varepsilon}\xi - 1/2} = \frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{e}}}(1 + \sqrt{\varepsilon}\xi + \cdots) \tag{6.3.25a}$$

于是

$$\left[\psi_r^{(o)}\left(\varepsilon^{1/2}\xi + \frac{1}{2}\right)\right]^{(i)} = \frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{e}}} \tag{6.3.25b}$$

(2) $x = 1/2$ 右边内部解 $\psi^{(i)}(\xi)$ 用外变量 $x$ 表示

$$\begin{aligned}\psi^{(i)}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] &= b_0 + a_0\int_0^{(x-1/2)/\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau \\ &= b_0 + a_0\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau + \cdots\end{aligned} \tag{6.3.25c}$$

于是

$$\left\{\psi^{(i)}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]\right\}^{(o)} = b_0 + a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{6.3.26a}$$

(3) 由 $x = 1/2$ 右边渐近匹配条件得

$$b_0 + a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{e}}} \tag{6.3.26b}$$

(4) $x = 1/2$ 左边内部解 $\psi^{(i)}(\xi)$ 用外变量 $x$ 表示

$$\psi^{(i)}\left[\left(-\frac{1}{2} + x\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] = b_0 + a_0\int_0^{(-1/2+x)/\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau \tag{6.3.27a}$$

注意在 $x=1/2$ 的左边 $\xi<0$

$$\begin{aligned}\psi^{(i)}\left[\left(-\frac{1}{2}+x\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]&=b_0+a_0\int_0^{-\infty}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau+\cdots\\&=b_0-a_0\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau+\cdots\end{aligned}\tag{6.3.27b}$$

于是

$$\left\{\psi^{(i)}\left[\left(-\frac{1}{2}+x\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]\right\}^{(o)}=b_0-a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tag{6.3.27c}$$

(5) 由 $x=1/2$ 左边渐近匹配条件得

$$b_0-a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\alpha\sqrt{\mathrm{e}}\tag{6.3.28a}$$

从方程 (6.3.26b) 和 (6.3.28a) 可解得

$$b_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{e}}}+\alpha\sqrt{\mathrm{e}}\right);\ a_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{e}}}-\alpha\sqrt{\mathrm{e}}\right)\tag{6.3.28b}$$

这时不可能得到 [0,1] 上统一的复合解, 复合解只能分段表示:

(1) 在 [0,1/2] 内, $\psi_l^{(c)}=\psi_l^{(o)}+\psi_l^{(i)}-[\psi_l^{(o)}]^{(i)}$, 即

$$\begin{aligned}\psi_l^{(c)}(x)=&\,\alpha\exp(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{e}}}+\alpha\sqrt{\mathrm{e}}\right)-\alpha\sqrt{\mathrm{e}}\\&+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{e}}}-\alpha\sqrt{\mathrm{e}}\right)\int_0^{\xi}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau+\cdots\end{aligned}\tag{6.3.28c}$$

(2) 在 [1/2,1] 内, $\psi_r^{(c)}=\psi_r^{(o)}+\psi_r^{(i)}-[\psi_r^{(o)}]^{(i)}$

$$\begin{aligned}\psi_r^{(c)}(x)=&\,\beta\exp(x-1)+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{e}}}+\alpha\sqrt{\mathrm{e}}\right)-\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{e}}}\\&+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{e}}}-\alpha\sqrt{\mathrm{e}}\right)\int_0^{\xi}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau+\cdots\end{aligned}\tag{6.3.28d}$$

在边界层, 显然有 $\psi_l^{(c)}(1/2)=\psi_r^{(c)}(1/2)$.

### 6.3.3 非线性微扰引起的边界层

上节的例子都是针对线性方程的边值问题, 微扰参数出现在二阶导数, 下例说明非线性微扰也能引起边界层. 考虑下列非线性边值问题

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}+\varepsilon\psi\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=0,\ x\in(1,\infty)\\\psi(x)|_{x=1}=0;\ \psi(x)|_{x=\infty}=1\end{gathered}\tag{6.3.29a}$$

注意: $\varepsilon$ 出现在非线性项上, 而不是出现在二阶导数上. 作通常的微扰展开

$$\psi(x)=\psi_0(x)+\varepsilon\psi_1(x)+\cdots \tag{6.3.29b}$$

代入方程 (6.3.29a) 并比较 $\varepsilon$ 的同次幂得

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}=0\\ \psi_0(x)|_{x=1}=0;\ \psi_0(x)|_{x=\infty}=1\end{gathered} \tag{6.3.29c}$$

以及

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}=-\psi_0\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}\\ \psi_1(x)|_{x=1}=0;\ \psi_1(x)|_{x=\infty}=0\end{gathered} \tag{6.3.29d}$$

用 $x^2$ 乘方程 (6.3.29c) 第一式两边可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}\right)=0 \tag{6.3.30a}$$

因此通解为

$$\psi_0(x)=-\frac{a_0}{x}+b_0 \tag{6.3.30b}$$

又由方程 (6.3.29c) 中的边界条件得 $b_0=1$ 和 $a_0=1$, 故零级近似解为

$$\psi_0(x)=1-\frac{1}{x} \tag{6.3.30c}$$

下面考虑一级近似 $\psi_1(x)$, 把上式代入方程 (6.3.29d) 的第一式

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3} \tag{6.3.31a}$$

两边乘 $x^2$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}\right)=-1+\frac{1}{x} \tag{6.3.31b}$$

上式的通解为

$$\psi_1(x)=-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x-(1+a_1)\frac{1}{x}+b_1 \tag{6.3.31c}$$

由方程 (6.3.29d) 的边界条件得 $b_1=a_1+1$

$$\psi_1(x)=-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x+b_1\left(1-\frac{1}{x}\right) \tag{6.3.31d}$$

但是由 $x \to \infty$ 时, $\psi_1(x) \to -\ln x$. 故 $\psi_1$ 不可能满足无穷远处边界条件. 在无穷远处, 通常的微扰展开式 (6.3.29b) 不合适, 它只适合于 $x$ 较小的区域. 于是在 $x = \infty$ 处存在 "边界层". 由式 (6.3.30c) 和 (6.3.31b), 外部解 $\psi^{(o)}$ 为

$$\psi^{(o)}(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \varepsilon\left[-\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x + b_1\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right] + O(\varepsilon^2) \tag{6.3.32a}$$

为了考察 $x = \infty$ 处解的特性, 这时应采用内变量

$$\xi = \varepsilon^v x,\ v > 0 \tag{6.3.32b}$$

上式的作用是坐标压缩, 故称为 **"压缩" 变换**, 代入方程 (6.3.29a)

$$\varepsilon^{2v}\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{2\varepsilon^{2v}}{\xi}\frac{\mathrm{d}\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi} + \varepsilon^{1+v}\psi^{(i)}\frac{\mathrm{d}\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{6.3.32c}$$

这时取 $v = 1$, 内部解满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{\mathrm{d}\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi} + \psi^{(i)}\frac{\mathrm{d}\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{6.3.33a}$$

作展开

$$\psi^{(i)}(\xi) = \psi_0^{(i)}(\xi) + \varepsilon\psi_1^{(i)}(\xi) + \cdots \tag{6.3.33b}$$

为了使展开式简单化, 先利用匹配条件

$$[\psi_0^{(i)}(\varepsilon x)]^{(o)} = [\psi_0^{(o)}(\xi/\varepsilon)]^{(i)} \tag{6.3.33c}$$

由方程 (6.3.32a), $[\psi_0^{(o)}(\xi/\varepsilon)]^{(i)} = 1 - \varepsilon/\xi = 1$(当 $\xi$ 不变而 $\varepsilon \to 0$ 时). 因此要求 $[\psi_0^{(i)}(\varepsilon x)]^{(o)} = 1$, 于是我们寻求下列形式的内部解

$$\psi^{(i)}(\xi) = 1 + \varepsilon\psi_1^{(i)}(\xi) + \cdots \tag{6.3.34a}$$

代入 (6.3.33a) 得

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_1^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} + 1\right)\frac{\mathrm{d}\psi_1^{(i)}}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{6.3.34b}$$

于是可求得

$$\psi_1^{(i)}(\xi) = c_1\int_{\infty}^{\xi}\frac{\exp(-\tau)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau + d_1 \tag{6.3.34c}$$

利用 $\psi_1^{(i)}(\xi)$ 满足的边界条件 $\psi_1^{(i)}|_{\xi=\infty} = 0$ 得 $d_1 \equiv 0$. 因此近似到 $O(\varepsilon^2)$, 内部解 $\psi^{(i)}(\xi)$ 为

$$\psi^{(i)}(\xi) = 1 - c_1\varepsilon\int_{\xi}^{\infty}\frac{\exp(-\tau)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau + O(\varepsilon^2) \tag{6.3.34d}$$

渐近匹配条件过程如下:

(1) 外部解用内变量 $\xi=\varepsilon x$ 表示, 由式 (6.3.32a)

$$\psi^{(o)}(\xi/\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon}{\xi}+\varepsilon\left[-\left(1+\frac{\varepsilon}{\xi}\right)\ln\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)+b_1\left(1-\frac{\varepsilon}{\xi}\right)\right] \tag{6.3.35a}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时, 上式近似为

$$\begin{aligned}[\psi^{(o)}(\xi/\varepsilon)]^{(i)}&=1-\frac{\varepsilon}{\xi}+\varepsilon\ln\varepsilon-\varepsilon\ln\xi+\varepsilon b_1\\&=1-\varepsilon\left(\frac{1}{\xi}+\ln\xi-\ln\varepsilon-b_1\right)\end{aligned} \tag{6.3.35b}$$

(2) 内部解用外变量 $x=\xi/\varepsilon$ 表示, 由式 (6.3.34d)

$$\psi^{(i)}(\varepsilon x)=1-c_1\varepsilon\int_{\varepsilon x}^{\infty}\frac{\exp(-\tau)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau+O(\varepsilon^2) \tag{6.3.35c}$$

注意上式积分下限不能简单地取 $\varepsilon\to 0$, 因为边界层在 $x\to\infty$ 处, $\varepsilon x$ 仍然是有限大小. 利用积分

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon x}^{\infty}\frac{\exp(-\tau)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau&=-\frac{\exp(-\tau)}{\tau}\bigg|_{\varepsilon x}^{\infty}-\int_{\varepsilon x}^{\infty}\frac{\exp(-\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau\\&=-\left[\frac{\exp(-\tau)}{\tau}+\exp(-\tau)\ln\tau\right]\bigg|_{\varepsilon x}^{\infty}-\int_{\varepsilon x}^{\infty}\exp(-\tau)\ln\tau\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\exp(-\varepsilon x)}{\varepsilon x}+\exp(-\varepsilon x)\ln\varepsilon x+O(\varepsilon\ln\varepsilon)\end{aligned} \tag{6.3.36a}$$

于是当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\psi^{(i)}(\varepsilon x)\approx 1-\varepsilon c_1\left(\frac{1-\varepsilon x}{\varepsilon x}+\ln\varepsilon x\right)+\cdots \tag{6.3.36b}$$

即

$$[\psi^{(i)}(\varepsilon x)]^{(o)}=1-c_1\frac{1}{x}+\varepsilon c_1(1-\ln x-\ln\varepsilon) \tag{6.3.36c}$$

(3) 由渐近匹配条件得

$$1-\frac{1}{x}-\varepsilon\ln x+\varepsilon b_1=1-c_1\frac{1}{x}+\varepsilon c_1(1-\ln x-\ln\varepsilon) \tag{6.3.37a}$$

比较 $\varepsilon$ 的同次幂, 应有

$$c_1=1;\ b_1=1-\ln\varepsilon \tag{6.3.37b}$$

因此, 在一级近似下, 外部解和内部解分别为

$$\psi^{(o)}(x)=1-\frac{1}{x}+\varepsilon\left[-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x+(1-\ln\varepsilon)\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]+O(\varepsilon^2) \tag{6.3.38a}$$

$$\psi^{(i)}(\xi) = 1 - \varepsilon \int_{\xi}^{\infty} \frac{\exp(-\tau)}{\tau^2} \mathrm{d}\tau + O(\varepsilon^2) \tag{6.3.38b}$$

相应的复合解 $\psi^{(c)}(x)$ 为

$$\psi^{(c)}(x) = 1 - \varepsilon \int_{\varepsilon x}^{\infty} \frac{\exp(-\tau)}{\tau^2} \mathrm{d}\tau - \frac{\varepsilon}{x}\left[1 + \ln\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] + O(\varepsilon^2) \tag{6.3.38c}$$

### 6.3.4 初值问题的边界层

对偏微分方程的边值问题、初值问题或者混合问题, 提出一个一般的边界层理论是非常困难的. 我们仅以具体的例子来说明. 考虑定义在一维无限空间 $x \in (-\infty, \infty)$ 的双曲型方程初值问题

$$\begin{gathered} \varepsilon\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial t} + a\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,\ t > 0 \\ \psi(x,t)|_{t=0} = f(x);\ \psi_t(x,t)|_{t=0} = g(x) \end{gathered} \tag{6.3.39a}$$

其中 $c$ 和 $a$ 为常数, 显然当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 原方程是双曲型的, 而当 $\varepsilon = 0$ 时, 原方程退化为一阶方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + a\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{6.3.39b}$$

不可能满足二个初始条件, 故在 $t = 0$ 处形成 “边界层”, 称为 “**初始层**” (initial layer). 时间域的 “初始层” 也统一称为 “边界层”. 其生成的物理原因是, 为了满足初始条件, 在 $0 < t < \varepsilon$ 的时间间隔内, 方程的解变化剧烈!

**外部解** 作通常的微扰展开

$$\psi^{(o)}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n^{(o)}(x,t) \tag{6.3.40a}$$

代入方程 (6.3.39a) 的第一式, 比较 $\varepsilon$ 的同次幂得

$$\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial t} + a\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial x} = 0,\ t > \varepsilon \tag{6.3.40b}$$

以及

$$\frac{\partial\psi_n^{(o)}}{\partial t} + a\frac{\partial\psi_n^{(o)}}{\partial x} = -\frac{\partial^2\psi_{n-1}^{(o)}}{\partial t^2} + c^2\frac{\partial^2\psi_{n-1}^{(o)}}{\partial x^2},\ (n \geqslant 1) \tag{6.3.40c}$$

可见: $\psi_n^{(o)}$ 满足一阶方程, 不可能同时满足二个初始条件, 在 $t = 0$ 处形成 “边界层”, 微扰展开式 (6.3.40a) 仅适用于 $t > \varepsilon$ 的外部解. 一阶方程的特征线为 $x - at =$ 常数, 故方程 (6.3.40b) 的通解为

$$\psi_0^{(o)}(x,t) = F(x - at) \tag{6.3.41a}$$

其中 $F(\xi)$ 是满足一定光滑性要求的任意函数, 显然上式不可能同时满足二个初始条件. 把式 (6.3.41a) 代入方程 (6.3.40c) 得到一阶项满足的方程 (取 $n=1$)

$$\frac{\partial\psi_1^{(o)}}{\partial t}+a\frac{\partial\psi_1^{(o)}}{\partial x}=(c^2-a^2)F''(x-at) \tag{6.3.41b}$$

其中 $F''(x-at)$ 表示 $\mathrm{d}^2F(\xi)/\mathrm{d}\xi^2$ 在 $\xi=x-at$ 点取值. 上式的通解为

$$\psi_1^{(o)}(x,t)=(c^2-a^2)tF''(x-at)+G(x-at) \tag{6.3.41c}$$

其中 $G(\xi)$ 是满足一定光滑性要求的任意函数. 故近似到 $\varepsilon^1$ 的外部解为

$$\begin{aligned}\psi^{(o)}(x,t)&=\psi_0^{(o)}(x,t)+\varepsilon\psi_1^{(o)}(x,t)+O(\varepsilon^2)\\&=F(x-at)+\varepsilon G(x-at)+(c^2-a^2)\varepsilon tF''(x-at)+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{6.3.41d}$$

注意: 上式中出现久期项 $\varepsilon t$, 故微扰展开式 (6.3.40a) 也只能在 $t<1/\varepsilon$ 区域成立, 否则需用多尺度展开 (下面将介绍一个求 $t\geqslant 1/\varepsilon$ 时, 一致有效的外部解方法).

**内部解** 为了利用 $t=0$ 时刻的初始条件决定函数 $F(\xi)$ 和 $G(\xi)$, 需要求 $t<\varepsilon$ 的内部解. 引进内部变量 $\tau=t/\varepsilon$, 代入方程 (6.3.39a) 得到

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\psi^{(i)}}{\partial\tau^2}+\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\tau}-\varepsilon^2c^2\frac{\partial^2\psi^{(i)}}{\partial x^2}+a\varepsilon\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial x}=0\\ \psi^{(i)}(x,\varepsilon\tau)|_{\tau=0}=f(x);\ \psi_\tau^{(i)}(x,\varepsilon\tau)|_{\tau=0}=\varepsilon g(x)\end{gathered} \tag{6.3.42a}$$

作边界层展开

$$\psi^{(i)}(x,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\psi_n^{(i)}(x,\tau) \tag{6.3.42b}$$

代入方程 (6.3.42a) 得到 0 阶和 1 阶近似方程和初始条件

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\psi_0^{(i)}}{\partial\tau^2}+\frac{\partial\psi_0^{(i)}}{\partial\tau}=0\\ \psi_0^{(i)}(x,0)=f(x);\ \frac{\partial\psi_0^{(i)}(x,0)}{\partial\tau}=0\end{gathered} \tag{6.3.43a}$$

以及

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\psi_1^{(i)}}{\partial\tau^2}+\frac{\partial\psi_1^{(i)}}{\partial\tau}=-a\frac{\partial\psi_0^{(i)}}{\partial x}\\ \psi_1^{(i)}(x,0)=0;\ \frac{\partial\psi_1^{(i)}(x,0)}{\partial\tau}=g(x)\end{gathered} \tag{6.3.43b}$$

取方程 (6.3.43a) 的解为

$$\psi_0^{(i)}(x,\tau)=f(x) \tag{6.3.43c}$$

代入方程 (6.3.43b) 的第一式得到

$$\frac{\partial^2 \psi_1^{(i)}}{\partial \tau^2}+\frac{\partial \psi_1^{(i)}}{\partial \tau}=-af'(x) \tag{6.3.44a}$$

其解为

$$\psi_1^{(i)}(x,\tau)=-a\tau f'(x)+A\mathrm{e}^{-\tau}+B \tag{6.3.44b}$$

其中 $A$ 和 $B$ 由方程 (6.3.43b) 中的初始条件决定: $A=-[af'(x)+g(x)]=-B$, 于是

$$\psi_1^{(i)}(x,\tau)=[af'(x)+g(x)](1-\mathrm{e}^{-\tau})-a\tau f'(x) \tag{6.3.44c}$$

故近似到 $\varepsilon^1$ 的内部解为

$$\begin{aligned}\psi^{(i)}(x,\tau)&=\psi_0^{(i)}(x,\tau)+\varepsilon\psi_1^{(i)}(x,\tau)+O(\varepsilon^2)\\&=f(x)+\varepsilon af'(x)+g(x)](1-\mathrm{e}^{-\tau})-a\varepsilon\tau f'(x)\end{aligned} \tag{6.3.44d}$$

**渐近匹配** 由式 (6.3.41d), 外部解用内变量表示

$$\psi^{(o)}(x,\varepsilon\tau)=F(x-a\varepsilon\tau)+\varepsilon G(x-a\varepsilon\tau)+\varepsilon(c^2-a^2)\varepsilon\tau F''(x-a\varepsilon\tau)+O(\varepsilon^2) \tag{6.3.45a}$$

注意到 $\varepsilon(c^2-a^2)F''(x-at)\approx -aF'(x-at)$ (把 $\psi_0^{(o)}(x,t)=F(x-at)$ 代入方程 (6.3.39a) 近似得到这个估计式), 由上式得到

$$[\psi^{(o)}(x,\varepsilon\tau)]^{(i)}=F(x)+\varepsilon G(x)-a\varepsilon\tau F'(x)+O(\varepsilon^2) \tag{6.3.45b}$$

另一方面, 由式 (6.3.44d), 内部解用外变量表示

$$\psi^{(i)}(x,t/\varepsilon)=f(x)+\varepsilon[af'(x)+g(x)](1-\mathrm{e}^{-t/\varepsilon})-a\varepsilon\tau f'(x) \tag{6.3.45c}$$

故

$$[\psi^{(i)}(x,t/\varepsilon)]^{(o)}=f(x)+\varepsilon[af'(x)+g(x)]-a\varepsilon\tau f'(x) \tag{6.3.45d}$$

由 $[\psi^{(i)}(x,t/\varepsilon)]^{(o)}=[\psi^{(o)}(x,\varepsilon\tau)]^{(i)}$

$$F(x)+\varepsilon G(x)-a\varepsilon\tau F'(x)=f(x)+\varepsilon[af'(x)+g(x)]-a\varepsilon\tau f'(x) \tag{6.3.46a}$$

比较 $\varepsilon$ 的同次幂

$$F(x)=f(x);\ G(x)=g(x)+af'(x) \tag{6.3.46b}$$

故通过渐近匹配过程, 我们决定了外部解式 (6.3.41d) 中的任意函数. 于是外部解为

$$\begin{aligned}\psi^{(o)}(x,t)=&f(x-at)+\varepsilon[(c^2-a^2)tf''(x-at)\\&+g(x-at)+af'(x-at)]+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{6.3.46c}$$

必须注意的是, 上式外部解仅仅在 $t < 1/\varepsilon$. 下面介绍一个求 $t \geqslant 1/\varepsilon$ 时, 一致有效的外部解方法.

把外部解的微扰展开式 (6.3.40a) 代入方程 (6.3.39a) 的第一式得到

$$\begin{gathered}\varepsilon\left[\frac{\partial\psi_1^{(o)}}{\partial t}+a\frac{\partial\psi_1^{(o)}}{\partial x}+\frac{\partial^2\psi_0^{(o)}}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\psi_0^{(o)}}{\partial x^2}\right]\\+\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial t}+a\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial x}=O(\varepsilon^2)\end{gathered}\tag{6.3.47a}$$

由上式

$$\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial t}=-a\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial x}+O(\varepsilon)\tag{6.3.47b}$$

对变量 $t$ 求偏导, 再利用 (6.3.47b) 得到

$$\frac{\partial^2\psi_0^{(o)}}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\psi_0^{(o)}}{\partial x^2}+O(\varepsilon)\tag{6.3.47c}$$

假定解是光滑的函数, 上式代入方程 (6.3.47a) 得到同级近似

$$\begin{gathered}\varepsilon\left[\frac{\partial\psi_1^{(o)}}{\partial t}+a\frac{\partial\psi_1^{(o)}}{\partial x}+(a^2-c^2)\frac{\partial^2\psi_0^{(o)}}{\partial x^2}\right]\\+\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial t}+a\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial x}=O(\varepsilon^2)\end{gathered}\tag{6.3.47d}$$

如果直接由上式比较 $\varepsilon$ 的同次幂, 我们就得到外部解式 (6.3.41a) 和 (6.3.41c). 显然式 (6.3.41c) 中的久期项是由于 $(a^2-c^2)\partial^2\psi_0^{(o)}/\partial x^2$ 的存在, 为了避免这一项出现在 $\psi_1^{(o)}$ 的方程中, 我们对方程 (6.3.47d) 重新排列如下

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial t}+a\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial x}+\varepsilon(a^2-c^2)\frac{\partial^2\psi_0^{(o)}}{\partial x^2}\right]\\+\varepsilon\left[\frac{\partial\psi_1^{(o)}}{\partial t}+a\frac{\partial\psi_1^{(o)}}{\partial x}\right]=O(\varepsilon^2)\end{gathered}\tag{6.3.48a}$$

然后取

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial t}+a\frac{\partial\psi_0^{(o)}}{\partial x}+\varepsilon(a^2-c^2)\frac{\partial^2\psi_0^{(o)}}{\partial x^2}=0\\\frac{\partial\psi_1^{(o)}}{\partial t}+a\frac{\partial\psi_1^{(o)}}{\partial x}=0\end{gathered}\tag{6.3.48b}$$

此时零阶项 $\psi_0^{(o)}(x,t)$ 满足扩散方程, 其初始条件可由式 (6.3.46c) 给出, 只要取 $t=t_0<1/\varepsilon$ 即可. 而可以取 $\psi_1^{(o)}(x,t_0)=0$, 故 $\psi_1^{(o)}(x,t)\equiv 0$.

**内部边界层**　在方程 (6.3.39a) 的奇异微扰中, 边界层出现在 $t=0$ 时刻, 这是比较简单的情况. 事实上, 对一般的变系数偏微分方程, 在时间区域或空间区域的内部点, 也可能出现边界层, 称为**内部边界层**. 对双曲型或抛物型方程, 如果特征线二边 (二维情况) 的解变化剧烈, 特征线就是边界层, 故边界层沿特征线传播. 我们以下例简单说明. 考虑描述冲击波的非线性 Burgers 方程的初值问题

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\ t>0,\ x\in(-\infty,\infty)$$
$$\psi(x,t)|_{t=0}=f(x),\ x\in(-\infty,\infty) \tag{6.3.49a}$$

其中初始分布 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有一个间断：$f(0^-)>f(0^+)$. 我们的目的是分析间断点的传播. 作微扰展开

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\psi_n(x,t) \tag{6.3.49b}$$

代入方程 (6.3.49a) 的第一式得到零阶近似方程

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial t}+\psi_0\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=0 \tag{6.3.49c}$$

上式是一个拟线性微分方程, 特征线为直线 $x=x_0+f(x_0)t$. 对一系列 $x_0$, 特征线覆盖整个上半平面, 如果这些特征线在上半平面不交叉, 方程 (6.3.49c) 的解可以这样构造：对给定的 $(x,t)$ 点, 方程 (6.3.49c) 的解为 $\psi_0(x,t)=f(x_0)$, 其中 $x_0$ 是方程 $x=x_0+f(x_0)t$ 的根. 但在交叉点, 我们无法判断波的传播方向, 故也无法得到方程的解.

因此, 在交叉点, 微扰展开式 (6.3.49b) 失效, 也就是说在交叉点存在边界层! 设交叉点的轨迹为曲线 $x=s(t)$ (如图 6.3.4), 则在曲线 $x=s(t)$ 附近形成内部边界层, 微扰展开式 (6.3.49b) 仅在远离曲线 $x=s(t)$ 区域成立 (外部解).

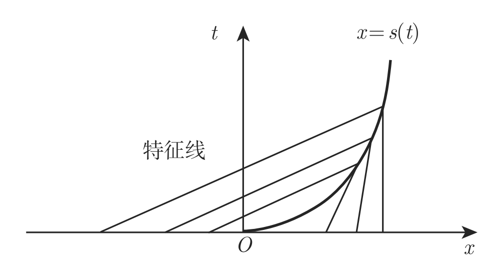



图 6.3.4　特征线交叉点的轨迹 $x=s(t)$ 形成边界层

**内部边界层展开**　设内部边界层附件的坐标为 $\xi=[x-s(t)]/\varepsilon$, 代入方程 (6.3.49a) 的第一式得到 $\psi^{(i)}(\xi,t)$ 满足的方程

$$\varepsilon\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial t}-s'(t)\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\xi}+\psi^{(i)}\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\xi}=\frac{\partial^2\psi^{(i)}}{\partial\xi^2} \tag{6.3.50a}$$

得到上式, 利用了微分关系

$$\frac{\partial \psi^{(i)}(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial \psi^{(i)}(\xi,t)}{\partial t}-\varepsilon^{-1}s'(t)\frac{\partial \psi^{(i)}(\xi,t)}{\partial \xi} \tag{6.3.50b}$$

作边界层展开后得到零级方程为

$$-s'(t)\frac{\partial \psi_0^{(i)}}{\partial \xi}+\psi_0^{(i)}\frac{\partial \psi_0^{(i)}}{\partial \xi}=\frac{\partial^2 \psi_0^{(i)}}{\partial \xi^2} \tag{6.3.50c}$$

上式积分一次得到

$$\frac{\partial \psi_0^{(i)}}{\partial \xi}=\frac{1}{2}[\psi_0^{(i)}]^2-s'(t)\psi_0^{(i)}+a(t) \tag{6.3.50d}$$

为了决定积分函数 $a(t)$, 我们先用渐近匹配：设边界层二边的渐近解为 $\psi_0^-$(左边, 用 $x\to s^-(t)$ 表示) 和 $\psi_0^+$(右边, 用 $x\to s^+(t)$ 表示), 即

$$\lim_{x\to s^-(t)}\psi_0^{(i)}(x,t)=\psi_0^-;\quad \lim_{x\to s^+(t)}\psi_0^{(i)}(x,t)=\psi_0^+ \tag{6.3.51a}$$

或者写成

$$\lim_{\xi\to-\infty}\psi_0^{(i)}=\psi_0^-;\quad \lim_{\xi\to+\infty}\psi_0^{(i)}=\psi_0^+ \tag{6.3.51b}$$

又假定 $\xi\to\pm\infty$ 时, $\partial\psi_0^{(i)}/\partial\xi\to 0$, 则取 $\xi\to\pm\infty$, 方程 (6.3.50d) 给出

$$a(t)=\frac{1}{2}\psi_0^+\psi_0^-;\ s'(t)=\frac{1}{2}(\psi_0^-+\psi_0^+) \tag{6.3.51c}$$

上式代入方程 (6.3.50d) 得到

$$\frac{\partial \psi_0^{(i)}}{\partial \xi}=\frac{1}{2}[\psi_0^{(i)}]^2-\frac{1}{2}(\psi_0^-+\psi_0^+)\psi_0^{(i)}+\frac{1}{2}\psi_0^+\psi_0^- \tag{6.3.52a}$$

积分得到

$$\psi_0^{(i)}(\xi,t)=\frac{\psi_0^++\psi_0^-B(t)\mathrm{e}^{-(\psi_0^--\psi_0^+)\xi/2}}{1+B(t)\mathrm{e}^{-(\psi_0^--\psi_0^+)\xi/2}} \tag{6.3.52b}$$

其中 $B(t)$ 是待定的积分常数, 其决定必须考虑一级近似和特征线上接近 $x$ 轴的边界层点 ($t\approx 0$, 即初始边界层), 需要注意的是, 对这样的边界层点必须取内部变量为 $\xi=[x-s(t)]/\varepsilon$ 和 $\tau=t/\varepsilon$.

以上我们仅表明初值问题中边界层沿特征线传播的性质, 不进一步展开讨论.

### 6.3.5 高维边值问题的边界层

边界层理论同样适合于边值问题, 但更为复杂. 首先考虑下列具有简单区域的边值问题

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ (x,y)\in G$$
$$u(x,y)|_{y=0}=f(x);\ u(x,y)|_{x=0}=g(y) \tag{6.3.53a}$$
$$u(x,y)|_{y=l}=h(x)$$

其中 $G$ 为半无穷带状区域: $0<x<\infty,\ 0<y<l,\ 0<\varepsilon\ll 1$, 如图 6.3.5, $b$ 为实常数, 并假定 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0;\ \ \lim\limits_{x\to\infty}h(x)=0$. 要求解满足无穷远处条件

$$\lim_{x\to\infty}u(x,y)=0 \tag{6.3.53b}$$

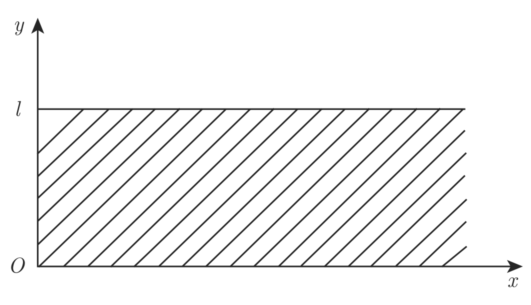



图 6.3.5　$G$ 为带状区域

显然当 $\varepsilon\neq 0$ 时, 边值问题满足的是椭圆型的二阶偏微分方程, 而当 $\varepsilon=0$ 时, 原方程退化为一阶方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{6.3.53c}$$

不可能满足所有的边界条件, 故在一部分边界附件形成边界层.

首先作通常的微扰展开

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n u_n(x,y) \tag{6.3.54a}$$

代入方程 (6.3.53a), 比较 $\varepsilon$ 的同次幂得

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+b\frac{\partial u_0}{\partial y}=0 \tag{6.3.54b}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}+b\frac{\partial u_n}{\partial y}=-\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2}\right),\ (n\geqslant 1) \tag{6.3.54c}$$

其中 $u_0(x,y)$ 满足边界条件

$$\begin{gathered} u_0(x,y)|_{y=0}=f(x);\ u_0(x,y)|_{y=l}=h(x) \\ u_0(x,y)|_{x=0}=g(y) \end{gathered} \tag{6.3.55a}$$

而 $u_n(x,y)$, $(n\geqslant 1)$ 满足齐次边界条件. 一阶方程 (6.3.54b) 的通解为

$$u_0(x,y)=F(y-bx) \tag{6.3.55b}$$

其中 $F(\xi)$ 是任意函数, 上式代入方程 (6.3.54c) 可得

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+b\frac{\partial u_1}{\partial y}=-(1+b^2)F''(\xi) \tag{6.3.55c}$$

其中 $F''(\xi)=\mathrm{d}^2F(\xi)/\mathrm{d}\xi^2$ 和 $\xi=y-bx$. 故得到通解

$$u_1(x,y)=G_1(y-bx)-\frac{(1+b^2)}{b}yF''(y-bx) \tag{6.3.56a}$$

$u_1(x,y)$ 也可写成形式

$$u_1(x,y)=G_2(y-bx)-(1+b^2)xF''(y-bx) \tag{6.3.56b}$$

其中 $G_1(\xi)$ 和 $G_2(\xi)$ 都是任意函数. 显然 $u_0(x,y)$ 与 $u_1(x,y)$ 不可能同时满足边界条件. 因此存在边界层, 但我们仍不知边界层发生在三个边界的哪一个? 需逐个进行讨论:

首先, 假定 $y=0$ 和 $y=l$ 二条边界, 分别作内变量变换

$$y=\varepsilon\eta,\ (\text{在 } y=0 \text{ 处});\ y-l=\varepsilon\eta,\ (\text{在 } y=l \text{ 处}) \tag{6.3.57a}$$

于是内部解 $u^{(i)}(x,\eta)\equiv\Phi^{(i)}(x,\eta)$(在 $y=0$ 或 $y=l$ 附近) 满足

$$\frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial\eta^2}+b\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial x}+\varepsilon^2\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial x^2}=0 \tag{6.3.57b}$$

内部解作展开

$$\Phi^{(i)}(x,\eta)=\Phi_0^{(i)}(x,\eta)+\varepsilon\Phi_1^{(i)}(x,\eta)+\cdots \tag{6.3.57c}$$

代入方程 (6.3.57b) 得 $\Phi_0^{(i)}(x,\eta)$ 满足的方程

$$\frac{\partial^2\Phi_0^{(i)}}{\partial\eta^2}+b\frac{\partial\Phi_0^{(i)}}{\partial\eta}=0 \tag{6.3.58a}$$

上式的解为

$$\Phi_0^{(i)}(x,\eta)=\alpha(x)+\beta(x)\exp(-b\eta) \tag{6.3.58b}$$

其中 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 为任意函数. 下面分三种情况讨论.

(1) $b>0$, 把 $y-l=\varepsilon\eta$ 代入式 (6.3.58b)

$$\Phi_0^{(i)}(x,\eta)=\alpha(x)+\beta(x)\exp\left[-b\frac{(y-l)}{\varepsilon}\right]\quad (\text{在 } y=l \text{ 附近}) \tag{6.3.59a}$$

如令 $\varepsilon\to 0$, 因 $(y-l)<0$, $b>0$, 第二项指数发散, 不可能与外部解匹配, 故 $y=l$ 不可能是边界层. 于是边界层只可能发生在 $y=0$ 处, 在 $y=0$ 处

$$\Phi_0^{(i)}(x,\eta)=\alpha(x)+\beta(x)\exp\left(-b\frac{y}{\varepsilon}\right) \tag{6.3.59b}$$

因 $b>0$, 当 $\varepsilon\to 0$ 时指数趋向零, 有可能与外部解匹配.

(2) $b<0$, 由上讨论知, 边界层只能发生在 $y=l$ 处, 内部解的零级近似为

$$\Phi_0^{(i)}(x,\eta)=\alpha(x)+\beta(x)\exp(-b\eta);\ \eta=\frac{(y-l)}{\varepsilon} \tag{6.3.59c}$$

(3) $b=0$, 方程 (6.3.58a) 的解为

$$\Phi_0^{(i)}(x,\eta)=\alpha(x)+\beta(x)\eta \tag{6.3.60a}$$

令 $\varepsilon\to 0$, 第二项发散而不可能与外部解匹配. 但这时应取内部变量为

$$y=\sqrt{\varepsilon}\eta \quad \text{或} \quad y-l=\sqrt{\varepsilon}\eta \tag{6.3.60b}$$

内部解满足方程

$$\frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial x^2}=0 \tag{6.3.60c}$$

显然 $\Phi^{(i)}(x,\eta)$ 的零级近似满足

$$\frac{\partial^2\Phi_0^{(i)}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial\Phi_0^{(i)}}{\partial x}=0 \tag{6.3.60d}$$

可望与外部解匹配, 事实上, 这时 $y=0$ 和 $y=l$ 都是边界层 (见下讨论).

其次来考察 $x=0$ 边界, 令内部变量 $\xi=x/\varepsilon$, 由方程 (6.3.53a) 的第一式得内部解 $u^{(i)}(\xi,y)\equiv\Theta^{(i)}(\xi,y)$(在 $x=0$ 附近) 满足的方程

$$\frac{\partial^2\Theta^{(i)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\Theta^{(i)}}{\partial\xi}+\varepsilon b\frac{\partial\Theta^{(i)}}{\partial y}+\varepsilon^2\frac{\partial^2\Theta^{(i)}}{\partial y^2}=0 \tag{6.3.61a}$$

相应的零级近似 $\Theta_0^{(i)}(\xi,y)$ 满足

$$\frac{\partial^2\Theta_0^{(i)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\Theta_0^{(i)}}{\partial\xi}=0 \tag{6.3.61b}$$

因此有解

$$\Theta_0^{(i)}(\xi, y) = \gamma(y) + \delta(y)\exp(-\xi) \tag{6.3.61c}$$

当取 $\varepsilon \to 0$ 时, $\Theta_0^{(i)}(\xi, y)$ 指数衰减, 有可能与外部解匹配, 因此 $x = 0$ 处是一个边界层.

由以上讨论可以得到结论: (1) 当 $b > 0$, $x = 0$ 和 $y = 0$ 是边界层; (2) 当 $b < 0$, $x = 0$ 和 $y = l$ 是边界层; (3) 当 $b = 0$, $x = 0$、$y = 0$ 和 $y = l$ 都是边界层. 下面分别进行讨论.

(1) $b > 0$, 由上讨论知, $x = 0$ 和 $y = 0$ 处是边界层, 因此要求方程 (6.3.54b) 中 $u_0(x, y)$ 满足 $y = l$ 处边界条件 (外部解, 故增加上标 “$o$”)

$$u_0^{(o)}(x, y)|_{y=l} = h(x) \tag{6.3.62a}$$

于是决定出式 (6.3.55b) 中的函数

$$u_0^{(o)}(x, l) = F(l - bx) = h(x) \tag{6.3.62b}$$

即

$$F(x) = h\left(\frac{l - x}{b}\right) \tag{6.3.62c}$$

因此

$$u_0^{(o)}(x, y) = h\left[x - \frac{(y - l)}{b}\right] \tag{6.3.62d}$$

而边界层内部解式 (6.3.58b) 满足 $y = 0$ 处边界条件 $\psi_0^{(i)}(x, \eta)|_{\eta=0} = f(x)$. 因此

$$\alpha(x) + \beta(x) = f(x) \tag{6.3.63a}$$

决定 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 的另一个方程由匹配条件求得:

$$[u_0^{(o)}(x, \varepsilon\eta)]^{(i)} = h\left[x - \frac{(\varepsilon\eta - l)}{b}\right]\bigg|_{\varepsilon \to 0} \approx h\left(x + \frac{l}{b}\right) + O(\varepsilon) \tag{6.3.63b}$$

$$[\varPhi_0^{(i)}(x, y/\varepsilon)]^{(o)} = \alpha(x) + \beta(x)\exp\left(-b\frac{y}{\varepsilon}\right)\bigg|_{\varepsilon \to 0} = \alpha(x) + O(\varepsilon) \tag{6.3.63c}$$

由渐近匹配条件 $[u_0^{(o)}(x, \varepsilon\eta)]^{(i)} = [\varPhi_0^{(i)}(x, y/\varepsilon)]^{(o)}$ 得

$$\alpha(x) = h\left(x + \frac{l}{b}\right) \tag{6.3.64a}$$

代入方程 (6.3.63a) 得

$$\beta(x) = f(x) - h\left(x + \frac{l}{b}\right) \tag{6.3.64b}$$

于是由方程 (6.3.58b) 得 $y=0$ 处的内部解

$$\varPhi_0^{(i)}(x,\eta)=h\left(x+\frac{l}{b}\right)+\left[f(x)-h\left(x+\frac{l}{b}\right)\right]\exp(-b\eta) \tag{6.3.64c}$$

对 $x=0$ 处边界层, $\varTheta_0^{(i)}(\xi,y)$ 满足 $\varTheta_0^{(i)}(\xi,y)|_{\xi=0}=g(y)$, 于是由方程 (6.3.61c)

$$\gamma(y)+\delta(y)=g(y) \tag{6.3.65a}$$

利用 $x=0$ 处的匹配条件 $[u_0^{(o)}(\varepsilon\xi,y)]^{(i)}=[\varTheta_0^{(i)}(x/\varepsilon,y)]^{(o)}$, 注意到

$$\begin{aligned}&[u_0^{(o)}(\varepsilon\xi,y)]^{(i)}=h\left(\frac{l-y}{b}\right)\\&[\varTheta_0^{(i)}(x/\varepsilon,y)]^{(o)}=\gamma(y)+\delta(y)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon\to 0}=\gamma(y)\end{aligned} \tag{6.3.65b}$$

得到

$$\gamma(y)=h\left(\frac{l-y}{b}\right) \tag{6.3.66a}$$

代入方程 (6.3.65a) 得

$$\delta(y)=g(y)-h\left(\frac{l-y}{b}\right) \tag{6.3.66b}$$

因此, 在 $x=0$ 处的内部解为

$$\varTheta_0^{(i)}(\xi,y)=h\left(\frac{l-y}{b}\right)+\left[g(y)-h\left(\frac{l-y}{b}\right)\right]\exp(-\xi) \tag{6.3.66c}$$

于是得到复合解

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\,u_0^{(o)}(x,y)+\varPhi_0^{(i)}(x,\eta)+\varTheta_0^{(i)}(\xi,y)\\&-[u_0^{(o)}(\varepsilon\xi,y)]^{(i)}-[u_0^{(o)}(x,\varepsilon\eta)]^{(i)}+O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{6.3.67a}$$

即

$$\begin{aligned}u(x,y)\approx&\, h\left[x-\frac{(y-l)}{b}\right]+\left[f(x)-h\left(x+\frac{l}{b}\right)\right]\exp\left(-b\frac{y}{\varepsilon}\right)\\&+\left[g(y)-h\left(\frac{l-y}{b}\right)\right]\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)+O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{6.3.67b}$$

不难验证, 在 $x=0$ 附近, 上式变成式 (6.3.66c), 而在 $y=0$ 附近上式变成 (6.3.64c).

(2) $b<0$, 讨论同 $b>0$ 相仿.

(3) $b=0$, 这时式 (6.3.55b) 变成

$$u_0(x,y)=F(y) \tag{6.3.68a}$$

因在 $y=0$ 和 $l$ 处, $F(0)$ 和 $F(l)$ 为常数, 故不可能满足边界条件

$$u_0(x,y)|_{y=0}=f(x);u_0(x,y)|_{y=l}=h(x) \tag{6.3.68b}$$

如取 $u_0$ 满足 $u_0(x,y)|_{x=0}=g(y)$ 边界条件, 则 $F(y)=g(y)$, 于是 $u_0(x,y)=g(y)$, 但我们要求当 $x\to\infty$ 时 $u_0(x,y)=0$, 一般不可能满足. 因此, 综上所述, 只有选 $F(y)=0$. 这时外部解的一级近似为零 $u_0(x,y)=0$, 并且必须同时考虑三个边界层 $x=0$、$y=0$ 和 $l$.

(a) 在 $x=0$ 处, 由式 (6.3.61c) 和 $u_0(x,y)|_{x=0}=g(y)$, 取

$$\Theta_0^{(i)}(\xi,y)=g(y)\exp(-\xi);\quad \xi=x/\varepsilon \tag{6.3.69a}$$

(b) 在 $y=0$ 和 $l$ 处, $\Phi_0^{(i)}(x,\eta)$ 满足方程 (6.3.60d), 即

$$\frac{\partial\Phi_0^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial^2\Phi_0^{(i)}}{\partial\eta^2}=0 \tag{6.3.69b}$$

其中内部变量为 $\eta=y/\sqrt{\varepsilon}$ 或者 $\eta=(y-l)/\sqrt{\varepsilon}$. 上式满足的边界条件为

$$\begin{aligned}&\Phi_0^{(i)}(x,\eta)|_{\eta=0}=f(x),\ (y=0)\\&\Phi_0^{(i)}(x,\eta)|_{\eta=0}=h(x),\ (y=l)\end{aligned} \tag{6.3.69c}$$

容易求得 (习题 6.18) 方程 (6.3.69b) 和 (6.3.69c) 的解为

(a) 在 $y=0$ 附近, $\eta=y/\sqrt{\varepsilon}$

$$\Phi_0^{(i)}(x,\eta)=\frac{\eta}{\sqrt{4\pi}}\int_x^\infty\exp\left[-\frac{\eta^2}{4(\sigma-x)}\right]\frac{f(\sigma)}{\sqrt{(\sigma-x)^3}}\mathrm{d}\sigma \tag{6.3.70a}$$

(b) 在 $y=l$ 附近, $\eta=(y-l)/\sqrt{\varepsilon}$

$$\Phi_0^{(i)}(x,\eta)=\frac{\eta}{\sqrt{4\pi}}\int_x^\infty\exp\left[-\frac{\eta^2}{4(\sigma-x)}\right]\frac{h(\sigma)}{\sqrt{(\sigma-x)^3}}\mathrm{d}\sigma \tag{6.3.70b}$$

求得上二式, 已利用了无穷远处边界条件 $\Phi_0^{(i)}(x,\eta)\to 0$ (当 $x\to\infty$ 时). 由方程 (6.3.69a), (6.3.70a) 和 (6.3.70b) 得到复合解为

$$\begin{aligned}u^{(c)}(x,y)=&g(y)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)+\frac{y}{\sqrt{4\varepsilon\pi}}\int_x^\infty\frac{f(\sigma)}{\sqrt{(\sigma-x)^3}}\exp\left[-\frac{y^2}{4\varepsilon(\sigma-x)}\right]\mathrm{d}\sigma\\&+\frac{(y-l)}{\sqrt{4\varepsilon\pi}}\int_x^\infty\exp\left[-\frac{(y-l)^2}{4\varepsilon(\sigma-x)}\right]\frac{h(\sigma)}{\sqrt{(\sigma-x)^3}}\mathrm{d}\sigma+O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{6.3.70c}$$

需要指出的是, 当区域 $G$ 比较复杂时, 边界层可能发生在边界的某一段, 下面以简单的例子说明. 考虑定义在区域 $G$ 上的线性椭圆型方程的边值问题

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+u=0,\ (x,y)\in G$$
$$u(x,y)=g(x,y),\ (x,y)\in\partial G \tag{6.3.71a}$$

为了方便, 设 $a$ 和 $b$ 为常数. 通常的微扰展开给出零级近似方程为一阶方程

$$a\frac{\partial u_0}{\partial x}+b\frac{\partial u_0}{\partial y}+u_0=0,\ (x,y)\in G$$
$$u_0(x,y)=g(x,y),\ (x,y)\in\partial G \tag{6.3.71b}$$

上式的特征线为直线: $bx-ay=d$(其中 $d$ 为常数). 设 $b/a>0$ 且区域 $G$ 是凸的, 则特征线穿过区域 $G$, 把区域 $G$ 的边界点分成 3 类: 特征线进入区域的部分边界 (用 $\Omega_E$ 表示); 特征线离开区域的部分边界 (用 $\Omega_L$ 表示); 与区域刚好相切的二个边界点 (用 $T_L$ 和 $T_R$ 表示), 如图 6.3.6. 研究表明: 在部分边界 $\Omega_E$ 和二个切点 ($T_L$,$T_R$) 附近形成边界层, 零级近似解 $u_0$ 满足 $\Omega_L$ 上的边界条件.

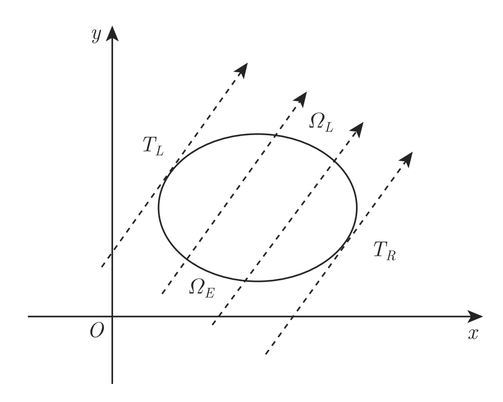



图 6.3.6　特征线把边界点分成三类

作变换坐标

$$x=as+br;\ y=bs-ar \tag{6.3.72a}$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.3.72b}$$

故方程 (6.3.71b) 变换为

$$\frac{\partial u_0}{\partial s}+u_0=0 \tag{6.3.72c}$$

因此

$$u_0(s,r) = A(r)\mathrm{e}^{-s} \tag{6.3.72d}$$

设在坐标系 $(s,r)$ 中, 边界 $\Omega_L$ 和 $\Omega_E$ 的方程分别为 $s=h_L(r)$, $(r_0<r<r_1)$ 和 $s=h_E(r)$, $(r_0<r<r_1)$, 边界条件变换为

$$u_0 = \tilde{g}_L(r),\ r\in(r_0,r_1) \tag{6.3.72c}$$

其中 $\tilde{g}_L(r)\equiv g[ah_L(r)+br, bh_L(r)-ar]$. 零级外部解为

$$u_0^{(o)}(s,r) = \tilde{g}_L(r)\mathrm{e}^{h_L(r)-s} \tag{6.3.72d}$$

变量范围为：$r_0<r<r_1$ 和 $h_E(r)<s<h_L(r)$. 上式在边界 $\Omega_E$ 和二个切点 $(T_L, T_R)$ 附近不成立.

**边界 $\Omega_E$ 的内部解** 首先把方程 (6.3.71a) 转换到坐标系 $(s,r)$ 为

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)+\gamma\frac{\partial u}{\partial s}+\gamma u=0 \tag{6.3.73a}$$

其中 $\gamma=a^2+b^2$. 取内部变量 $\bar{s}=[s-h_E(r)]/\varepsilon$, 注意到变换关系

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial s^2}\to\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{s}^2};\ \frac{\partial}{\partial r}\to\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial\bar{s}}\frac{\partial\bar{s}}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}-\frac{h_E'(r)}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{s}}\\&\frac{\partial^2}{\partial r^2}\to\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{[h_E'(r)]^2}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{s}^2}-\frac{h_E''(r)}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{s}}-\frac{2h_E'(r)}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial\bar{s}\partial r}\end{aligned} \tag{6.3.73b}$$

代入方程 (6.3.73a) 得到

$$\mu\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial\bar{s}^2}+\gamma\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\bar{s}}+O(\varepsilon)=0 \tag{6.3.73c}$$

其中 $\mu(r)\equiv1+[h_E'(r)]^2$. 注意：在二个切点 $(T_L, T_R)$, $h_E'(r)\to\infty$, 故必须单独处理. 由方程 (6.3.73c), 内部解的零级近似方程为

$$\mu\frac{\partial^2 u_0^{(i)}}{\partial\bar{s}^2}+\gamma\frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial\bar{s}}=0 \tag{6.3.74a}$$

上式的通解为

$$u_0^{(i)}(\bar{s},r)=A(r)+B(r)\mathrm{e}^{-\gamma\bar{s}/\mu} \tag{6.3.74b}$$

其中任意函数 $A(r)$ 和 $B(r)$ 由 $\Omega_E$ 上的边界条件和渐近匹配条件决定：

(a) 边界 $\Omega_E$ 的方程为 $s=h_E(r)$, 故在边界上 $\bar{s}=0$, 即要求

$$u^{(i)}(\bar{s},r)|_{\bar{s}}=\tilde{g}_E(r) \tag{6.3.75a}$$

其中 $\tilde{g}_E(r) \equiv g[ah_E(r)+br, bh_E(r)-ar]$, 故得到

$$\tilde{g}_E(r) = A(r) + B(r) \tag{6.3.75b}$$

(b) 渐近匹配条件, 注意到 $[u_0^{(i)}(r,\bar{s})]^{(o)} = A(r)$ 以及

$$[u_0^{(o)}(s,r)]^{(i)} = \tilde{g}_L(r)\mathrm{e}^{h_L(r)-h_E(r)} \equiv u_0^{(o)}(h_E, r) \tag{6.3.75c}$$

故由 $[u_0^{(i)}(r,\bar{s})]^{(o)} = [u_0^{(o)}(s,r)]^{(i)}$ 得到

$$u_0^{(o)}(h_E, r) = A(r) \tag{6.3.75d}$$

由方程 (6.3.75b) 和 (6.3.75d) 得到

$$A(r) = u_0^{(o)}(h_E, r);\ B(r) = \tilde{g}_E(r) - u_0^{(o)}(h_E, r) \tag{6.3.76a}$$

代入式 (6.3.74b) 得到内部解

$$u_0^{(i)}(\bar{s}, r) = u_0^{(o)}(h_E, r) + [\tilde{g}_E(r) - u_0^{(o)}(h_E, r)]\mathrm{e}^{-\gamma\bar{s}/\mu} \tag{6.3.76b}$$

**复合解** 由方程 (6.3.72d), (6.3.75c) 和 (6.3.76a) 得到复合解为

$$\begin{aligned} u^c(x,y) &= u_0^{(o)}(s,r) + u_0^{(i)}(\bar{s},r) - [u_0^{(o)}(s,r)]^{(i)} \\ &= \tilde{g}_L(r)\mathrm{e}^{h_L(r)-s} + [\tilde{g}_E(r) - u_0^{(o)}(h_E,r)]\mathrm{e}^{-\gamma\bar{s}/\mu} + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{6.3.76c}$$

其中变量范围: $r_0 < r < r_1$ 和 $h_E(r) < s < h_L(r)$, 不包括二个切点 $(T_L,T_R)$ 附近.

**切点 ($T_L$, $T_R$) 附近的解** 以切点 $T_L$ 为例, 在坐标系 $(s,r)$ 中, 设切点 $T_L$ 的坐标为 $(s_0,r_0)$, 在切点 $T_L$ 附近, 边界的方程为 $r=q(s)$, 故 $r_0=q(s_0)$ 和 $q'(s_0)=0$, 并且假定 $q''(s_0)\neq 0$. 取切点 $T_L$ 附近的内变量为

$$\bar{s} = \frac{1}{\varepsilon^\beta}(s-s_0);\ \bar{r} = \frac{1}{\varepsilon^\alpha}(r-r_0) \tag{6.3.77a}$$

代入方程 (6.3.73a) 得到内部解满足的方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial \bar{r}^2} + \varepsilon^{-\beta+2\alpha-1}\gamma\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \bar{s}} - \varepsilon^{\beta+\alpha-1}\gamma\bar{s}q''(s_0)\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \bar{r}} \\ &+\varepsilon^{-2\beta+2\alpha}\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial \bar{s}^2} + \varepsilon^{-1+2\alpha}\gamma u^{(i)} + \cdots = 0 \end{aligned} \tag{6.3.77b}$$

其中利用了 Taylor 展开 $q'(s_0+\varepsilon^\beta\bar{s}) = q'(s_0)+\varepsilon^\beta\bar{s}q''(s_0) = \varepsilon^\beta\bar{s}q''(s_0)$. 为保留上式的前三项 (目的是零级近似去掉一个二阶偏导数), 取 $-\beta+2\alpha-1=0$ 和 $\beta+\alpha-1=0$,

即 $\alpha = 2/3$ 和 $\beta = 1 - \alpha = 1/3$. 于是上式变成

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial \bar{r}^2} + \gamma\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \bar{s}} - \gamma\bar{s}q''(s_0)\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \bar{r}}\\&+ \varepsilon^{2/3}\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial \bar{s}^2} + \varepsilon^{1/3}\gamma u^{(i)} + \cdots = 0\end{aligned} \tag{6.3.77c}$$

故内部解的零级近似满足方程

$$\frac{\partial^2 u_0^{(i)}}{\partial \bar{r}^2} + \gamma\frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial \bar{s}} - \gamma\bar{s}q''(s_0)\frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial \bar{r}} = 0 \tag{6.3.77d}$$

其中变量范围为: $0 < \bar{r} < \infty$ 和 $-\infty < \bar{s} < \infty$. 上式是一个抛物型方程 (注意: 系数与 $\bar{s}$ 有关), 故这样的边界层也称为**抛物型边界层**. 一旦求得上式的解, 要求 $u_0^{(i)}$ 满足 $\bar{r} = 0$ 的边界条件 (切点 $T_L$ **附近的边界**) 并且与外部解匹配. 因为方程 (6.3.77d) 求解比较困难, 故不进一步讨论.

# 6.4 WKB 近似方法

当微分方程中含有大参数 $k$ 时, 如令 $\varepsilon = 1/k$, 则意味着 $\varepsilon \to 0$, 故前三节的理论和方法仍能应用. 但对一维或者高维偏微分方程的系数仅随一个变量变化的情况 (简称为层状变化), 往往采用 WKB 近似来讨论比较方便. 本节首先介绍 WKB 近似和 Liouville-Green 变换, 讨论本征值问题中本征值 $\lambda_n \to \infty$ 时的行为, 以及具有转折点的本征值问题. 最后讨论利用 WKB 近似分析非均匀波导和层状介质中波的传播和激发特性.

### 6.4.1 WKB 近似和 Liouville-Green 变换

考虑含大参数 $k \to \infty$ 的二阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + k^2 q(x)\psi = 0 \tag{6.4.1a}$$

如果作通常的微扰展开

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)^j \psi_j(x) \tag{6.4.1b}$$

零级近似满足方程 $q_1(x)\psi_0(x) = 0$, 故只能给出平凡解 $\psi_0(x) = 0$. 为了寻求适当的展开式, 试考虑特殊情况: $q(x) =$ 常数. 这时方程 (6.4.1a) 可严格求解, 其通解为

$$\psi(x) = c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sqrt{q}x} + c_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sqrt{q}x},\ (q > 0) \tag{6.4.1c}$$

或者

$$\psi(x) = c_1\mathrm{e}^{k\sqrt{|q|}x} + c_1\mathrm{e}^{-k\sqrt{|q|}x},\ (q < 0) \tag{6.4.1d}$$

由上二式可知, $k$ 出现在 $\psi(x)$ 的指数上. 受此启发, 我们求方程 (6.4.1a) 下列形式的解

$$\psi(x) = A\exp\left[\mathrm{i}kG(x,k)\right] \tag{6.4.2a}$$

其中 $A$ 为常数, 以及

$$G(x,k) = \int_{x_0}^{x} Q(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{6.4.2b}$$

其中 $x_0$ 是空间的某个参考点, 把式 (6.4.2a) 代入方程 (6.4.1a) 得到

$$\frac{\mathrm{i}}{k}Q'(x) - Q^2(x) + q(x) = 0 \tag{6.4.2c}$$

注意：上式仍然是严格成立的. 由于 $k \to \infty$(在声波或电磁波中, 相当于高频近似, 近似条件在下面讨论), 作微扰展开

$$\begin{aligned}Q(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{i} Q_i(x) &= Q_0(x) + \frac{1}{k}Q_1(x)\\ &+ \left(\frac{1}{k}\right)^{2} Q_2(x) + \left(\frac{1}{k}\right)^{3} Q_3(x) + \cdots\end{aligned} \tag{6.4.3a}$$

代入方程 (6.4.2c)

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{k}\right)^{0}\left\{-\left[Q_0(x)\right]^2 + q(x)\right\} + \left(\frac{1}{k}\right)^{1}\left[\mathrm{i}Q_0'(x) - 2Q_0(x)Q_1(x)\right]\\ &\quad + \left(\frac{1}{k}\right)^{2}\left\{\mathrm{i}Q_1'(x) - 2Q_0(x)Q_2(x) - \left[Q_1(x)\right]^2\right\}\\ &+ \left(\frac{1}{k}\right)^{3}\left[\mathrm{i}Q_2'(x) - 2Q_0(x)Q_3(x) - Q_1(x)Q_2(x)\right] + \cdots = 0\end{aligned} \tag{6.4.3b}$$

比较 $1/k$ 的同次幂得到

$$\begin{aligned}&\left[Q_0(x)\right]^2 = q(x)\\ &\mathrm{i}Q_0'(x) - 2Q_0(x)Q_1(x) = 0\\ &\mathrm{i}Q_1'(x) - 2Q_0(x)Q_2(x) - \left[Q_1(x)\right]^2 = 0\\ &\mathrm{i}Q_2'(x) - 2Q_0(x)Q_3(x) - 2Q_1(x)Q_2(x) = 0\\ &\cdots\end{aligned} \tag{6.4.3c}$$

因此我们得到

$$
\begin{aligned}
Q_0(x) &= \pm\sqrt{q(x)} \\
Q_1(x) &= \mathrm{i}\frac{Q_0'(x)}{2Q_0(x)} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}} \\
Q_2(x) &= \frac{1}{2Q_0(x)}\left\{-[Q_1(x)]^2 + \mathrm{i}Q_1'(x)\right\} = \frac{Q_0(x)}{2[q(x)]^{3/4}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}} \\
Q_3(x) &= \frac{1}{2Q_0(x)}[\mathrm{i}Q_2'(x) - 2Q_1(x)Q_2(x)] = \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{Q_2(x)}{Q_0(x)}\right] \\
&\cdots
\end{aligned}
\tag{6.4.3d}
$$

代入方程 (6.4.2a) 和 (6.4.2b) 得到保留至 $1/k^2$ 项的近似解

$$
\psi(x) = \frac{A}{\sqrt[4]{q(x)}}\exp\left[-\frac{\varepsilon}{2} \pm \mathrm{i}k\int_{x_0}^{x}(1+\varepsilon)\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi\right] \tag{6.4.4a}
$$

其中

$$
\varepsilon \equiv \frac{1}{2k^2q^{3/4}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}} \tag{6.4.4b}
$$

讨论：

① 如果 $q(x)=1$, 则

$$
\psi(x) = A\exp[\pm\mathrm{i}k(x-x_0)] \tag{6.4.4c}
$$

为均匀介质中的波!

②如果 $\varepsilon \ll 1$, 那么

$$
\psi(x) = \frac{A}{\sqrt[4]{q(x)}}\exp\left[\pm\mathrm{i}k\int_{x_0}^{x}\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi\right] \tag{6.4.4d}
$$

称为 **WKB 近似**(Wentzel-Kramer-Brillourin). 事实上, 式 (6.4.4d) 成立的另一个条件是方程 (6.4.4a) 的指数部分还必须满足

$$
k\int_{x_0}^{x_1}\varepsilon\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi \ll 1 \tag{6.4.4e}
$$

式中 $x_0$ 和 $x_1$ 是任意二点. 注意：这一部分出现在复指数中, 相当于相位的变化, 故同样重要.

**WKB 近似条件** 设不均匀区的特征长度为 $L$, 那么

$$
\varepsilon \equiv \frac{1}{2k^2q^{3/4}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}} \sim \frac{1}{2L^2k^2q} \sim \frac{1}{L^2k^2} \ll 1 \tag{6.4.5a}
$$

其中取 $q \sim 1$, 因此近似条件 $\varepsilon \ll 1$ 可写成

$$k^2L^2 \ll 1 \tag{6.4.5b}$$

或者 $k \gg 1/L$, 在声波或电磁波传播中, 意味着频率必须足够高时, WKB 近似才成立! 第二个近似可表示成

$$\begin{aligned} k\int_{x_0}^{x_1} \varepsilon\sqrt{q(x)}\mathrm{d}x &\sim k\cdot\frac{1}{k^2L^2}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{q(x)}\mathrm{d}x \\ &\sim \frac{1}{kL^2}(x_1-x_2) \ll 1 \end{aligned} \tag{6.4.5c}$$

或者

$$x_1 - x_2 \ll kL^2 \tag{6.4.5d}$$

只有在满足上式条件的区域内, WKB 近似才成立! 可见: WKB 近似成立条件式 (6.4.5c) 比条件 (6.4.5b) 更苛刻! 只有当 $k \to \infty$, WKB 近似在整个区域成立!

根据 $q(x)$ 的符号, WKB 近似解式 (6.4.4d) 可写成

当 $q(x) > 0$ 时

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}}\{A_+\exp[\mathrm{i}k\varTheta_1(x)] + A_-\exp[-\mathrm{i}k\varTheta_1(x)]\} \tag{6.4.6a}$$

其中为了方便, 定义 $\varTheta_1(x) \equiv \int_{x_0}^{x}\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi$;

当 $q(x) < 0$ 时

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{|q(x)|}}\{B_+\exp[-k\varTheta_2(x)] + B_-\exp[k\varTheta_2(x)]\} \tag{6.4.6b}$$

其中为了方便, 定义 $\varTheta_2(x) \equiv \int_{x_0}^{x}\sqrt{|q(\xi)|}\mathrm{d}\xi$.

显然, 当时间项取 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 时, 方程 (6.4.6a) 的第一、二项分别表示沿 $+x$ 和 $-x$ 方向传播的行波, 而式 (6.4.6b) 的第一、二项分别表示沿 $+x$ 和 $-x$ 方向衰减的波, 即**凋落波**. 式 (6.4.6a) 和 (6.4.6b) 也可以写成驻波形式的解

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}}\{C_1\cos[k\varTheta_1(x)] + C_2\sin[k\varTheta_1(x)]\} \tag{6.4.6c}$$

以及

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{|q(x)|}}\{D_+\cosh[k\varTheta_2(x)] + D_-\sinh[k\varTheta_2(x)]\} \tag{6.4.6d}$$

显然在 $q(x)$ 的零点附近, 以上各式都不成立, 这样的点称为**转折点**, 在转折点附近存在边界层. 同 6.3 节一样, 转折点附近的解称为内部解 $\psi^{(i)}(x)$, 而远离转折点的解称为外部解 $\psi^{(o)}(x)$, 式 (6.4.6a)–(6.4.6d) 即为外部解的分段表达式.

**本征值问题** 下面用 WKB 近似来求解本征值问题

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2 q(x)\psi=0,\ x\in(0,1)\\ \psi|_{x=0}=\psi|_{x=1}=0\end{gathered}\tag{6.4.7a}$$

设在 [0,1] 内 $q_1(x)>0$, 对大本征值 $\lambda$, 由式 (6.4.6c)

$$\psi(x)\approx\frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}}\left\{C_1\cos\left[\lambda\int_0^x\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi\right]+C_2\sin\left[\lambda\int_0^x\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi\right]\right\}\tag{6.4.7b}$$

利用方程 (6.4.7a) 中边界条件得到 $C_1=0$ 以及

$$C_2\left[q(1)\right]^{-1/4}\sin\left[\lambda\int_0^1\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi\right]=0\tag{6.4.7c}$$

因 $C_2\neq0$, 本征值 $\lambda$ 满足

$$\lambda\int_0^1\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi=n\pi,\ (n=1,\ 2,\cdots)\tag{6.4.8a}$$

上式可写成

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=n\pi\cdot\left[\int_0^1\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi\right]^{-1}\tag{6.4.8b}$$

如果边界条件换成

$$\psi'(x)|_{x=0}=0;\ \psi(x)|_{x=1}=0\tag{6.4.8c}$$

同样可得

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\cdot\left[\int_0^1\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi\right]^{-1},(n=0,\ 1,\ 2,\cdots)\tag{6.4.8d}$$

**例 6.4.1** 对 $q(x)=(1+x)^2$, 式 (6.4.8a) 给出

$$\lambda_n\approx n\pi\left[\int_0^1(1+\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{-1}=\frac{2}{3}n\pi\tag{6.4.8e}$$

上式与数值计算求得的严格解相比 (见表 6.4.1), 当 $n=1$ 相对误差为 1.65%, 而当 $n=7$ 时, 相对误差只有 0.04%, 可见已是一个很好的近似.

**表 6.4.1　WKB 近似与精确解 (数值计算) 比较 (1)**

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 近似解 | 2.0944 | 4.1888 | 6.2832 | 8.3776 | 10.4720 | 12.5664 | 14.6608 |
| 精确解 | 2.0604 | 4.1686 | 6.2691 | 8.3668 | 10.4632 | 12.5590 | 14.6545 |
| 误差/% | 1.65 | 0.49 | 0.23 | 0.13 | 0.08 | 0.06 | 0.04 |

**Liouville-Green 变换**　对标准形式的 S-L 本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)\psi=\lambda\rho(x)\psi,\ x\in(0,l) \tag{6.4.9a}$$

$$\left(\alpha_1\psi-\beta_1\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=0}=0;\quad \left(\alpha_2\psi+\beta_2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=l}=0 \tag{6.4.9b}$$

当 $\lambda$ 很大时, $\psi(x)$ 的渐近表达式以及本征值 $\lambda_n$ 的行为如何? 为此利用 Liouville-Green 变换

$$\psi=f(x)w(z);\quad z=g(x) \tag{6.4.9c}$$

上式相当于同时对方程 (6.4.9a) 作自变量和函数变换. 我们希望选择恰当的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 使方程 (6.4.9a) 变成简单的形式

$$\frac{\mathrm{d}^2w(z)}{\mathrm{d}z^2}+\lambda w(z)=\varPhi(z)w(z) \tag{6.4.10a}$$

当 $\lambda\to\infty$ 时, $\lambda w(z)\gg\varPhi(z)w(z)$, 可求得上式的近似解

$$w(z)=A\cos\sqrt{\lambda}z+B\sin\sqrt{\lambda}z \tag{6.4.10b}$$

把式 (6.4.9c) 代入 (6.4.9a) 得

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{B(x)}{A(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\lambda\frac{\rho(x)f(x)}{A(x)}w=-\frac{C(x)}{A(x)}w \tag{6.4.10c}$$

其中

$$\begin{aligned}&A(x)\equiv[g'(x)]^2p(x)f(x)\\&B(x)\equiv 2f'(x)g'(x)p(x)+g''(x)f(x)p(x)+g'(x)f(x)p'(x)\\&C(x)\equiv p(x)f''(x)+p'(x)f(x)-g(x)\end{aligned} \tag{6.4.10d}$$

对照式 (6.4.10c) 与 (6.4.10a), $f(x)$ 和 $g(x)$ 应该满足

$$B(x)=0;\ \frac{\rho(x)f(x)}{A(x)}=1 \tag{6.4.11a}$$

由式 (6.4.10d) 得到

$$\ln[f^2 g'(x)p(x)] = \ln C; g(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{\rho(\tau)}{p(\tau)}}\mathrm{d}\tau \tag{6.4.11b}$$

取积分常数 $C=1$ 则 $f^2 = 1/\sqrt{p(x)\rho(x)}$. 于是, 如果取 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(x)\rho(x)}}; \quad g(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{\rho(\tau)}{p(\tau)}}\mathrm{d}\tau \tag{6.4.11c}$$

方程 (6.4.9a) 化成方程 (6.4.10a), 其中 $\varPhi(z)$

$$\varPhi(z) = -\frac{1}{[g'(x)]^2 f(x)p(x)}\left[pf''(x) + p'(x)f(x) - q(x)\right]_{z=g(x)} \tag{6.4.11d}$$

因此当 $\lambda\to\infty$ 时, 方程 (6.4.9a) 的近似解为

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(x)\rho(x)}}\left\{A\cos[\sqrt{\lambda}g(x)] + B\sin[\sqrt{\lambda}g(x)]\right\} \tag{6.4.11e}$$

由上式, 要求 $\rho(x)/p(x) > 0$, 如果 $\rho(x)/p(x) < 0$, 则方程 (6.4.11a) 应取为

$$\frac{\rho(x)f(x)}{[g'(x)]^2 f(x)p(x)} = -1 \tag{6.4.12a}$$

于是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 应取为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{-p(x)\rho(x)}}; \quad g(x) = \int_0^x \sqrt{-\frac{\rho(\tau)}{p(\tau)}}\mathrm{d}\tau \tag{6.4.12b}$$

同时, 方程 (6.4.10a) 变成

$$\frac{\mathrm{d}^2 w(z)}{\mathrm{d}z^2} - \lambda w(z) = \varPhi(z)w(z) \tag{6.4.12c}$$

近似解为

$$w(z) \approx C\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}z} + D\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}z} \tag{6.4.12d}$$

在正则 S-L 问题中 $p(x)>0$ 和 $\rho(x)>0$, 因此只要考虑式 (6.4.11e) 即可.

为了简单, 取方程 (6.4.9b) 中 $\alpha_1=\alpha_2=1$ 和 $\beta_1=\beta_2=0$, 因此方程 (6.4.11e) 中 $A=0$, 而本征值 $\lambda_n$ 满足

$$\sqrt{\lambda_n}g(l) = n\pi, \ (n\to\infty) \tag{6.4.13a}$$

严格地, 上式应写成

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi^2 n^2}{\lambda_n}\right) = g^2(l) \tag{6.4.13b}$$

相应的近似本征函数为

$$\psi_n(x) \approx \frac{B}{\sqrt[4]{p(x)\rho(x)}}\sin\left[\frac{n\pi}{g(l)}g(x)\right] \tag{6.4.13c}$$

其中 $B$ 由归一化条件决定. 如果边界条件是 $\psi'(x)|_{x=0} = 0$ 和 $\psi(x)|_{x=l} = 0$, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{\lambda_n}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = g^2(l) \tag{6.4.13d}$$

**例 6.4.2**　考虑 $x \in [1,2]$ 上 Bessel 方程的本征值问题

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{m^2}{x}\psi = \lambda x\psi,\ x \in (1,2) \\ \psi|_{x=1} = \ \psi|_{x=2} = 0\end{gathered} \tag{6.4.14a}$$

在区间 [1,2] 内 $p(x) = x > 0$ 和 $\rho(x) = x > 0$, 故方程 (6.4.11e) 可用, 由式 (6.4.13b) 得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\lambda_n} = \frac{1}{\pi^2}\int_1^2\sqrt{\frac{\rho(x)}{p(x)}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2} \tag{6.4.14b}$$

相应的本征函数为

$$\psi_n(x) = \frac{B}{\sqrt{x}}\sin[n\pi(x-1)] \tag{6.4.14c}$$

其中 $B$ 为归一化常数. 事实上, 方程 (6.4.14a) 的第一式严格解为

$$\psi(x) = AJ_m(\sqrt{\lambda}x) + BN_m(\sqrt{\lambda}x) \tag{6.4.14d}$$

由方程 (6.4.14a) 的第二式

$$\begin{gathered}AJ_m(\sqrt{\lambda}) + BN_m(\sqrt{\lambda}) = 0 \\ AJ_m(2\sqrt{\lambda}) + BN_m(2\sqrt{\lambda}) = 0\end{gathered} \tag{6.4.14e}$$

故决定本征值的方程为

$$J_m(\sqrt{\lambda})N_m(2\sqrt{\lambda}) - N_m(\sqrt{\lambda})J_m(2\sqrt{\lambda}) = 0 \tag{6.4.14f}$$

当 $\lambda \to \infty$ 时, 利用 Bessel 函数和 Neumann 函数的渐近展开式 (2.5.59b) 不难得到 $\sin\sqrt{\lambda} \approx 0$, 故 $\lambda_n \to n^2\pi^2$, 即方程 (6.4.14b). 本征函数的严格解为

$$\psi_n(x) \sim N_m(\sqrt{\lambda_n})J_m(\sqrt{\lambda_n}x) - J_m(\sqrt{\lambda_n})N_m(\sqrt{\lambda_n}x) \tag{6.4.14g}$$

当 $\lambda_n \to \infty$ 时, 利用渐近展开式 (2.5.59b) 得到

$$\psi_n(x) \sim N_m(n\pi)J_m(n\pi x) - J_m(n\pi)N_m(n\pi x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\sin[n\pi(x-1)] \tag{6.4.14h}$$

注意：本征值和相应的本征函数的渐近表达式与 $m$ 无关!

当 $p(x)$ 或 $\rho(x)$ 存在零点 (转折点) 时, 在转折点附近, 方程 (6.4.11e) 已不成立, 需用边界层理论来处理, 下小节用具体例子来说明之.

### 6.4.2 具有转折点的本征值问题和 Airy 函数

考虑具体例子

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2(1-x^2)\psi=0,\ x\in(0,1)$$
$$\psi|_{x=0}=\psi|_{x=1}=0 \tag{6.4.15a}$$

其中 $\lambda$ 为本征值, $p(x)=1$ 和 $q(x)=1-x^2$. 由 WKB 近似解式 (6.4.6a) 求得

$$\psi(x)\approx\frac{1}{(1-x^2)^{1/4}}\{A\cos[\lambda\Theta(x)]+B\sin[\lambda\Theta(x)]\} \tag{6.4.15b}$$

其中 $\Theta(x)\equiv\int_0^x\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau$. 因边界点 $x=1$ 是转折点, 上式是外部解, 只能满足 $x=0$ 处边界条件, 故 $A\equiv 0$. 于是外部解为

$$\psi^{(o)}(x)\approx\frac{B}{(1-x^2)^{1/4}}\sin\left(\lambda\int_0^x\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right) \tag{6.4.15c}$$

在 $x=1$ 点附近, 作内变量变换

$$\xi=(1-x)\lambda^v \tag{6.4.16a}$$

其中 $v$ 待定. 上式代入方程 (6.4.15a) 得内部解满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2}+2\lambda^{(2-3v)}\xi\psi^{(i)}=0 \tag{6.4.16b}$$

得到上式, 已利用关系 $1-x^2=(1-x)(1+x)\approx 2(1-x)$(在 $x\approx 1$ 附近). 分三种情况讨论:

(1) $(2-3v)<0$, 取 $\lambda\to\infty$, 方程 (6.4.16b) 变成

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2}=0 \tag{6.4.16c}$$

于是 $\psi^{(i)}(\xi)=c_0+c_1\xi$, 显然不可能与外部解式 (6.4.15c) 匹配;

(2) $(2-3v)>0$, 取 $\lambda\to\infty$, 方程 (6.4.16b) 变成 $\psi^{(i)}(\xi)=0$;

(3) $(2-3v)=0$, 即 $v=2/3$, 这时方程 (6.4.16b) 变成

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2}+2\xi\psi^{(i)}=0 \tag{6.4.16d}$$

上式的解具有较复杂的形式, 可望能与外部解式 (6.4.15c) 匹配. 因此取 $v=2/3$. 令 $z=2^{1/3}\xi$, 上式变成 **Airy 方程**:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}z^2}+z\psi^{(i)}=0 \tag{6.4.17a}$$

作函数变换 $\psi^{(i)}=\sqrt{z}v$ 得

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+\left(z-\frac{1}{4z^2}\right)v=0 \tag{6.4.17b}$$

进一步令 $\eta=(2/3)z^{3/2}$, 上式变成 1/3 阶 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\eta}+\left(1-\frac{1}{9\eta^2}\right)v=0 \tag{6.4.17c}$$

通解为

$$v(\eta)=c_1J_{1/3}(\eta)+c_2J_{-1/3}(\eta) \tag{6.4.17d}$$

回到原来的变量, 方程 (6.4.16d) 的通解为

$$\psi^{(i)}(\xi)=\sqrt{\xi}\left[C_1J_{1/3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right)+C_2J_{-1/3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right)\right] \tag{6.4.18a}$$

内部解应满足边界条件 $\psi^{(i)}|_{x=1}=0$ 亦即 $\psi^{(i)}(\xi)|_{\xi=0}=0$, 因为

$$J_{1/3}(0)=0,\ C_2\sqrt{\xi}J_{-1/3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right)\sim C_2 \tag{6.4.18b}$$

故应取 $C_2\equiv 0$, 于是式 (6.4.18a) 变成

$$\psi^{(i)}(\xi)=C_1\sqrt{\xi}J_{1/3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right) \tag{6.4.18c}$$

内部解和外部解中尚有二个待定常数 $C_1$ 和 $B$, 它们由归一化条件和渐近匹配条件决定. 下面我们匹配式 (6.4.18c) 和 (6.4.15c), 求出 $B$ 和 $C_1$ 的关系以及本征值 $\lambda$.

(1) 外部解 $\psi^{(o)}(x)$ 用内变量 $\xi=(1-x)\lambda^{2/3}$ 表示

$$\psi^{(o)}(x)=\frac{B}{[1-(1-\xi\lambda^{-2/3})^2]^{1/4}}\sin\left(\lambda\int_0^{1-\xi\lambda^{-2/3}}\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right) \tag{6.4.18d}$$

保持 $\xi$ 不变, 作近似 $\lambda\to\infty$

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^{1-\xi\lambda^{-2/3}}\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau&=\lambda\int_0^1\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau-\lambda\int_{1-\xi\lambda^{-2/3}}^1\sqrt{(1+\tau)(1-\tau)}\mathrm{d}\tau\\&\approx\frac{\pi}{4}\lambda+\sqrt{2}\lambda\int_1^{1-\xi\lambda^{-2/3}}\sqrt{1-\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{\pi}{4}\lambda-\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\end{aligned} \tag{6.4.19a}$$

于是

$$[\psi^{(o)}]^{(i)} \approx \frac{B\lambda^{1/6}}{2^{1/4}\sqrt[4]{\xi}} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right) \tag{6.4.19b}$$

(2) 内部解 $\psi^{(i)}(\xi)$ 用变量 $x = 1 - \xi\lambda^{-2/3}$ 作外部展开, 并作近似 $\lambda \to \infty$ 得

$$[\psi^{(i)}]^{(o)} \approx C_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right)^{-1/2} \frac{1}{\sqrt[4]{\xi}} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2} - \frac{5\pi}{12}\right) \tag{6.4.19c}$$

(3) 匹配条件 $[\psi^{(o)}]^{(i)} = [\psi^{(i)}]^{(o)}$ 给出

$$\frac{B\lambda^{1/6}}{2^{1/4}\sqrt[4]{\xi}} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right) = C_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right)^{-1/2} \frac{1}{\sqrt[4]{\xi}} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2} - \frac{5\pi}{12}\right)$$

上式恒成立条件是

$$\frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{\pi\lambda}{4} = -\frac{5\pi}{12},\ (n = 1,\ 2, \cdots) \tag{6.4.19d}$$

以及 $C_1 = \sqrt{\pi/3}B\lambda^{1/6}$. 因此本征值 $\lambda_n$ 的近似解为

$$\lambda_n = 4\left(n + \frac{11}{12}\right),\ (n = 1,\ 2, \cdots) \tag{6.4.19e}$$

上式与数值计算求得的严格解相比 (见表 6.4.2), 即使 $n = 1$, 相对误差也只有 0.152%, 而当 $n = 6$ 时, 相对误差只有 0.002%, 可见是一个很好的近似.

**表 6.4.2 WKB 近似与精确解 (数值计算) 比较 (2)**

| $N$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 近似解 | 3.6667 | 7.6667 | 11.6667 | 15.6667 | 19.6667 | 23.6667 |
| 精确解 | 3.6723 | 7.6688 | 11.6679 | 15.6675 | 19.6673 | 23.6672 |
| 误差/% | 0.152 | 0.027 | 0.010 | 0.005 | 0.003 | 0.002 |

**$m$ 阶转折点** 上例中 $x = 1$ 是 $q(x) = 1 - x^2$ 的单重零点, 因此内部解 $\psi^{(i)}$ 满足方程 (6.4.16d). 下面考虑 $x = \alpha$ 是 $q(x)$ 的 $m$ 重零点情形. 因 $x = \alpha$ 是 $q(x)$ 的 $m$ 重零点, $q(x)$ 可写成

$$q(x) = (x - \alpha)^m f(x) \tag{6.4.20a}$$

其中 $f(\alpha) \neq 0$. 在 $x = \alpha$ 附近取内部变量 $\xi = \lambda^v(x - \alpha)$, 代入方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \lambda^2(x - \alpha)^m f(x)\psi = 0 \tag{6.4.20b}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} + \lambda^{(2-mv-2v)}\xi^m f(\alpha + \xi\lambda^{-v})\psi = 0 \tag{6.4.20c}$$

为与外部解匹配, 应取 $v$ 满足 $(2-mv-2v)=0$, 即 $v=2/(m+2)$. 当 $\lambda\to\infty$ 时, 内部解 $\psi^{(i)}(\xi)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2}+f(\alpha)\xi^m\psi^{(i)}=0 \tag{6.4.20d}$$

上式可以化成标准形式的 Bessel 方程, 作函数和自变量变换

$$\psi^{(i)}(\xi)=\sqrt{\xi}y(\eta);\ \eta=a\xi^b \tag{6.4.21a}$$

其中 $a$ 和 $b$ 待定. 为了方便令 $A=\sqrt{\xi}$ 和 $B=y(\eta)$, 则 $\psi^{(i)}=AB$ 以及

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2}=B\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}\xi^2}+A\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}\xi^2}+2\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\xi} \tag{6.4.21b}$$

不难得到微分关系

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}y(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi};\ \frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}\xi^2}=\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2y(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{\mathrm{d}y(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2} \tag{6.4.21c}$$

利用上式和式 (6.4.21b), 方程 (6.4.20d) 简化成

$$\eta^2y''(\eta)+\eta y'(\eta)+\left[\frac{f(\alpha)}{b^2}\left(\frac{\eta}{a}\right)^{(m+2)/b}-\frac{1}{(2b)^2}\right]y(\eta)=0 \tag{6.4.21d}$$

上式中取 $m+2=2b$, 则方程与 Bessel 方程相似, 于是

$$\eta^2y''(\eta)+\eta y'(\eta)+\left[\frac{f(\alpha)}{a^2b^2}\eta^2-\frac{1}{(m+2)^2}\right]y(\eta)=0 \tag{6.4.22a}$$

如果 $f(\alpha)>0$, 可取 $f(\alpha)/(a^2b^2)=1$, 即 $a=2\sqrt{f(\alpha)}/(m+2)$, 于是由方程 (6.4.21a) 得到变换

$$\psi^{(i)}(\xi)=\sqrt{\xi}y(\eta);\ \eta=\frac{2\sqrt{f(\alpha)}}{m+2}\xi^{1+m/2} \tag{6.4.22b}$$

方程 (6.4.22a) 简化成 $1/(m+2)$ 阶 Bessel 方程; 如果 $f(\alpha)<0$, 取 $|f(\alpha)|/(a^2b^2)=1$ 即 $a=2\sqrt{|f(\alpha)|}/(m+2)$, 方程 (6.4.20d) 简化成 $1/(m+2)$ 阶虚宗量 Bessel 方程.

因此方程 (6.4.20d) 的解为 $1/(m+2)$ 阶 Bessel 函数: ①如果 $f(\alpha)>0$, 则

$$\begin{gathered}\psi^{(i)}(\xi)=\sqrt{\xi}\left[C_1J_{-1/(m+2)}(\eta)+C_2J_{1/(m+2)}(\eta)\right]\\ \eta\equiv\frac{2\sqrt{f(\alpha)}}{m+2}\xi^{1+m/2}\end{gathered} \tag{6.4.23a}$$

③如果 $f(\alpha)<0$, 则用虚宗量 Bessel 函数

$$\begin{gathered}\psi^{(i)}(\xi)=\sqrt{\xi}\left[C_1I_{-1/(m+2)}(\eta)+C_2I_{1/(m+2)}(\eta)\right]\\ \eta\equiv\frac{2\sqrt{|f(\alpha)|}}{m+2}\xi^{1+m/2}\end{gathered} \tag{6.4.23b}$$

注意：根据以上的讨论, 对 $m$ 没有具体要求, 就方程 (6.4.20d) 本身而言, 只要 $m\neq -2$, 当 $m=-2$ 时, 方程 (6.4.20d) 为 Euler 型方程, 具有幂次形式的解.

**例 6.4.3** 考虑本征值问题

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2 q(x)\psi=0,\ x\in(0,1)\\ \psi|_{x=0}=\psi|_{x=1}=0\end{gathered}\tag{6.4.24a}$$

其中 $q(x)=(1-x)^m f(x)$ 和 $f(1)>0$. 显然 $x=1$ 是 $q(x)$ 的 $m$ 重零点. 外部解为

$$\psi^{(o)}(x)=\frac{B}{\sqrt[4]{(1-x)^m f(x)}}\sin\left[\lambda\int_0^x\sqrt{(1-\tau)^m f(\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\tag{6.4.24b}$$

内部解为

$$\psi^{(i)}(\xi)=C\sqrt{\xi}J_{1/(m+2)}\left[\frac{2\sqrt{f(1)}}{m+2}\xi^{1+m/2}\right]\tag{6.4.24c}$$

待定常数 $B$ 和 $C$ 由匹配条件和归一化条件求得.

(1) 内部解 $\psi^{(i)}$ 作外部变量展开, 并作近似 $\lambda\to\infty$, 容易求得

$$[\psi^{(i)}]^{(o)}=\sqrt{\frac{m+2}{\pi\sqrt{f(1)}}}\frac{C}{\xi^{m/4}}\cos\left[\frac{2\sqrt{f(1)}}{m+2}\xi^{1+m/2}-\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{m+1}+1\right)\right]\tag{6.4.25a}$$

(2) 外部解 $\psi^{(o)}$ 作内部变量展开, 并作近似 $\lambda\to\infty$, 容易求得

$$[\psi^{(o)}]^{(i)}=\frac{\lambda^{\frac{m}{2(m+2)}}}{\sqrt[4]{f(1)}}\frac{B}{\xi^{m/4}}\sin\left[\lambda\delta-\frac{2\sqrt{f(1)}}{m+2}\xi^{1+m/2}\right]\tag{6.4.25b}$$

其中积分 $\delta=\displaystyle\int_0^1\sqrt{(1-\tau)^m f(\tau)}\mathrm{d}\tau$;

(3) 由 $[\psi^{(o)}]^{(i)}=[\psi^{(i)}]^{(o)}$ 得

$$\begin{gathered}C=\sqrt{\frac{\pi}{m+2}}\cdot\lambda^{\frac{m}{2(m+2)}}B\\ \frac{\pi}{2}+n\pi-\lambda\delta=-\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{m+1}+1\right)\end{gathered}\tag{6.4.25c}$$

从上式得本征值 $\lambda_n$ 的近似解

$$\lambda_n=\frac{\pi}{\delta}\left[n+\frac{1}{4}\left(3+\frac{2}{m+1}\right)\right]\tag{6.4.25d}$$

**Airy 函数** Airy 方程 (6.4.17a) 在研究转折点附近解的特性非常重要, 故我们专门介绍.

(1) 当 $z>0$ 时, 通过函数和自变量变换：$\psi^{(i)}=\sqrt{z}v$ 和 $\eta=(2/3)z^{3/2}$, Airy 方程 (6.4.17a), 即

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}z^2}+z\psi^{(i)}=0 \tag{6.4.26a}$$

可以化为 1/3 阶 Bessel 方程 (6.4.17c), 即

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\eta}+\left(1-\frac{1}{9\eta^2}\right)v=0 \tag{6.4.26b}$$

故通解为

$$\psi^{(i)}(z)=C_1\sqrt{z}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)+C_2\sqrt{z}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\quad (z>0) \tag{6.4.26c}$$

(2) 当 $z<0$ 时, 通过函数和自变量变换：$\psi^{(i)}=\sqrt{|z|}v$ 和 $\eta=(2/3)|z|^{3/2}$, 方程 (6.4.26a) 可以化为 1/3 阶虚宗量 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\eta}-\left(1+\frac{1}{9\eta^2}\right)v=0 \tag{6.4.27a}$$

故通解为

$$\psi^{(i)}(z)=C_1\sqrt{|z|}I_{1/3}\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2}\right)+C_2\sqrt{|z|}I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2}\right)\quad (z<0) \tag{6.4.27b}$$

显然 $I_{1/3}$ 与 $I_{-1/3}$ 或者 $J_{1/3}$ 与 $J_{-1/3}$, 的任意线性组合也是 Airy 方程的解, 故定义新的函数

$$\mathrm{Ai}(z)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{z}}{3}\left[J_{-1/3}\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2}\right)+J_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2}\right)\right], & z>0\\ \dfrac{\sqrt{|z|}}{3}\left[I_{-1/3}\left(\dfrac{2}{3}|z|^{3/2}\right)-I_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}|z|^{3/2}\right)\right], & z<0\end{cases} \tag{6.4.27c}$$

以及

$$\mathrm{Bi}(z)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{z}{3}}\left[J_{-1/3}\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2}\right)-J_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2}\right)\right], & z>0\\ \sqrt{\dfrac{|z|}{3}}\left[I_{-1/3}\left(\dfrac{2}{3}|z|^{3/2}\right)+I_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}|z|^{3/2}\right)\right], & z<0\end{cases} \tag{6.4.27d}$$

其中 $\mathrm{Ai}(z)$ 和 $\mathrm{Bi}(z)$ 分别称为**第一和第二类 Airy 函数**. 定义 Airy 函数后, Airy 方程 (6.4.26a) 的解可统一表示为

$$\psi^{(i)}(z) = C_1\mathrm{Ai}(z) + C_2\mathrm{Bi}(z) \tag{6.4.27e}$$

利用 Bessel 函数的渐近表达式 $(x \to \infty)$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right);\ I_\nu(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp(x) \tag{6.4.28a}$$

得到 Airy 函数的渐近表达式 $(|z| \to \infty)$

$$\mathrm{Ai}(z) \approx \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}z^{1/4}}\sin\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2} + \dfrac{\pi}{4}\right), & z \to \infty \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}|z|^{1/4}}\exp\left(-\dfrac{2}{3}|z|^{3/2}\right), & z \to -\infty \end{cases} \tag{6.4.28b}$$

以及

$$\mathrm{Bi}(z) \approx \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}z^{1/4}}\cos\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2} + \dfrac{\pi}{4}\right), & z \to \infty \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}|z|^{1/4}}\exp\left(\dfrac{2}{3}|z|^{3/2}\right), & z \to -\infty \end{cases} \tag{6.4.28c}$$

可见：当 $z \to -\infty$ 时, $\mathrm{Bi}(z) \to \infty$, 因此常用的函数是 $\mathrm{Ai}(z)$. 图 6.4.1 给出了 $\mathrm{Ai}(z)$ 和 $\mathrm{Bi}(z)$ 的曲线, 从图可见：当 $z > 0$ 时, $\mathrm{Ai}(z)$ 和 $\mathrm{Bi}(z)$ 振荡, 而当 $z < 0$ 时, $\mathrm{Ai}(z)$ 指数衰减, 而 $\mathrm{Bi}(z)$ 指数发散.

值得指出的是, Airy 函数是方程 (6.4.26a) 的 “驻波” 形式解, 当问题涉及到 $z$ 方向的 “行波” 时, 必须取 1/3 阶 Hankel 函数.

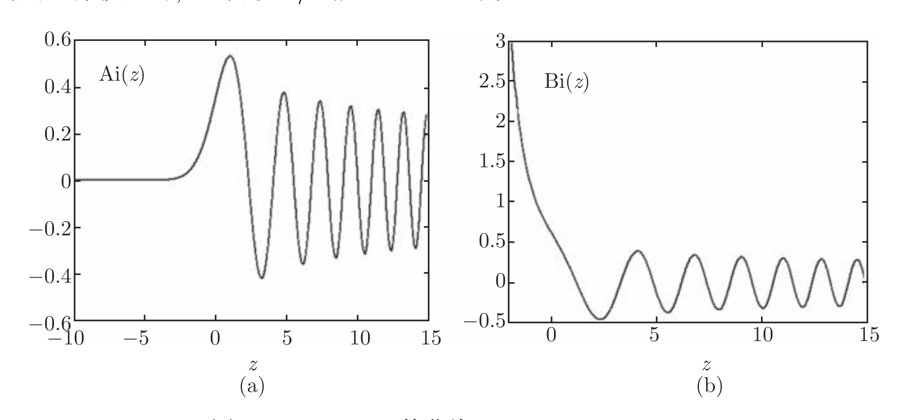



图 6.4.1 Airy 函数曲线：(a) $\mathrm{Ai}(z)$; (b) $\mathrm{Bi}(z)$

### 6.4.3　非均匀波导中的波

本小节介绍 WKB 近似方法在分析波传播特性方面的应用. 首先介绍一个相对简单的例子：求高频近似下, 一维耗散介质中波的传播解. 定解问题为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\mu^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial t}+\beta(x)u,\ x\in(0,\infty),\ t>0$$
$$u(x,t)|_{x=0}=\cos\omega t,\ t>0 \tag{6.4.29a}$$

由于系数与 $x$ 有关, 求严格解比较困难. 我们用 WKB 近似方法求高频渐近解. 当 $\mu^2(x)=\mu_0^2$(常数) 和 $\alpha(x)=\beta(x)=0$ 时, 不难得到方程 (6.4.29a) 的解为

$$u(x,t)=\mathrm{Re}\{\exp[\mathrm{i}(\omega t-\mu_0\omega x)]\} \tag{6.4.29b}$$

受此启发, 把解展开成形式 (注意：最后取实部)

$$u(x,t)=\exp\{\mathrm{i}[\omega t-\omega\Theta(x)]\} \tag{6.4.29c}$$

上式代入方程 (6.4.29a) 得到 $\Theta(x)|_{x=0}=0$ 以及

$$-\mathrm{i}\omega\Theta''(x)+(-\mathrm{i}\omega)^2\Theta'(x)\Theta'(x)=-\omega^2\mu^2(x)+\mathrm{i}\omega\alpha(x)+\beta(x) \tag{6.4.29d}$$

与式 (6.4.2b) 类似, 令 (满足 $\Theta(x)|_{x=0}=0$)

$$\Theta(x)=\int_0^x G(x,\omega)\mathrm{d}x \tag{6.4.30a}$$

代入方程 (6.4.29d) 得到

$$-\frac{\mathrm{i}}{\omega}G'(x,\omega)-G^2(x,\omega)=-\mu^2(x)+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\alpha(x)+\frac{\beta(x)}{\omega^2} \tag{6.4.30b}$$

作高频渐近展开

$$G(x,\omega)=G_0(x,\omega)+\frac{1}{\omega}G_1(x,\omega)+\frac{1}{\omega^2}G_2(x,\omega)+\cdots \tag{6.4.30c}$$

代入方程 (6.4.30b) 且比较 $1/\omega$ 的幂次得到

$$[G_0(x,\omega)]^2=\mu^2(x)$$
$$-\mathrm{i}G_0'(x,\omega)-2G_0(x,\omega)G_1(x,\omega)=\mathrm{i}\alpha(x) \tag{6.4.31a}$$
$$\cdots$$

于是容易求得

$$G_0(x,\omega)=\pm\mu(x)$$
$$G_1(x,\omega)=\mp\frac{\alpha(x)}{2\mu(x)}-\frac{\mathrm{i}}{2}[\ln\mu(x)]' \tag{6.4.31b}$$
$$\cdots$$

代入式 (6.4.30a) 和 (6.4.29c) 得到 (最后取实部)

$$\Theta(x)=\pm\int_0^x\mu(x)\mathrm{d}x\mp\frac{\mathrm{i}}{2\omega}\int_0^x\frac{\alpha(x)}{\mu(x)}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\ln\sqrt{\frac{\mu(0)}{\mu(x)}}+O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{6.4.32a}$$

和

$$u(x,t)\approx\sqrt{\frac{\mu(0)}{\mu(x)}}\exp\left[\mp\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\alpha(x)}{\mu(x)}\mathrm{d}x\right]\cos\left[\omega t\mp\omega\int_0^x\mu(x)\mathrm{d}x\right] \tag{6.4.32b}$$

显然, 本例中波向 $+x$ 方向传播, 故上式中取 “$-$”. 上式表明: 波的振幅、衰减系数和相位因子都是 $x$ 的函数; 有趣的是, 在高频近似下, 系数 $\beta(x)$ 不起作用.

少许复杂一点的例子是分析薄长波导中波的传播问题. 考虑膜的横向强迫振动问题, 假定膜的长度大大于宽度, 宽度边界 $y=\pm G(x)$ 固定, 如图 6.4.2

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6.4.33a}$$

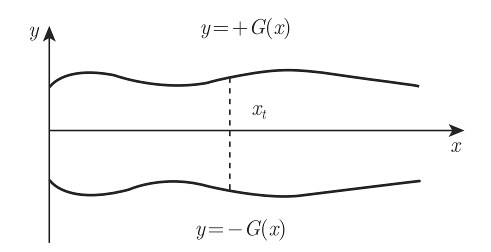



图 6.4.2 薄长波导中波的传播问题

其中变量范围为: $x\in(0,\infty)$ 和 $-G(x)<y<G(x)$, 边界条件

$$u(x,y,t)|_{y=\pm G(x)}=0;\ u(0,y,t)=f(y)\cos\omega t \tag{6.4.33b}$$

注意: 方程 (6.4.33a) 对 $x$ 的偏导引进小参数 $\varepsilon$, 因为 $y$ 方向固定, 该方向的张力远大于 $x$ 方向. 下面用 WKB 近似方法分析波在这种波导结构中传播产生的有趣的物理现象.

首先考虑简单情况: $\mu(x)=\mu_0$(常数) 和 $G(x)=L$(常数), 容易得到方程 (6.4.33a) 和 (6.4.33b) 的解具有形式

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t\pm\frac{1}{\varepsilon}k_n x\right)\right]\psi_n(y) \tag{6.4.33c}$$

其中 $k_n\equiv\sqrt{\mu_0\omega^2-\lambda_n^2}$, $\psi_n(y)$ 和 $\lambda_n$ 是 $y$ 方向的本征函数和相应的本征值

$$\psi_n(y)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left[\frac{n\pi}{2L}(y+L)\right],\ \lambda_n=\frac{n\pi}{2L},\ (n=1,2,\cdots) \tag{6.4.33d}$$

显然, 式 (6.4.33c) 中微扰参数 $\varepsilon$ 出现在相位上, 相位的改变 $k_n x/\varepsilon$ 与传播距离 $x$ 成正比, 可以设想当 $\mu(x)$ 和 $G(x)$ 不为常数, 相位的改变应该是 $x$ 的函数 $\Theta(x)/\varepsilon$(注意：只有当 $\mu(x)$ 仅是 $x$ 的函数时, 才有此结论；如果 $\mu$ 还是 $y$ 的函数, 相位改变还应该是 $y$ 的函数, 此时必须用 6.5 节的射线近似方法). 根据 WKB 近似方法, 设方程 (6.4.33a) 的传播解为

$$u(x,y,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega t - \Theta(x)/\varepsilon]} \cdot [u_0(x,y) + \varepsilon^\alpha u_1(x,y) + \cdots] \tag{6.4.34a}$$

代入方程 (6.4.33a) 给出

$$\begin{aligned}\left[-\Theta_x^2 u_0 - i\varepsilon\left(\Theta_{xx}u_0 + 2\Theta_x\frac{\partial u_0}{\partial x} + \Theta_x^2 u_1\right) + \cdots\right] + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \cdots \\ = -\omega^2\mu^2(u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots)\end{aligned} \tag{6.4.34b}$$

上式零阶近似为

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (\omega^2\mu^2 - \Theta_x^2)u_0 = 0 \\ u_0(x,y)|_{y=\pm G(x)} = 0\end{gathered} \tag{6.4.34c}$$

上式的解可表示为

$$u_0(x,y) = A(x)\sin[\lambda(y+G)] \tag{6.4.35a}$$

其中 $\lambda(x) = \sqrt{\omega^2\mu^2 - \Theta_x^2}$, 把 $x$ 看作常数, 上式显然满足式 (6.4.34c) 的方程和一个边界条件 $y = -G(x)$. 从另外一个边界 $y = G(x)$ 的条件可以导出决定 $\Theta(x)$ 的方程

$$2\lambda_n(x)G(x) = n\pi,\ (n = 1, 2, \cdots) \tag{6.4.35b}$$

即

$$\Theta_x(x) = \pm\sqrt{\omega^2\mu^2(x) - \lambda_n^2(x)} \tag{6.4.35c}$$

其中 $\lambda_n(x) = n\pi/(2G)$. 当 $n$ 足够大, 即 $\lambda_n(x) > \omega\mu(x)$, $\Theta_x$ 是虚数. 因此高阶模式不能传播, 而是指数衰减的振动. 方程 (6.4.34b) 的一阶近似为

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \lambda_n^2 u_1 = \mathrm{i}\left(\Theta_{xx}u_0 + 2\Theta_x\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \\ u_1(x,y)|_{y=\pm G(x)} = 0\end{gathered} \tag{6.4.36a}$$

第一式两边乘 $u_0$ 并积分

$$\int_{-G}^{G} u_0\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \lambda_n^2 u_1\right)\mathrm{d}y = \mathrm{i}\int_{-G}^{G} u_0\left(\Theta_{xx}u_0 + 2\Theta_x\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\mathrm{d}y \tag{6.4.36b}$$

上式左边分部积分二次, 并利用式 (6.4.34c) 和式 (6.4.36a) 中的边界条件, 容易证明左边积分为零. 因此

$$0=\int_{-G}^{G}\left(\Theta_{xx}u_0+2\Theta_x\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)u_0\mathrm{d}y=\int_{-G}^{G}\frac{\partial(\Theta_x u_0^2)}{\partial x}\mathrm{d}y \tag{6.4.36c}$$

利用变上下限积分的微分规则上式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-G}^{G}\Theta_x u_0^2\mathrm{d}y-\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\Theta_x u_0^2\right)\Bigg|_{y=-G}^{y=G}=0 \tag{6.4.36d}$$

利用边界条件 $u_0(x,y)|_{y=\pm G(x)}=0$ , 上式第二项为零, 于是

$$\Theta_x\int_{-G}^{G}u_0^2\mathrm{d}y=B \tag{6.4.37a}$$

其中 $B$ 为常数. 把式 (6.4.35a) 代入上式得到 $A=B/\sqrt{\Theta_x G(x)}$. 因此最后得到 WKB 近似解为 (注意: 最后取实部)

$$u_n(x,y,t)=\frac{B_n}{\sqrt{\Theta_x G}}\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t\pm\frac{\Theta}{\varepsilon}\right)\right]\sin[\lambda_n(y+G)] \tag{6.4.37b}$$

其中 “±” 分别表示向 $-x$ 和 $+x$ 方向传播的波, 如果没有波的反射 (若存在转折点则必须考虑波的反射, 见下面讨论), 激发的波向 $+x$ 方向传播, 那么取 “−”. 相位函数 $\Theta(x)$ 和本征值函数 $\lambda_n(x)$ 分别为

$$\begin{aligned}\Theta(x)&=\int_{x_0}^{x}\sqrt{\omega^2\mu^2(x)-\lambda_n^2(x)}\mathrm{d}x\\ \lambda_n(x)&=\frac{n\pi}{2G(x)},\ (n=1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{6.4.37c}$$

其中常数 $x_0$ 由初始相位决定.

**转折点附近的解** 显然当 $\Theta_x(x)=0$ 时, 方程 (6.4.37b) 不成立, 因而可能存在转折点. 转折点 $x_t$ (如图 6.4.2) 的决定方程为

$$\mu(x_t)=\frac{n\pi}{2\omega G(x_t)} \tag{6.4.38a}$$

注意: 转折点 $x_t$ 与 $n$ 有关, 不同的模式具有不同的转折点. 假定上式只有一个解, 即只存在一个转折点. 在转折点附近形成边界层, 令坐标变换为

$$\xi=(x-x_t)\varepsilon^{-\beta} \tag{6.4.38b}$$

内部解展开为

$$u^{(i)}(\xi,y,t)=\varepsilon^{\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left\{u_0^{(i)}(\xi)\sin[\lambda_n(y+G_t)]+\cdots\right\} \tag{6.4.38c}$$

其中 $G_t \equiv G(x_t)$, 常数 $\delta$ 由匹配条件决定. 把上式代入方程 (6.4.33a) 得到内部解满足的方程

$$\varepsilon^{2-2\beta}\frac{\mathrm{d}^2 u_0^{(i)}}{\mathrm{d}\xi^2} + \Theta_x^2 u_0^{(i)} + \cdots = 0 \tag{6.4.38d}$$

其中

$$\Theta_x^2(x_t + \varepsilon^\beta \xi) = \Theta_x^2(x_t) + \varepsilon^\beta \xi \frac{\mathrm{d}\Theta_x^2(x_t)}{\mathrm{d}x} + \cdots = \varepsilon^\beta \xi \frac{\mathrm{d}\Theta_x^2(x_t)}{\mathrm{d}x} + \cdots \tag{6.4.38e}$$

显然匹配条件要求 $2-2\beta = \beta$, 即 $\beta = 2/3$, 于是方程 (6.4.38d) 变成

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_0^{(i)}(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \gamma\xi u_0^{(i)}(\xi) = 0 \tag{6.4.39a}$$

其中 $\gamma = \mathrm{d}\Theta_x^2(x_t)/\mathrm{d}x$, 假定 $\gamma > 0$, 则上式的通解由 Airy 函数表示为

$$u_0^{(i)}(\xi) = a_1 \mathrm{Ai}(\gamma^{1/3}\xi) + a_2 \mathrm{Bi}(\gamma^{1/3}\xi) \tag{6.4.39b}$$

因第二项当 $\xi \to \infty$ 发散, 故取 $a_2 = 0$.

另一方面, 由式 (6.4.37b), 外部解取为

$$u_n^{(o)}(x,y,t) \approx \begin{cases} u_L^n(x,y,t), & 0 \leqslant x < x_t \\ u_R^n(x,y,t), & x_t < x < \infty \end{cases} \tag{6.4.40a}$$

其中 (注意: 上式与模式 $n$ 有关! )

$$\begin{aligned} u_L^n &\approx \frac{1}{\sqrt{\Theta_x G(x)}}[a_n^L \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \Theta/\varepsilon)} + b_n^L \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \Theta/\varepsilon)}]\sin[\lambda_n(y+G)] \\ u_R^n &= \frac{a_n^R}{\sqrt{|\Theta_x| G(x)}}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\omega t - \phi/\varepsilon)}\sin[\lambda_n(y+G)] \end{aligned} \tag{6.4.40b}$$

其中

$$\Theta(x) = \int_x^{x_t} \sqrt{\omega^2\mu^2(x) - \lambda_n^2}\,\mathrm{d}x; \quad \phi(x) = \int_{x_t}^{x} \sqrt{\lambda_n^2 - \omega^2\mu^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{6.4.40c}$$

注意: 在转折点 $\Theta_x(x_t) = 0$, 即 $\omega^2\mu^2(x_t) - \lambda_n^2 = 0$, 而在转折点左边 $(x < x_t)\omega^2\mu^2(x) - \lambda_n^2 > 0$, 右边 $(x > x_t)\omega^2\mu^2(x) - \lambda_n^2 < 0$. 因此在转折点右边把解取成指数衰减形式; 左边存在 $+x$ 方向传播的入射波和向 $-x$ 方向传播的反射波, 故左边的解 $u_L$ 有二项. 通过式 (6.4.39b) 与 (6.4.40a) 的匹配, 可以求得

$$\begin{gathered} \delta = -\frac{1}{6};\ a_1 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\gamma^{1/6} G_t^{1/2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} a_n^L \\ b_n^L = -\mathrm{i} a_n^L;\ a_n^R = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} a_n^L \end{gathered} \tag{6.4.41a}$$

其中常数 $a_n^L$ 由式 (6.4.33b) 的第二式决定: 为了满足式 (6.4.33b) 的第二个边界条件, 考虑转折点左边的解, 作迭加

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n^L u_n(x,y,t) \tag{6.4.41b}$$

其中 $u_n(x,y,t)=u_L^n/a_n^L$. 由边界条件 $u(0,y,t)=f(y)\cos\omega t$ 得到 (注意：最后取实部)

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n^L u_n(0,y)=f(y) \tag{6.4.41c}$$

其中

$$u_n(0,y)\approx\frac{1}{\sqrt{\Theta_x(0)G(0)}}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta(0)/\varepsilon}-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta(0)/\varepsilon}]\sin\left\{\frac{n\pi}{2G(0)}[y+G(0)]\right\}$$

从方程 (6.4.41c), 不难求得系数 $A_n^L$.

分析式 (6.4.40b), 可以得到结论:

(1) 如果 $0<x_t<\infty$, 在转折点左边, 波有两部分组成, 即入射波和反射波, 转折点具有反射面作用, 而在转折点右边, 振动指数衰减;

(2) 从式 (6.4.38a) 可知, 转折点位置与激发频率 $\omega$ 和模式 $n$ 有关. 一般, 随着频率 $\omega$ 下降, 转折点向左移动, 当频率 $\omega$ 下降到 $\omega=\omega_c$, 转折点位于原点, 即 $x_t=0$, 因此频率 $\omega$ 低于 $\omega_c$ 时, 所有 $n\neq 0$ 的模式都不能传播, $\omega_c$ 称为**低频截止频率**;

(3) 当 $n$ 足够大, 使 $x_t\leqslant 0$, 因此高阶模式不能传播.

**例 6.4.4** 考虑特殊情况, 即宽度均匀 $G(x)=L$ (常数) 且密度均匀 $\mu(x)=\mu_0$(常数)

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{2L},\ (n=1,2,\cdots);\quad \Theta_x(x)=\sqrt{\omega^2\mu_0^2-\lambda_n^2} \tag{6.4.41d}$$

当 $\omega=\lambda_n/\mu_0$ 时, 也有 $\Theta_x(x)=0$. 这一性质与 $x$ 无关, 因而不是转折点引起的. 此时, 激发源的振动频率与系统共振频率一致, 产生共振, 应考虑系统的阻尼或非线性!

### 6.4.4 层状介质中高频波的传播和激发

考虑层状介质中的波动方程

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+k_0^2n^2(z)\Phi=0 \tag{6.4.42a}$$

其中 $n(z)$ 是声波或电磁波的折射率, 仅是 $z$ 的函数, 与 $x$ 和 $y$ 无关. 设方程 (6.4.42a) 的解为

$$\Phi(x,y,z)=\iint\psi(k_x,k_y,z)\exp[\mathrm{i}(k_xx+k_yy)]\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{6.4.42b}$$

代入方程 (6.4.42a)

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}z^2}+k_0^2q(z)\psi=0 \tag{6.4.42c}$$

其中 $q(z)\equiv n^2(z)-(k_x^2+k_y^2)/k_0^2$. 由式 (6.4.6a) 和 (6.4.6b), 当 $k_0^2\to\infty$ 时, WKB 解为

当 $q(z)>0$ 时

$$\psi^{(o)}(k_x,k_y,z)\approx\frac{1}{\sqrt[4]{q(z)}}\left\{A_+\exp[\mathrm{i}k_0\Theta_+(z)]+A_-\exp[-\mathrm{i}k_0\Theta_+(z)]\right\} \tag{6.4.43a}$$

其中 $\Theta_+(z)\equiv\displaystyle\int_{z_0}^{z}\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi$;

当 $q(z)<0$ 时

$$\psi^{(o)}(k_x,k_y,z)\approx\frac{1}{\sqrt[4]{|q(z)|}}\left\{B_+\exp[-k_0\Theta_-(z)]+B_-\exp[k_0\Theta_-(z)]\right\} \tag{6.4.43b}$$

其中 $\Theta_-(z)\equiv\displaystyle\int_{z_0}^{z}\sqrt{|q(\xi)|}\mathrm{d}\xi$;

当时间项取 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 时, 式 (6.4.43a) 的第一、二项分别表示沿 $+z$ 和 $-z$ 方向传播的行波, 而方程 (6.4.43b) 的第一、二项分别表示沿 $+z$ 和 $-z$ 方向衰减的波, 即凋落波.

由 $q(z)$ 的定义, 可能存在转折点 (三维空间为平面, 二维情况为直线), 除非波沿 $z$ 方向传播: $k_x=k_y=0$, $q(z)=n^2(z)$ 不可能为零. 转折点 $z_t$ 满足方程

$$k_0^2q(z_t)=k_0^2n^2(z_t)-(k_x^2+k_y^2)=0 \tag{6.4.43c}$$

为了简单, 假定 $z_t$ 是 $q(z)$ 的单重零点

$$q(z)\approx(z-z_t)f(z_t) \tag{6.4.43d}$$

在转折点 $z_t$ 邻近区域 $|z-z_t|<\delta$ 以外, WKB 近似解式 (6.4.43a) 和 (6.4.43b) 成立, 而在 $|z-z_t|<\delta$ 以内, 方程 (6.4.42c) 近似为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}z^2}+f(z_t)k_0^2(z-z_t)\psi^{(i)}=0 \tag{6.4.44a}$$

设 $f(z_t)>0$, 令 $z'=\sqrt[3]{f(z_t)}(z-z_t)k_0^{2/3}$, 上式变成 Airy 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}z'^2}+z'\psi^{(i)}=0 \tag{6.4.44b}$$

设波由 $z_0>z_t$ 平面发出入射到转折点 $z_t$(实际上为平面), 如图 6.4.3. 下面分段讨论解的情况:

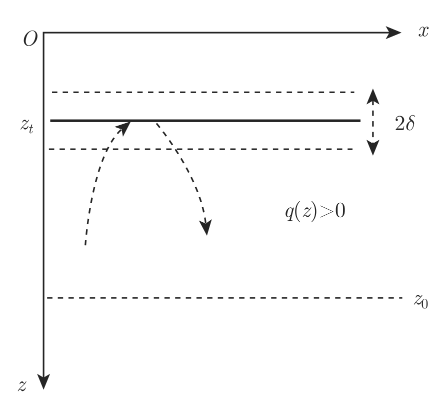



图 6.4.3 转折点 $z_t$ 在入射面上部

(1) 在转折点 $z_t$ 的下部邻域, $z_t+\delta>z>z_t$, $z'>0$, 方程 (6.4.44b) 的解为

$$\psi^{(i)}(z')=C_D\mathrm{Ai}(z')=C_D\frac{\sqrt{z'}}{3}\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z'^{3/2}\right)+J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z'^{3/2}\right)\right] \tag{6.4.44c}$$

其中 $z'=\sqrt[3]{f(z_t)}(z-z_t)k_0^{2/3}>0$.

(2) 在转折点 $z_t$ 的上部邻域, $z_t-\delta<z<z_t$, $z'<0$, 方程 (6.4.44b) 的解为

$$\psi^{(i)}(z')=C_U\mathrm{Ai}(z')=C_U\frac{\sqrt{z'}}{3}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z'^{3/2}\right)-I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z'^{3/2}\right)\right] \tag{6.4.44d}$$

其中 $z'=\sqrt[3]{f(z_t)}(z-z_t)k_0^{2/3}<0$.

可见, 在转折点 $z_t$ 的下部邻域, 波场随 $z'$ 变化振荡; 而在转折点 $z_t$ 的上部邻域, 波场随 $z'$ 指数衰减! 下面用渐近匹配方法决定诸式中的待定系数.

(1) 区域 A 与区域 B 的匹配: 用内部变量 $z'$ 表示区域 A (见图 6.4.4) 的外部解, 把 $z=z_t+f^{-1/3}(z_t)k_0^{-2/3}z'$ 代入式 (6.4.43a) 得到

$$\psi^{(o)}\approx\frac{k_0^{1/6}}{\sqrt[4]{f^{-1/3}(z_t)z'f[z_t+f^{-1/3}(z_t)k_0^{-2/3}z']}}$$

$$\times\left\{A_+\exp\left[\mathrm{i}k_0\int_{z_0}^{z_t+f^{-1/3}(z_t)k_0^{-2/3}z'}\sqrt{(\xi-z_t)f(\xi)}\mathrm{d}\xi\right]\right.$$

$$+A_- \exp\left[-\mathrm{i}k_0\int_{z_0}^{z_t+f^{-1/3}(z_t)k_0^{-2/3}z'}\sqrt{(\xi-z_t)f(\xi)}\mathrm{d}\xi\right]\Bigg\} \quad (6.4.45a)$$

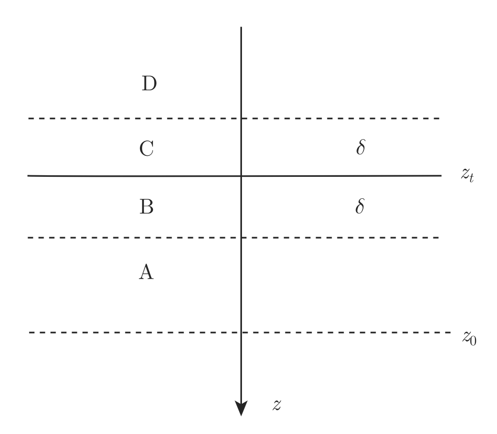



图 6.4.4　转折点 $z_t$ 附近的 4 个区域：A 和 D 属于外部区域；B 和 C 属于内部区域

取近似展开：$k_0\to\infty$(同时保持 $z'$ 不变), 注意到

$$\begin{aligned}&\int_{z_0}^{z_t+f^{-1/3}(z_t)k_0^{-2/3}z'}\sqrt{(\xi-z_t)f(\xi)}\mathrm{d}\xi\\&=\beta(z_t)+\int_{z_t}^{z_t+f^{-1/3}(z_t)k_0^{-2/3}z'}\sqrt{(\xi-z_t)f(\xi)}\mathrm{d}\xi\\&\approx\beta(z_t)+\sqrt{f(z_t)}\int_{z_t}^{f^{-1/3}(z_t)k_0^{-2/3}z'+z_t}\sqrt{(\xi-z_t)}\mathrm{d}\xi\\&=\beta(z_t)+\frac{2}{3}k_0^{-1}z'^{3/2}\end{aligned} \quad (6.4.45b)$$

其中

$$\beta(z_t)\equiv\int_{z_0}^{z_t}\sqrt{(\xi-z_t)f(\xi)}\mathrm{d}\xi=\int_{z_0}^{z_t}\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi \quad (6.4.45c)$$

式 (6.4.45b) 代入式 (6.4.45a) 得到

$$\begin{aligned}[\psi^{(o)}]^{(i)}\approx\frac{k_0^{1/6}}{f^{1/6}(z_t)\sqrt[4]{z'}}&\left\{A_+\exp\left[\mathrm{i}k_0\beta(z_t)+\mathrm{i}\frac{2}{3}z'^{3/2}\right]\right.\\&\left.+A_-\exp\left[-\mathrm{i}k_0\beta(z_t)-\mathrm{i}\frac{2}{3}z'^{3/2}\right]\right\}\end{aligned} \quad (6.4.45d)$$

另一方面, 用外变量 $z$ 表示区域 B 的内部解, 把 $z=z_t+f^{-1/3}(z_t)k_0^{-2/3}z'$ 代

入式 (6.4.44c)

$$\begin{aligned}\psi^{(i)}=&C_D\frac{\sqrt{(z-z_t)f^{1/3}(z_t)k_0^{2/3}}}{3}\left\{J_{-1/3}\left[\frac{2}{3}\sqrt{f(z_t)}k_0(z-z_t)^{3/2}\right]\right.\\&\left.+J_{1/3}\left[\frac{2}{3}\sqrt{f(z_t)}k_0(z-z_t)^{3/2}\right]\right\}\approx\frac{C_D}{\sqrt{3\pi}}f^{-1/12}(z_t)k_0^{-1/6}(z-z_t)^{-1/4}\\&\times\left\{\cos\left[\frac{2}{3}\sqrt{f(z_t)}k_0(z-z_t)^{3/2}-\frac{\pi}{12}\right]\right.\\&\left.+\cos\left[\frac{2}{3}\sqrt{f(z_t)}k_0(z-z_t)^{3/2}-\frac{5\pi}{12}\right]\right\}\end{aligned}\tag{6.4.46a}$$

回到用内部变量表示, 得到

$$[\psi^{(i)}]^{(o)}\approx\frac{C_D}{\sqrt{3\pi}}z'^{-1/4}\left[\cos\left(\frac{2}{3}z'^{3/2}-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{2}{3}z'^{3/2}-\frac{5\pi}{12}\right)\right]\tag{6.4.46b}$$

由区域 A 和 B 之间匹配条件 $[\psi^{(i)}]^{(o)}=[\psi^{(o)}]^{(i)}$ 得到方程

$$\begin{aligned}&\frac{k_0^{1/6}}{f^{1/6}(z_t)}\left\{A_+\exp\left[\mathrm{i}k_0\beta(z_t)+\mathrm{i}\frac{2}{3}z'^{3/2}\right]+A_-\exp\left[-\mathrm{i}k_0\beta(z_t)-\mathrm{i}\frac{2}{3}z'^{3/2}\right]\right\}\\&\qquad=\frac{C_D}{\sqrt{3\pi}}\left[\cos\left(\frac{2}{3}z'^{3/2}-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{2}{3}z'^{3/2}-\frac{5\pi}{12}\right)\right]\end{aligned}\tag{6.4.46c}$$

(2) 区域 C 和区域 D 的匹配：用外变量 $z$ 表示区域 C 的内部解, 得到展开关系

$$[\psi^{(i)}]^{(o)}\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi}}C_U|z'|^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}|z'|^{3/2}\right)\tag{6.4.47a}$$

其中 $|z'|=(z_t-z)f^{1/3}(z_t)k_0^{2/3}$.

另一方面, 区域 D 在转折点 $z_t$ 邻域的上部, 即 $z<z_t-\delta$ 区域, 取解为式 (6.4.43b), 因当 $z\to-\infty$, 式 (6.4.43b) 的第一项发散, 故取 $B_+\equiv 0$. 然后用内变量 $z'$ 表示区域 D 的外部解, 即把 $z=z_t-f^{-1/3}(z_t)k_0^{-2/3}|z'|$ 代入式 (6.4.43b), 并且作近似展开 $k_0\to\infty$ 得到

$$\begin{aligned}[\psi^{(o)}]^{(i)}\approx&\exp\left[k_0\sqrt{f(z_t)}\int_{z_t}^{z_t-f^{-1/3}(z_t)k_0^{-2/3}|z'|}\sqrt{(z_t-\xi)}\mathrm{d}\xi\right]\\&\times\frac{B_-}{\sqrt[4]{f^{2/3}(z_t)k_0^{-2/3}|z'|}}\approx\frac{k_0^{1/6}}{f^{1/6}(z_t)}\frac{B_-}{\sqrt[4]{|z'|}}\exp\left(-\frac{2}{3}z'^{3/2}\right)\end{aligned}\tag{6.4.47b}$$

由区域 C 和 D 之间匹配条件 $[\psi^{(i)}]^{(o)} = [\psi^{(o)}]^{(i)}$ 得到方程

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} C_U \exp\left(-\frac{2}{3} z'^{3/2}\right) = \frac{k_0^{1/6}}{f^{1/6}(z_t)} B_- \exp\left(-\frac{2}{3} z'^{3/2}\right) \tag{6.4.47c}$$

(3) 区域 B 和区域 C 的连接条件, 即要求区域 B 的解和区域 C 的解在 $z = z_t(z' = 0)$ 处相等, 于是由式 (6.4.44c) 和 (6.4.44d) 得到

$$\frac{1}{2} C_U = C_D \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right] \tag{6.4.48a}$$

方程 (6.4.46c), (6.4.47c) 和 (6.4.48a) 就是决定诸系数的匹配方程. 由于方程 (6.4.46c) 和 (6.4.47c) 对任意的 $z'$ 都成立, 因此

$$\frac{k_0^{1/6} A_+}{f^{1/6}(z_t)} \exp[\mathrm{i} k_0 \beta(z_t)] = \frac{C_D}{2\sqrt{3\pi}} \left[\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}\right)\right] \tag{6.4.48b}$$

$$\frac{k_0^{1/6} A_-}{f^{1/6}(z_t)} \exp[-\mathrm{i} k_0 \beta(z_t)] = \frac{C_D}{2\sqrt{3\pi}} \left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{12}\right) + \exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}\right)\right] \tag{6.4.48c}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} C_U = -\frac{2}{3} \frac{k_0^{1/6}}{f^{1/6}(z_t)} B_- \tag{6.4.48d}$$

从式 (6.4.48a)–(6.4.48d), 不难求出反射波和透射波的振幅 (用入射波振幅 $A_-$ 表示! 注意: 当时间项取 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 时, 式 (6.4.43a) 中第二项是向 $-z$ 方向传播的波为入射波)

$$A_+ = -\mathrm{i} \exp[-2\mathrm{i} k_0 \beta(z_t)] A_- \tag{6.4.49a}$$

$$B_- = \mathrm{i} \frac{\sqrt{2} e^{\mathrm{i}\pi/4} \exp[-\mathrm{i} k_0 \beta(z_t)]}{f^{1/6}(z_t)} A_- \tag{6.4.49b}$$

$$C_U = -\mathrm{i} \frac{2\sqrt{2\pi} k_0^{1/6} e^{\mathrm{i}\pi/4} \exp[-\mathrm{i} k_0 \beta(z_t)]}{f^{1/6}(z_t)} A_- \tag{6.4.49c}$$

$$C_D \approx -\mathrm{i} \frac{\sqrt{\pi} k_0^{1/6} e^{\mathrm{i}\pi/4} \exp[-\mathrm{i} k_0 \beta(z_t)]}{f^{1/6}(z_t)} A_- \tag{6.4.49d}$$

由式 (6.4.49a) 可知: 反射波和入射波振幅的幅值相同 $|A_-| = |A_+|$, 代入式 (6.4.43a) 得到

$$\psi^{(o)}(k_x, k_y, z) \approx \frac{A_- \exp[-\mathrm{i} k_0 \beta(z_t)]}{\sqrt[4]{q(z)}} \times \{\exp[-\mathrm{i} k_0 \Theta_+(z)] - \mathrm{i} \exp[\mathrm{i} k_0 \Theta_+(z)]\} \tag{6.4.50a}$$

其中 $\Theta_+(z) \equiv \int_{z_t}^{z} \sqrt{q(\xi)} \mathrm{d}\xi$. 注意到相位因子 $\exp[-\mathrm{i} k_0 \beta(z_t)]$ 可归入 $A_-$, 于是在

$z > z_t + \delta$ 区域场可表示为

$$\psi(k_x, k_y, z) \approx \frac{A_-}{\sqrt[4]{q(z)}} \{\exp[-\mathrm{i}k_0 \varTheta_+(z)] \ -\mathrm{i}\exp[\mathrm{i}k_0 \varTheta_+(z)]\} \tag{6.4.50b}$$

值得一提的是：当不需要仔细考虑转折点 $z_t$ 邻域的声场时，可以用上式近似 $z \geqslant z_t$ 区域的场，此时把转折点当作一个反射面！

当转折点 $z_t$ 位于下部，如图 6.4.5，即 $z_0 < z_t$，通过类似的过程可以得到

$$\psi(k_x, k_y, z) \approx \frac{A_+}{\sqrt[4]{q(z)}} \{\exp[-\mathrm{i}k_0 \varTheta_-(z)] \ -\mathrm{i}\exp[\mathrm{i}k_0 \varTheta_-(z)]\} \tag{6.4.50c}$$

其中 $\varTheta_-(z) \equiv \int_z^{z_t} \sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi$. 注意：此时入射波方向为 $+z$ 方向，故式 (6.4.43a) 中第一项为入射波.

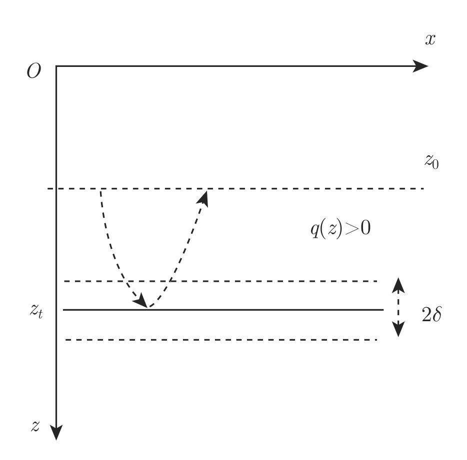



图 6.4.5 转折点 $z_t$ 在入射面下部

**存在二个转折点的情况** 设 $q(z)$ 随 $z$ 的变化存在一个极大，如图 6.4.6，在点 $z = z_U$ 和 $z = z_D$，$q(z_U) = q(z_D) = 0$，因此 $z = z_U$ 和 $z_D$ 是二个转折点. 根据以上讨论，在区域 $z_U < z < z_D$，$q(z) > 0$，波动方程的解由式 (6.4.43a) 表示；而在区域 $z < z_U$ 或者 $z > z_D$，波动方程的解由式 (6.4.43b) 表示，随 $z$ 远离转折点而指数衰减. 波传播图象为：当波从 $z_0$ 点出发向下传播，遇到转折点 (实际为面)$z = z_D$，它被反射回来向上传播；当反射波遇到转折点 (实际为面)$z = z_U$ 时，又被反射回来向下传播. 因此，相当于在 $z = z_U$ 和 $z = z_D$ 存在强反射，在区域 $z_U < z < z_D$ 形成波导！

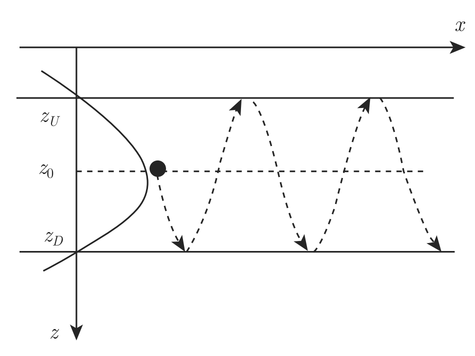



图 6.4.6　存在二个转折点的情况

**转折点波导中波的激发**　设点源位于二个转折点 $z=z_U$ 和 $z=z_D$ 之间的 $z$ 轴上的 $z=z_0$ 处, 在直角坐标系中波动方程为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varPhi+k_0^2n^2(z)\Phi=-\delta(x-0)\delta(y-0)\delta(z-z_0) \tag{6.4.51a}$$

对 $\varPhi$ 的 $x$ 和 $y$ 变量作 Fourier 变换

$$\psi(x,y,z)=\iint\psi(k_x,k_y,z)\exp[\mathrm{i}(k_xx+k_yy)]\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{6.4.51b}$$

代入方程 (6.4.51a) 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}z^2}+\left[k_0^2n^2(z)-(k_x^2+k_y^2)\right]\psi=-\frac{1}{(2\pi)^2}\delta(z-z_0) \tag{6.4.51c}$$

分二个区域讨论:

(1) $z_U<z<z_0$, 在 WKB 近似下, 取解为

$$\psi(k_x,k_y,z)\approx A_1\psi_1(k_x,k_y,z) \tag{6.4.52a}$$

其中 $\psi_1(k_x,k_y,z)$ 由式 (6.4.50b) 得到, 即

$$\psi_1(k_x,k_y,z)\equiv\frac{1}{\sqrt[4]{q(z)}}\{\exp[-\mathrm{i}k_0\Theta_U(z)]\ -\mathrm{i}\exp[\mathrm{i}k_0\varTheta_U(z)]\} \tag{6.4.52b}$$

其中 $\varTheta_U(z)\equiv\displaystyle\int_{z_U}^{z}\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi$, $q(z)\equiv n^2(z)-(k_x^2+k_y^2)/k_0^2=n^2(z)-k_\rho^2/k_0^2$ 和 $k_\rho^2\equiv k_x^2+k_y^2$. 必须注意的是: 转折点 $z_U$ 和 $z_D$ 满足的方程 $q(z)=0$, 即 $n^2(z_{U,D})=k_\rho^2/k_0^2$ 与 $k_\rho$ 有关, 不同的 $k_\rho$, 具有不同的转折点.

(2) $z_D>z>z_0$, 在 WKB 近似下, 取解为

$$\psi(k_x,k_y,z)\approx A_2\psi_2(k_x,k_y,z) \tag{6.4.52c}$$

其中 $\psi_2(k_x,k_y,z)$ 由式 (6.4.50c) 得到, 即

$$\psi_2(k_x,k_y,z)\equiv\frac{1}{\sqrt[4]{q(z)}}\{\exp[-\mathrm{i}k_0\Theta_D(z)]-\mathrm{i}\exp[\mathrm{i}k_0\Theta_D(z)]\} \tag{6.4.52d}$$

其中 $\Theta_D(z)\equiv\int_z^{z_D}\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi$. 值得说明的是：式 (6.4.52b) 和 (6.4.52d) 已经考虑了转折点 $z_U$ 和 $z_D$ 的反射影响!

(3) 系数 $A_{1,2}$ 由点 $z_0$ 处的连接条件决定

$$\psi(k_x,k_y,z)|_{z=z_0-0}=\psi(k_x,k_y,z)|_{z=z_0+0} \tag{6.4.53a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0-0}-\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0+0}=-\frac{1}{(2\pi)^2} \tag{6.4.53b}$$

把 (6.4.52a) 和 (6.4.52c) 代入上二式得到

$$\begin{aligned}&A_1\psi_1(k_x,k_y,z_0)-A_2\psi_2(k_x,k_y,z_0)=0\\&A_1\psi_1'(k_x,k_y,z_0)-A_2\psi_2'(k_x,k_y,z_0)=-\frac{1}{(2\pi)^2}\end{aligned} \tag{6.4.53c}$$

容易求得

$$A_1=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\psi_2(k_x,k_y,z_0)}{W};\ A_2=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\psi_1(k_x,k_y,z_0)}{W} \tag{6.4.53d}$$

其中

$$W(\psi_1,\psi_2)\equiv\psi_1(k_x,k_y,z_0)\psi_2'(k_x,k_y,z_0)-\psi_2(k_x,k_y,z_0)\psi_1'(k_x,k_y,z_0) \tag{6.4.54a}$$

是 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 的 Wronskian 行列式. 因此我们得到

$$\begin{aligned}&\psi(k_x,k_y,z)\approx\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\psi_2(k_x,k_y,z_0)\psi_1(k_x,k_y,z)}{W(\psi_1,\psi_2)},\ (z_U<z<z_0)\\&\psi(k_x,k_y,z)\approx\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\psi_1(k_x,k_y,z_0)\psi_2(k_x,k_y,z)}{W(\psi_1,\psi_2)},\ (z_0<z<z_D)\end{aligned} \tag{6.4.54b}$$

上式可以统一写成

$$\psi(k_x,k_y,z)\approx\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\psi_1(k_x,k_y,z_<)\psi_2(k_x,k_y,z_>)}{W(\psi_1,\psi_2)} \tag{6.4.54c}$$

其中 $z_<\equiv\min(z,z_0)$ 和 $z_>\equiv\max(z,z_0)$. 上式代入式 (6.4.51b) 得到

$$\begin{aligned}\psi(x,y,z)=&\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_1(k_x,k_y,z_<)\psi_2(k_x,k_y,z_>)}{W(\psi_1,\psi_2)}\\&\times\exp\left[\mathrm{i}(k_xx+k_yy)\right]\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\end{aligned} \tag{6.4.55a}$$

上式为波场的积分表示. 由于波场在 $xOy$ 平面内是各向同性的, 上式中的被积函数只与波数有关, 即

$$\frac{\psi_1(k_x,k_y,z_<)\psi_2(k_x,k_y,z_>)}{W(\psi_1,\psi_2)}=\frac{\psi_1(k_\rho,z_<)\psi_2(k_\rho,z_>)}{W(k_\rho,z_0)} \tag{6.4.55b}$$

在极坐标下, 式 (6.4.55a) 简化成

$$\begin{aligned}\psi(\rho,z)=&\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty}\frac{\psi_1(k_\rho,z_<)\psi_2(k_\rho,z_>)}{W(k_\rho,z_0)}k_\rho\mathrm{d}k_\rho\\&\times\int_0^{2\pi}\exp\left[\mathrm{i}(k_\rho\rho\cos(\phi-\varphi)\right]\mathrm{d}\phi\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\psi_1(k_\rho,z_<)\psi_2(k_\rho,z_>)}{W(k_\rho,z_0)}k_\rho J_0(k_\rho\rho)\mathrm{d}k_\rho\end{aligned} \tag{6.4.55c}$$

其中利用了 Bessel 函数的积分关系. 上式用 Hankel 函数表示成行波的形式

$$\psi(\rho,z)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_1(k_\rho,z_<)\psi_2(k_\rho,z_>)}{W(k_\rho,z_0)}k_\rho H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{d}k_\rho \tag{6.4.55d}$$

上式必须由数值计算才能完成, 不进一步讨论. 顺便指出, 由式 (6.4.52b) 和 (6.4.52d) 得到

$$W(\psi_1,\psi_2)=4\mathrm{i}k_0\cos\left[k_0\int_{z_U}^{z_D}\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi\right] \tag{6.4.56a}$$

二个转折点 $z=z_U$ 和 $z=z_D$ 形成波导的简正波数满足的方程为 $W(\psi_1,\psi_2)=0$, 即

$$k_0\int_{z_U}^{z_D}\sqrt{q(\xi)}\mathrm{d}\xi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ (n=0,1,2,...) \tag{6.4.56b}$$

但必须注意, 转折点 $z_U$ 和 $z_D$ 仍然是 $k_\rho$ 的函数且满足方程 $k_0^2n^2(z_{U,D})=k_\rho^2$.

## 6.5 射线近似 (几何光学) 方法

当声波或电磁波的折射率 $n$ 与横向坐标 $(x,y)$ 也有关, 即 $n(\boldsymbol{r})=n(x,y,z)$, 针对一维情况的 WKB 近似已不适用. 但其基本思路仍然是正确的, 即当波的频率足够高, 空间波场的变化主要归结于相位的变化, 而振幅随空间是缓变的, 可以作大波数渐近展开近似. 这种近似方法称为**射线近似**, 光学 (声学) 中称为几何光学 (声学) 近似.

### 6.5.1 程函方程和输运方程

为了方便, 写出非均匀介质中的频域波动方程

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},\omega)+k_0^2n^2(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},\omega)=0 \tag{6.5.1a}$$

其中 $k_0=\omega/c_0$, $\omega$ 为频率, $c_0$ 为某一个参考点的波速, 折射率 $n(\boldsymbol{r})=c_0/c(\boldsymbol{r})$, $c(\boldsymbol{r})$ 为空间分布的波速. 设解的形式为

$$\psi(\boldsymbol{r},\omega)=A(\boldsymbol{r},\omega)\exp[\mathrm{i}k_0S(\boldsymbol{r},\omega)] \tag{6.5.1b}$$

其中 $A(\boldsymbol{r},\omega)$ 是空间 $\boldsymbol{r}$ 的缓变函数. 方程 (6.5.1b) 代入 (6.5.1a), 并且注意到运算关系

$$\begin{aligned}\nabla\psi\ &=\exp[\mathrm{i}k_0S(\boldsymbol{r},\omega)]\nabla A+\mathrm{i}k_0A\nabla S\exp[\mathrm{i}k_0S(\boldsymbol{r},\omega)]\\ \nabla^2\psi&=\nabla\cdot(\nabla\psi)=\exp[\mathrm{i}k_0S(\boldsymbol{r},\omega)]\nabla^2A\\ &\quad+2\mathrm{i}k_0\exp[\mathrm{i}k_0S(\boldsymbol{r},\omega)]\nabla S\cdot\nabla A+\mathrm{i}k_0A\nabla^2S\exp[\mathrm{i}k_0S(\boldsymbol{r},\omega)]\\ &\quad+(\mathrm{i}k_0)^2A(\nabla S)^2\exp[\mathrm{i}k_0S(\boldsymbol{r},\omega)]\end{aligned} \tag{6.5.1c}$$

得到

$$\nabla^2A+2\mathrm{i}k_0\nabla S\cdot\nabla A+\mathrm{i}k_0A\nabla^2S+(\mathrm{i}k_0)^2A(\nabla S)^2+k_0^2n(\boldsymbol{r})A=0 \tag{6.5.2a}$$

注意: 上式仍然是严格的. 下面作高频近似: $k_0\to\infty$, 或者 $1/k_0\to 0$, 于是作展开

$$A(\boldsymbol{r},\omega)=A_0(\boldsymbol{r},\omega)+\frac{1}{\mathrm{i}k_0}A_1(\boldsymbol{r},\omega)+\left(\frac{1}{\mathrm{i}k_0}\right)^2A_2(\boldsymbol{r},\omega)+\cdots=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{i}k_0}\right)^jA_j(\boldsymbol{r},\omega) \tag{6.5.2b}$$

代入方程 (6.5.2a), 并令 $1/k_0$ 的同此幂系数为零得到

$$(\nabla S)^2=n^2(\boldsymbol{r}) \tag{6.5.3a}$$

$$2\nabla S\cdot\nabla A_0+A_0\nabla^2S=0 \tag{6.5.3b}$$

$$\begin{gathered}2\nabla S\cdot\nabla A_1+A_1\nabla^2S=-\nabla^2A_0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered} \tag{6.5.3c}$$

注意: 方程 (6.5.3a), (6.5.3b) 和 (6.5.3c) 分别由 $(1/k_0)^0$, $(1/k_0)^1$ 和 $(1/k_0)^2$ 的系数为零得到. 因此方程 (6.5.1b) 中函数 $\psi(\boldsymbol{r},\omega)$ 的相位 $S(\boldsymbol{r},\omega)$ 变化是主要的, 而振幅 $A(\boldsymbol{r},\omega)$ 的变化是次要的! 方程 (6.5.3a) 称为**程函方程** (eikonal equation), 而方程 (6.5.3b) 和 (6.5.3c) 分别称为 0 级和 1 级**输运方程** (transfer equation).

在讨论方程 (6.5.3a) 前, 首先考虑简单情况, 即对均匀介质 $n(\boldsymbol{r})=1$ 中的平面波、球面波和柱面波进行分析.

**平面波**　设平面波的波矢量为 $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$, 另一方面, 显然

$$k_0 S(\boldsymbol{r},\omega)=k_x x+k_y y+k_z z \tag{6.5.4a}$$

是方程 $(\nabla S)^2=1$ 的一个简单解, 其中 $k_0^2(\nabla S)^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=k_0^2$, 而

$$k_0\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)=(k_x,k_y,k_z) \tag{6.5.4b}$$

可见 $k_0S(\boldsymbol{r},\omega)=$ 常数是等相位平面, 而矢量 $k_0\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)$ 就是等相位平面的法向矢量, 即波传播的方向;

**球面波**　设球面波的波矢量为 $\boldsymbol{k}=k_0\boldsymbol{e}_r$, 方程 $(\nabla S)^2=1$ 的一个简单解是

$$k_0 S(\boldsymbol{r},\omega)=k_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k_0 r \tag{6.5.5a}$$

显然 $k_0S(\boldsymbol{r},\omega)=$ 常数是等相位球面, 而

$$k_0\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)=k_0\left(\frac{\partial S}{\partial x},\frac{\partial S}{\partial y},\frac{\partial S}{\partial z}\right)=\frac{k_0}{r}(x,y,z)=k_0\boldsymbol{e}_r \tag{6.5.5b}$$

是球心在原点的球面的法向矢量, 即球面波传播的方向;

**柱面波**　设柱面波传播的波矢量为 $\boldsymbol{k}=k_0\boldsymbol{e}_\rho$, 而方程 $(\nabla S)^2=1$ 另一个简单解是

$$k_0 S(\boldsymbol{r},\omega)=k_0\sqrt{x^2+y^2}=k_0\rho \tag{6.5.5c}$$

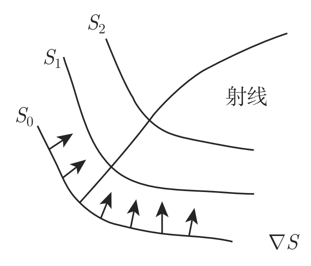
$k_0S(\boldsymbol{r},\omega)=$ 常数是等相位柱面, 与球面波类似, 显然

$$k_0\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)=k_0\left(\frac{\partial S}{\partial x},\frac{\partial S}{\partial y},\frac{\partial S}{\partial z}\right)=\frac{k_0}{\rho}(x,y,0)=k_0\boldsymbol{e}_\rho \tag{6.5.5d}$$

是柱心在原点的柱面的法向矢量, 即柱面波传播的方向!

从以上的讨论可见, $k_0S(\boldsymbol{r},\omega)=$ 常数的曲面就是等相位面, 而 $\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)$ 是等相位面的法向矢量, 如图 6.5.1(a). 一般等相位面法向矢量是空间坐标的函数, 当空间坐标变化时, 法向矢量是某一条空间曲线各点的切线, 这条空间曲线就是**射线**(光线或声线). 设射线的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, 其中 $s$ 为从某点起曲线的长度. 设曲线切线的单位矢量 (即射线的方向, 也就是等相位面的法向) 为 $\boldsymbol{s}$, 如图 6.5.1(b), 那么由方程 (6.5.3a) 得到

$$\nabla S=n(\boldsymbol{r})\boldsymbol{s}=n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{6.5.6a}$$



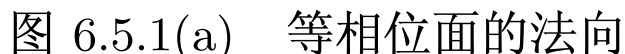


图 6.5.1(a) 等相位面的法向

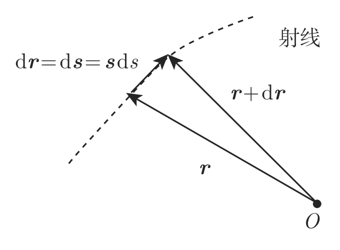



图 6.5.1(b) 射线的切向

程函方程 (6.5.3a) 是一阶偏微分方程, 我们把它用射线方程来表示. 对方程 (6.5.6a) 求导得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right] \tag{6.5.6b}$$

注意到微分关系

$$\mathrm{d}[\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)]=(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla)[\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)] \tag{6.5.6c}$$

方程 (6.5.6b) 变成

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\nabla\right)[\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right] \tag{6.5.7a}$$

再利用方程 (6.5.6a) 得到

$$\left[\frac{1}{n(\boldsymbol{r})}\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)\cdot\nabla\right][\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right] \tag{6.5.7b}$$

上式左边

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{1}{2n(\boldsymbol{r})}\nabla[\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)\cdot\nabla S(\boldsymbol{r},\omega)]\\&=\frac{1}{2n(\boldsymbol{r})}\nabla[n^2(\boldsymbol{r})]=\nabla n(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{6.5.8a}$$

因此得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right]=\nabla n(\boldsymbol{r}) \tag{6.5.8b}$$

上式就是我们需要的**射线方程**! 一旦给出折射率的分布, 就可以求出射线的方程. 例如对均匀介质 $n(\boldsymbol{r})=1$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{C}_1 s+\boldsymbol{C}_2$, 故在均匀介质中射线为直线, 其中常矢量 $\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{C}_2$ 由发出射线的初始位置 (即源位置) 和方向决定. 与方程 (6.5.3a) 为一阶偏微分方程相比, 射线方程 (6.5.8b) 是常微分方程, 更容易求解.

**时域情况** 注意到程函方程 (6.5.3a) 中, 如果 $n(\boldsymbol{r})$ 与频率无关 (称为非色散介质), 那么 $S(\boldsymbol{r},\omega)$ 也与频率无关, 即 $S(\boldsymbol{r},\omega)=S(\boldsymbol{r})$. 二边对方程 (6.5.1b) 求 Fourier

变换得到

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r},t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(\boldsymbol{r},\omega)\exp\{-\mathrm{i}\omega[t-S(\boldsymbol{r})/c_0]\}\,\mathrm{d}\omega \\ &= A[\boldsymbol{r},t-S(\boldsymbol{r})/c_0] = A[\boldsymbol{r},t-\tau(\boldsymbol{r})]\end{aligned} \tag{6.5.9a}$$

其中为了方便, 令 $\tau(\boldsymbol{r}) \equiv S(\boldsymbol{r})/c_0$. 把上式代入时域波动方程

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c^2(\boldsymbol{r})}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{6.5.9b}$$

并且考虑到微分关系

$$\begin{aligned}\nabla\psi(\boldsymbol{r},t) &= \nabla_{\boldsymbol{r}}A(\boldsymbol{r},\xi) - \frac{\partial A(\boldsymbol{r},\xi)}{\partial\xi}\nabla\tau(\boldsymbol{r}) \\ \nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) &= \nabla_{\boldsymbol{r}}^2A(\boldsymbol{r},\xi) - 2\nabla_{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\partial A(\boldsymbol{r},\xi)}{\partial\xi}\right]\cdot\nabla\tau(\boldsymbol{r}) \\ &\quad + \frac{\partial^2A(\boldsymbol{r},\xi)}{\partial\xi^2}\nabla\tau(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\tau(\boldsymbol{r}) - \frac{\partial A(\boldsymbol{r},\xi)}{\partial\xi}\nabla^2\tau(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{6.5.9c}$$

其中 $\xi \equiv t-\tau(\boldsymbol{r})$, $\nabla_{\boldsymbol{r}}$ 表示仅对 $A(\boldsymbol{r},\xi)$ 的第一个变量 $\boldsymbol{r}$ 作用, 得到

$$\begin{aligned}&\nabla_{\boldsymbol{r}}^2A(\boldsymbol{r},\xi) - 2\nabla_{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\partial A(\boldsymbol{r},\xi)}{\partial\xi}\right]\cdot\nabla\tau(\boldsymbol{r}) - \frac{\partial A(\boldsymbol{r},\xi)}{\partial\xi}\nabla^2\tau(\boldsymbol{r}) \\ &\quad + \frac{\partial^2A(\boldsymbol{r},\xi)}{\partial\xi^2}\left[\nabla\tau(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\tau(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{c^2(\boldsymbol{r})}\right] = 0\end{aligned} \tag{6.5.9d}$$

对缓变介质, $A(\boldsymbol{r},\xi)$ 随第一个变量 $\boldsymbol{r}$ 的变化缓慢, 而随第二个变量 $\xi$ 快速变化. 因此上式中第二行 (是快变量的二阶导数) 远大于一行, 是零级量, 令其为零得到

$$\nabla\tau(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\tau(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c^2(\boldsymbol{r})} \tag{6.5.10a}$$

上式与方程 (6.5.3a) 一致；方程 (6.5.9d) 中第一项显然是二级小量, 在射线近似中忽略不计, 第二和三项为快变量的一阶导数, 于是

$$2\frac{\partial\nabla_{\boldsymbol{r}}A(\boldsymbol{r},\xi)}{\partial\xi}\cdot\nabla\tau(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial A(\boldsymbol{r},\xi)}{\partial\xi}\nabla^2\tau(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{6.5.10b}$$

上式对 $\xi$ 积分一次得到

$$2\nabla\tau(\boldsymbol{r})\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}}A(\boldsymbol{r},\xi) + A(\boldsymbol{r},\xi)\nabla^2\tau(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{6.5.10c}$$

上式与方程 (6.5.3b) 一致. 可见, 只要介质不色散, 即波速与频率无关, 那么频域或时域讨论都能得到相同的程函方程和输运方程.

**Fermat 原理** 射线方程 (6.5.8b) 也可以从 Fermat 原理直接导出. 设射线从 $A$ 点传播到 $B$ 点 (如图 6.5.2), 显然射线传播时间为泛函

$$T_{AB}=\int_{A}^{B}\frac{\mathrm{d}s}{c(\boldsymbol{r})} \tag{6.5.11a}$$

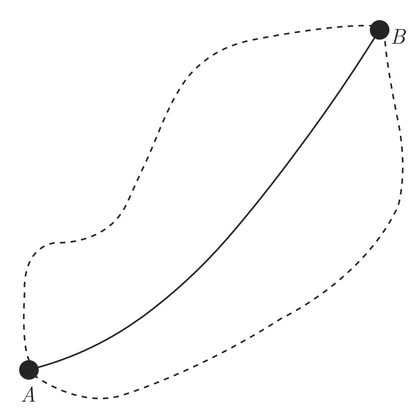


图 6.5.2 射线从 $A$ 点传播到 $B$

Fermat 原理告诉我们, 在射线所有的路径中, 真实的路径使 $T_{AB}$ 取极小: $\delta T_{AB}=0$. 设路径曲线以参数 $t$(一般取为时间变量) 为变量, 即 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, 以参数 $t$ 为积分变量, 则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\mathrm{d}t \tag{6.5.11b}$$

那么 Fermat 原理可以写成 Lagrange 形式

$$\int_{A}^{B}L(x,y,z,x',y',z')\mathrm{d}t=\min \tag{6.5.11c}$$

其中

$$L(x,y,z,x',y',z')\equiv n(x,y,z)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} \tag{6.5.11d}$$

泛函取极值的必要条件为 Euler 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial x'}-\frac{\partial L}{\partial x}=0;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial y'}-\frac{\partial L}{\partial y}=0;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial z'}-\frac{\partial L}{\partial z}=0 \tag{6.5.12a}$$

把式 (6.5.11d) 代入上式得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{nx'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}-\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\frac{\partial n}{\partial x}=0 \tag{6.5.12b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{ny'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}-\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\frac{\partial n}{\partial y}=0 \tag{6.5.12c}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{nz'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}-\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\frac{\partial n}{\partial z}=0 \tag{6.5.12d}$$

再利用方程 (6.5.11b) 得到

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\partial n}{\partial x};\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\partial n}{\partial y}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\partial n}{\partial z}\end{gathered} \tag{6.5.12e}$$

把射线矢量表示为分量形式, 即 $\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{e}_x+y(t)\boldsymbol{e}_y+z(t)\boldsymbol{e}_z$, 则上式恰好是矢量方程 (6.5.8b) 的三个分量方程.

**例 6.5.1**　量子力学的经典近似. 考虑 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+U(\boldsymbol{r})\psi \tag{6.5.13a}$$

当 $U(\boldsymbol{r})=0$ 时, 动量为 $\boldsymbol{p}$ 的自由粒子的平面波解为

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\psi_0\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{\hbar}-Et\right)\right] \tag{6.5.13b}$$

其中 $E=p^2/2m$. 当 $U(\boldsymbol{r})\neq 0$ 且 $\hbar\to 0$ 时, 令解的形式为

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=A(\boldsymbol{r},t)\exp\left[\mathrm{i}\frac{S(\boldsymbol{r},t)}{\hbar}\right] \tag{6.5.13c}$$

其中 $A(\boldsymbol{r},t)$ 和 $S(\boldsymbol{r},t)$ 为实函数. 上式代入方程 (6.5.13a) 得到

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 A+\frac{1}{2m}A(\nabla S)^2-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(2\nabla S\cdot\nabla A+A\nabla^2 S)+UA=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial A}{\partial t}-A\frac{\partial S}{\partial t}$$

实部和虚部分开得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t}&=-\frac{1}{2m}(2\nabla S\cdot\nabla A+A\nabla^2 S)\\ \frac{\partial S}{\partial t}&=-\left[\frac{1}{2m}(\nabla S)^2+U-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 A}{A}\right]\end{aligned} \tag{6.5.13d}$$

注意: 以上二个方程仍然严格成立! 注意到微分关系

$$\nabla\cdot(A^2\nabla S)=2A\nabla A\cdot\nabla S+A^2\nabla^2 S \tag{6.5.14a}$$

方程 (6.5.13d) 的第一式乘以 $2A$ 得到守恒定律

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{6.5.14b}$$

其中 $\rho \equiv |\psi|^2 = A^2$ 为概率密度, $\boldsymbol{j}$ 为概率流密度矢量

$$\boldsymbol{j} \equiv -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = \frac{A^2}{m}\nabla S \tag{6.5.14c}$$

取经典近似, 令 $\hbar \to 0$, 方程 (6.5.13d) 的第二式变成

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + U = 0 \tag{6.5.14d}$$

在经典近似中, 引进速度矢量 $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{j}/\rho = \nabla S/m$, 上式简化成

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}mv^2 + U = 0 \tag{6.5.14e}$$

对上式求梯度且利用 $\boldsymbol{v} = \nabla S/m$ 得到

$$m\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right) + \nabla U = 0 \tag{6.5.15a}$$

再利用微分关系

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} \tag{6.5.15b}$$

方程 (6.5.15a) 给出 Newton 第二定律的方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla U \tag{6.5.15c}$$

对定态问题, 方程 (6.5.13a) 经 $\psi(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}Et/\hbar)$ 分离时间变量, 相位函数 $S(\boldsymbol{r},t)$ 简化为 $S(\boldsymbol{r},t) = S(\boldsymbol{r}) - Et$, 故 $\partial S(\boldsymbol{r},t)/\partial t = -E$, 代入方程 (6.5.14e) 得到能量守恒关系

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - U \tag{6.5.15d}$$

### 6.5.2 射线管的能量守恒

考虑输运方程 (6.5.3b), 二边乘以 $A_0(\boldsymbol{r},\omega)$ 得到

$$\nabla\cdot[A_0^2(\boldsymbol{r},\omega)\nabla S] = 0 \tag{6.5.16a}$$

上式在波场中从 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}$ 的 “射线管” 段作体积分, 并利用 Gauss 定理

$$\int_V \nabla\cdot\left[A_0^2(\boldsymbol{r},\omega)\nabla S\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \iint_\Gamma A_0^2(\boldsymbol{r},\omega)\nabla S\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{6.5.16b}$$

这里为了区别 $n(\boldsymbol{r})$, 用 $\boldsymbol{N}$ 表示法向, $\mathrm{d}\Gamma$ 是射线管底面的面积元. 所谓射线管, 就是以 $\boldsymbol{r}_0$ 为中心, 取垂直于射线路径的小面积 $B(\boldsymbol{r}_0)$, 所有穿过 $B(\boldsymbol{r}_0)$ 的射线组成 “射线管”, 当这些射线到达 $\boldsymbol{r}$ 点时, 截面为 $B(\boldsymbol{r})$. 因此 “射线管” 段的二个底面

垂直于射线, 而侧面平行于射线, 如图 6.5.3. 在射线管段的侧面, 因为 $\nabla S\cdot\boldsymbol{N}=n(\boldsymbol{r})\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{N}\equiv 0$, 故面积分恒为零; 而在底面 (用 $\Gamma$ 表示), $\nabla S\cdot\boldsymbol{N}=n(\boldsymbol{r})\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{N}=n(\boldsymbol{r})$. 当射线管的底面 $B(\boldsymbol{r}_0)$ 和 $B(\boldsymbol{r})$ 很小时, 方程 (6.5.16b) 变成

$$B(\boldsymbol{r}_0)A_0^2(\boldsymbol{r}_0,\omega)n(\boldsymbol{r}_0)=B(\boldsymbol{r})A_0^2(\boldsymbol{r},\omega)n(\boldsymbol{r}) \tag{6.5.16c}$$

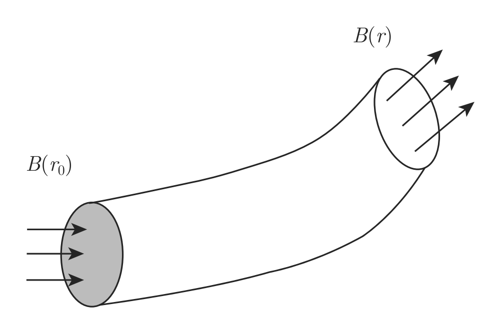



图 6.5.3　声场中的射线管段

因此我们得到

$$A_0(\boldsymbol{r},\omega)=A_0(\boldsymbol{r}_0,\omega)\sqrt{\frac{B(\boldsymbol{r}_0)n(\boldsymbol{r}_0)}{B(\boldsymbol{r})n(\boldsymbol{r})}} \tag{6.5.16d}$$

可见波振幅沿射线的变化反比于射线管截面积的平方根, 如果射线管面积收缩 (聚焦), 则振幅增加. 注意到: 物理上, $B(\boldsymbol{r})n(\boldsymbol{r})A_0^2(\boldsymbol{r},\omega)$ 表示波通过面积 $B(\boldsymbol{r})$ 的能量, 因此方程 (6.5.16c) 意味着通过射线管的能量守恒, 当然这是必须的.

**例 6.5.2**　设在均匀介质 ($n(\boldsymbol{r})=1$) 中, 由原点发出各向同性的球面波 (二维情况为柱面波), 在 $\boldsymbol{r}_0$ 处、立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 内, $B(\boldsymbol{r}_0)=r_0^2\mathrm{d}\Omega$, 而在 $\boldsymbol{r}$ 处、立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 内, $B(\boldsymbol{r})=r^2\mathrm{d}\Omega$, 代入式 (6.5.16d) 得到振幅的零级近似为

$$A_0(\boldsymbol{r},\omega)=A_0(r_0,\omega)\frac{r_0}{r} \tag{6.5.17a}$$

上式和式 (6.5.5a) 代入式 (6.5.1b)

$$\psi(\boldsymbol{r},\omega)=A_0(r_0,\omega)\frac{r_0}{r}\exp(\mathrm{i}k_0r) \tag{6.5.17b}$$

显然这是三维方程的精确解; 在二维情况, $B(\boldsymbol{r}_0)=\rho_0\mathrm{d}\varphi$ 和 $B(\boldsymbol{r})=\rho\mathrm{d}\varphi$, 故

$$\psi(\boldsymbol{r},\omega)\approx A_0(\rho_0,\omega)\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\exp(\mathrm{i}k_0\rho) \tag{6.5.17c}$$

此时上式是远场解, 在 $\rho=0$ 附近不成立!

### 6.5.3 焦散线附近的波场

一个问题是：如果射线管面积收缩 (聚焦) 到很小的区域, 甚至零 (射线相交), 即 $B(\boldsymbol{r}) \to 0$, 那么因为 $A_0(\boldsymbol{r}_0, \omega)$ 和 $B(\boldsymbol{r}_0)$ 有限, 而导致 $A_0(\boldsymbol{r}, \omega) \to \infty$, 显然这是不可能的. 事实上, 在射线相交的邻近区域, 射线近似已经不成立, 而必须用严格的波动理论 (如例 6.5.2 中的 $r = 0$ 和 $\rho = 0$ 点). 在空间波场中, 所有射线相交点的轨迹形成的曲线 (二维) 或曲面 (三维) 称为**焦散**(Caustic)**线**或者**焦散面**. 简单的焦散线 (面) 是一簇射线的包络线 (面)(例如在层状介质中, 由转折点组成的包络线为直线, 或者在二维情况下为平面). 在焦散线 (面) 的一侧, 射线不能进入的区域称为**焦散区**.

在焦散区内 (转折点也是焦散区), 射线近似不成立, 必须严格用波动方程来计算波场的分布. 考虑简单情况, 假定：①焦散线是半径为 $R$, 圆心位于原点的一段圆弧 (实际上是圆柱面)；②均匀介质, 因而射线是直线. 圆弧与每条射线相切, 切线就是射线, 如图 6.5.4. 我们从波动方程出发, 求焦散线附近 (上、下) 的场分布.

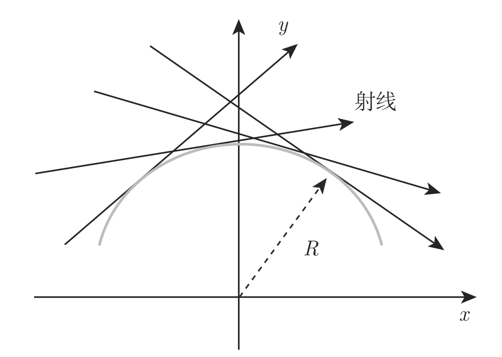



图 6.5.4 焦散线是半径为 $R$ 的圆弧线 (面)

注意到射线就是圆弧的切线, 故在焦散线 (面) 上：$k_0 \nabla S = k_0 \boldsymbol{e}_\varphi$. 由梯度算子在柱坐标下的表达式得到

$$\frac{k_0}{R} \frac{\partial S(R, \varphi)}{\partial \varphi} \boldsymbol{e}_\varphi = k_0 \boldsymbol{e}_\varphi \tag{6.5.18a}$$

于是等相位面为 $S(R, \varphi) = R\varphi$, 代入方程 (6.5.1b) 可以得到圆弧焦散线上场分布

$$\psi(R, \varphi, \omega) = A(R, \omega) \exp(\mathrm{i} k_0 R \varphi) \tag{6.5.18b}$$

因此可以设想, 在圆弧焦散线的附近 (上、下), 波场随方位角 $\varphi$ 的变化也应该具有上式的形式, 否则不可能满足物理量连续的基本条件

$$\psi(\rho, \varphi, \omega) = \psi(\rho, \omega) \exp(\mathrm{i} k_0 R \varphi) \tag{6.5.18c}$$

另一方面, 空间波场满足波动方程

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\psi(\rho,\varphi,\omega)+k_0^2\psi(\rho,\varphi,\omega)=0 \tag{6.5.18d}$$

把方程 (6.5.18c) 代入上式得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(\rho,\omega)}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\psi(\rho,\omega)}{\mathrm{d}\rho}+\left[k_0^2-\frac{(k_0R)^2}{\rho^2}\right]\psi(\rho,\omega)=0 \tag{6.5.19a}$$

可见焦散线附近的波场满足 Bessel 方程, 不同的是 Bessel 函数的阶数不是整数 $m$, 而是任意实数 $k_0R$

$$\psi(\rho,\omega)=\psi_0(\omega)J_{k_0R}(k_0\rho) \tag{6.5.19b}$$

其中 $\psi_0(\omega)$ 是常数. 这是因为对圆弧焦散线, 没有了周期性边界条件, 故 Bessel 函数的阶数不为整数. 注意到: 在焦散线附近 $\rho\sim R$, 而在高频条件下 $k_0R\gg 1$, 故上式中 Bessel 函数的变量 $(k_0\rho)$ 和阶数 $(k_0R)$ 都很大, 而且接近. 故必须求大变数、高阶数且非整数阶 Bessel 函数的展开表达式. 为此, 令 $k_0\rho=k_0R+z$, 其中 $|z|\ll 1$, 注意到

$$k_0^2-\frac{(k_0R)^2}{\rho^2}=k_0^2\left[1-\frac{1}{(1+z/k_0R)^2}\right]\approx\frac{2zk_0}{R} \tag{6.5.19c}$$

以及 $\psi''(\rho,\omega)\sim k_0^2\psi(\rho,\omega)$, 而 $\psi'(\rho,\omega)/\rho\sim k_0p(\rho,\omega)/R$, 前者远大于后者. 最后由方程 (6.5.19a) 近似得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(\eta,\omega)}{\mathrm{d}\eta^2}+\eta\psi(\eta,\omega)=0;\ \eta=\left(\frac{2}{k_0R}\right)^{1/3}z \tag{6.5.19d}$$

上式为 Airy 方程. 二个线性独立解取为 Airy 函数 $\mathrm{Ai}(\eta)$ 和 $\mathrm{Bi}(\eta)$, 它们与 Bessel 函数的关系以及详细讨论见 6.4.2 小节. 由于 $\mathrm{Bi}(\eta)\to\infty, (\eta\to-\infty)$, 故只能取 $\mathrm{Ai}(\eta)$. 因此在圆弧焦散线附近, 波场变化由 Airy 函数描叙

$$\psi(\rho,\varphi,\omega)\approx\psi_0(\omega)\mathrm{Ai}\left[\left(\frac{2}{k_0R}\right)^{1/3}k_0(\rho-R)\right]\exp(\mathrm{i}k_0R\varphi) \tag{6.5.19e}$$

当 $\rho>R$ (圆弧外, 射线中) 时, $\eta>0$, $\mathrm{Ai}(\eta)$ 为振荡函数, 即波场空间振荡；而当 $\rho<R$(圆弧内, 焦散区) 时, $\eta<0$, $\mathrm{Ai}(\eta)$ 指数衰减, 即波场指数衰减.

### 6.5.4 平面层状介质中的射线

设 $n(\boldsymbol{r})=n(z)$, 折射率梯度 $\nabla n$ 的方向只有 $z$ 方向. 由方程 (6.5.8b)

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(z)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right]=0;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right]=0\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right]=\frac{\mathrm{d}n(z)}{\mathrm{d}z}\end{gathered} \tag{6.5.20a}$$

为了简单, 设射线位于 $xOz$ 平面, 没有 $y$ 方向分量, 即假定波阵面是轴垂直于 $xOz$ 平面的柱面波. 注意: 射线的方向是波阵面的法向! 上式中第二个方程是平凡恒等式. 因为 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{1+(z')^2}\mathrm{d}x$, 由方程 (6.5.20a) 第一式得

$$n(z)=\frac{c_0}{\alpha_0}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{6.5.20b}$$

其中 $c_0/\alpha_0$ 为引进的积分常数, 写成这样是为了下面讨论的方便. 注意到 $n(z)=c_0/c(z)$, 从上式容易得到

$$x-x_0=\int_{z_0}^{z}\frac{c(\eta)\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\alpha_0^2-c^2(\eta)}} \tag{6.5.20c}$$

另一方面, 如果取 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{1+(x')^2}\mathrm{d}z$, 代入方程 (6.5.20a) 的第三式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{n(z)}{\sqrt{1+(x')^2}}\right]=\sqrt{1+(x')^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} \tag{6.5.21a}$$

化简并二边积分得到

$$-\int\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta(1+\delta^2)}=\ln n(z)+\ln\frac{\alpha_0}{c_0} \tag{6.5.21b}$$

其中 $\delta=x'=\mathrm{d}x/\mathrm{d}z$, $\ln(\alpha_0/c_0)$ 是引进的积分常数, 最后我们得到

$$x-x_0=\int_{z_0}^{z}\frac{c(\eta)}{\sqrt{\alpha_0^2-c^2(\eta)}}\mathrm{d}\eta \tag{6.5.21c}$$

可见上式与方程 (6.5.20c) 是完全一样的! 因此方程 (6.5.20a) 中第一或者第三个方程只要取一个就可以了.

显然, 根据方程 (6.5.21c), 当 $z=z_0$ 时, $x=x_0$. 因此方程 (6.5.21c) 表示从 $(x_0,z_0)$ 点发出的一条射线. 那么另外一个积分常数 $\alpha_0$ 的物理意义是什么呢? 从物理上讲, 一条射线的轨迹不仅与初始出发点的位置 $(x_0,z_0)$ 有关, 而且与初始的方向有关, 就好像决定一个质点的轨迹需要质点的初始位置和初始动量一样. 假定一个点源位于 $(x_0,z_0)$ 处向四周发出声线, 那么每条射线的轨迹与初始的方向有关. 注意: 在稳态情况, 假定射线已经存在于介质中; 在脉冲情况, 射线轨迹曲线可表示成时间 $t$ 的参数方程. 因此, 积分常数 $\alpha_0$ 表征了射线的初始方向, 设位于 $(x_0,z_0)$ 的源向 $\vartheta_0$ 方向 (如图 6.5.5, $\vartheta_0$ 为射线在 $(x_0,z_0)$ 点的切线与 $z$ 轴的夹角) 发出一条射线 (当然是无数条射线中的一条), 那么

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_0\right)=\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,z_0)} \tag{6.5.22a}$$

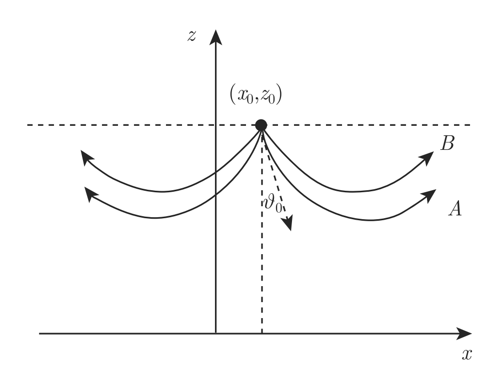



图 6.5.5　位于 $(x_0, z_0)$ 的源发出的射线

由方程 (6.5.21c)

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right|_{(x_0,z_0)} = \frac{c(z_0)}{\sqrt{\alpha_0^2 - c^2(z_0)}} \tag{6.5.22b}$$

因此 $\alpha_0 = c(z_0)/\sin\vartheta_0$, 可见积分常数 $\alpha_0$ 确实可由射线的初始方向角 $\vartheta_0$ 表示.

另外, 注意到 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\cos\alpha$ 和 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}s\cos\beta$ (其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 分别是射线与 $x$ 和 $y$ 轴的夹角), 由方程 (6.5.20a) 的第一和二式得到

$$\frac{\cos\alpha}{c(z)} = \text{常数}; \ \frac{\cos\beta}{c(z)} = \text{常数} \tag{6.5.22c}$$

**波速分布存在极小点的介质**　设波速在 $z=0$ 处存在极小, 在极小点附近, 波速可表示成 $c(z) = c_0[1+(z/D)^2]$. 把 $c(z)$ 代入方程 (6.5.21c), 原则上可以求射线的方程, 但求解析解较困难, 为了揭示射线在这样的介质中的基本特性, 考虑到射线近似适合于缓变介质, 我们取近似

$$\frac{1}{c^2(z)} = \frac{1}{c_0^2[1+(z/D)^2]^2} \approx \frac{1}{c_0^2}\left[1 - 2\left(\frac{z}{D}\right)^2\right] \tag{6.5.23a}$$

代入方程 (6.5.21c)

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int_{z_0}^{z} \frac{c_0}{\sqrt{\alpha_0^2[1-2(\eta/D)^2] - c_0^2}}\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{Dc_0}{\sqrt{2}\alpha_0}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}\alpha_0 z/D}{\sqrt{\alpha_0^2 - c_0^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}\alpha_0 z_0/D}{\sqrt{\alpha_0^2 - c_0^2}}\right) \end{aligned} \tag{6.5.23b}$$

为了简单, 假定源位于 $z_0 = 0$, 那么

$$z = \frac{\sqrt{\alpha_0^2 - c_0^2}D}{\sqrt{2}\alpha_0}\sin\left[\frac{\sqrt{2}\alpha_0}{c_0 D}(x - x_0)\right] \tag{6.5.23c}$$

注意到 $c(z_0)=c(0)=c_0$, 又由 $\alpha_0=c_0/\sin\vartheta_0$, 代入上式得到

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}D\cos\vartheta_0\sin\left[\frac{\sqrt{2}}{D\sin\vartheta_0}(x-x_0)\right] \tag{6.5.23d}$$

上式表明: 射线在极小点 $(z=0)$ 附近震荡, 震荡振幅和周期与初始方向角 $\vartheta_0$ 有关! 于是乎, 波场被局域在波速极小附近, 向 $x$ 或者 $-x$ 传播. 这个结论与 6.4.4 小节的一致.

**深海声线** 在夏季阳光照射下, 深海中的声速深度分布如 6.5.6(a), 声速极小深度为 $z_0=1.3\text{km}$ 左右, 声速深度分布可有下列函数来近似模拟

$$c(z)=c_1\left[1+\varepsilon(\xi+e^{-\xi}-1)\right];\ \xi=2(z-z_0)/z_0 \tag{6.5.24}$$

其中 $c_1=1.492\text{km/s}$ 和 $\varepsilon=0.0074$. 设点声源位于声速极小深度, 即声源坐标为 $(0,z_0)$, 把上式代入方程 (6.5.21c) 可以得到声线图. 图 6.5.6(b) 中水平黑线 (声源的深度) 下的声线为声源发出的、与深度方向夹角为 $\vartheta_0=76°, 78°, 80°, 82°, 84°, 86°, 88°$ 七条声线 (对应于图中数字 1 至 7); 水平黑线上的声线为声源发出的、与深度方向夹角为 $\vartheta_0=102°, 100°, 98°, 96°, 94°, 92°$ 六条声线 (自上而下). 可以看出, 每条声线的转折点 (极大或者极小点) 各不相同, 当 $\vartheta_0=90°$ 时, 声线沿 $\pm x$ 轴方向前进; 当 $\vartheta_0=0°$ 时, 声线沿深度方向 (向下) 前进, 或者向上直至海面反射回来.

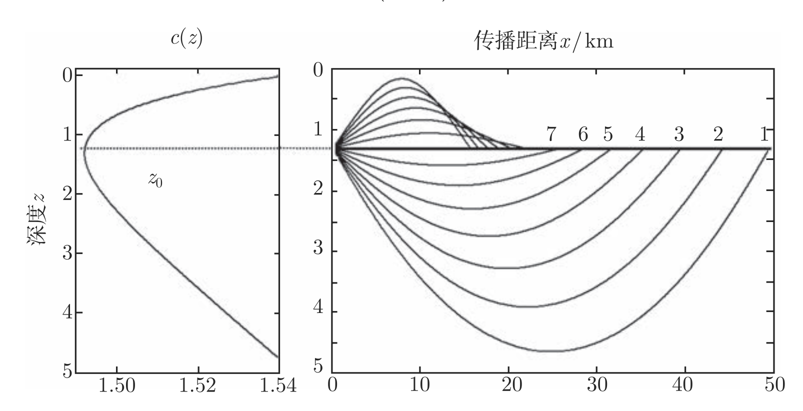



图 6.5.6 (a) 声速随深度 (km) 的变化; (b) 声源位于声速极小深度处时, 发出的声线

值得注意的是, 由方程 (6.5.21c), 通过数值积分, 我们只能得到 $z_0$ 至转折点 (每条声线不同) 的声线. 事实上, 在转折点 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x=0$ 或者 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}z\to\infty$, 由方程 (6.5.21c), 在转折点处 $\alpha_0^2=c^2(z)$(转折点满足的方程), 故转折点右边的声线无法由方程 (6.5.21c) 数值积分得到. 但由于声线在声源深度下 (上) 部分关于转折点对称, 故利用对称性不难得到转折点右边的声线, 而在转折点附近, 射线近似已不成立, 必须利用严格的波动理论.

## 习　题　六

6.1 求第一个本征值和相应本征函数的微扰至 $O(\varepsilon)$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\lambda(1-\varepsilon\sin^2 x)u=0,\ x\in(0,\pi)$$

$$u(0)=u(\pi)=0$$

6.2 求第一个本征值和相应本征函数的微扰至 $O(\varepsilon)$

$$-\nabla^2u+\varepsilon xyu=\lambda u,\ x,y\in(0,\pi)$$

$$u(0,y)=u(\pi,y)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,\pi)}{\partial y}=0$$

6.3 求球内第一个本征值的微扰至 $O(\varepsilon)$

$$-\nabla^2u+(\lambda-\varepsilon r^2)u=0,\ r<1$$
$$u(x,y,z)=0,\ r=1$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

6.4 导出下列 Sturm-Liouville 本征值问题的微扰方法, 本征值的微扰至 $O(\varepsilon)$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)u=\lambda u,\ x\in(0,l)$$

(a) $\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x}-u(0)=0;\ u(l)=0;$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x}-\varepsilon u(0)=0;\ u(l)=0.$

6.5 使用微扰法解边值问题

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\varepsilon^2u=1,\ x^2+y^2<1$$

$$u(x,y)=0,\ x^2+y^2=1$$

提示: 用极坐标.

6.6 使用微扰法解边值问题

$$[1+\varepsilon(x^2+y^2)]\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=1,\ x^2+y^2<1$$

$$u(x,y)=0,\ x^2+y^2=1$$

提示: 用极坐标.

6.7 利用边界微扰法解 Laplace 方程的第二类边值问题

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,\ 0<x<l,\ \varepsilon x<y<L$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(x,L)}{\partial y}=0;\ \frac{\partial u(x,\varepsilon x)}{\partial n}=\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

6.8 利用边界微扰法解 Laplace 方程的第一类边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \varepsilon\text{sin}y<x<l,\ y>0$$

$$u(\varepsilon\sin y,y)=u(l,y)=0,\ y>0$$

$$u(x,0)=\sin(\pi x/l),\ 0<x<l;\ u(x,y)<\infty,\ y\to\infty$$

6.9 用多尺度展开法解弱阻尼波动方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon u-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0$$

$$u(x,0)=f(x);\ u_t(x,0)=0$$

6.10 考虑单摆运动, 如果摆的长度随时间缓慢变化, 则运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}t^2}+k(\varepsilon t)\sin\vartheta=0,\ t>0$$

$$\vartheta(0)=\varepsilon;\ \vartheta'(0)=0$$

利用多尺度展开法求足够长时间后的近似表达式.

6.11 在非线性声学中, 声压满足方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\varepsilon\beta\frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}=0$$

其中 $c$ 和 $\beta$ 是正的常数.

(a) 对小的 $\varepsilon$, 证明通常的正则微扰

$$p(x,t)\approx p_0(kx-\omega t)+\varepsilon p_1(x,t)+\cdots$$

将出现久期项;

(b) 采用多尺度法求微扰展开的前二项.

6.12 考虑非线性波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left[1+\varepsilon f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x\in(0,\infty),\quad t>0$$

其中 $u(0,t)=g(t)$ 和 $u(x,0)=u_t(x,0)=0$, $f$ 和 $g$ 是光滑函数且

$$f(0)=g(0)=g'(0)=0$$

(a) 对小的 $\varepsilon$, 证明通常的正则微扰

$$u(x,t)\approx u_0(t-x)+\varepsilon u_1(x,t)+\cdots$$

将出现久期项;

(b) 采用多尺度法求微扰展开的前二项.

6.13 考虑常微分方程的奇异微扰问题

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+a(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+b(x)y=0,\ x\in(0,1)$$

$$y(0)=\alpha;\ y(1)=\beta$$

(a) 假定 $a(x)>0$ 且边界层在 $x=0$ 处, 求近似解;

(b) 假定 $a(x)<0$ 且边界层在 $x=1$ 处, 求近似解.

6.14 利用边界层方法求下列问题的近似解

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ x>0,\ y>0$$

$$u(x,0)=x\mathrm{e}^{-x};\ u(0,y)=y\mathrm{e}^{-y}$$
$$u(x,y)\to 0,\ x\to\infty,\ y\to\infty$$

6.15 考虑边值问题

$$\varepsilon a\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}+u=0,\ x^2+\ y^2<1$$

$$u(x,y)=x,\ x^2+\ y^2=1$$

其中 $a$ 是常数. 试决定边界层的位置. 当 $a=-1$ 或 $a=1$ 时, 分别求远离点 $(x,y)=(0,-1)$ 或 $(x,y)=(0,1)$ 的近似解.

6.16 考虑弹簧的老化后, 振动方程和初始条件为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+k^2(\varepsilon t)y=0,\ t>0;\ y(0)=a;\ y'(0)=b$$

作变换 $\tau=\varepsilon t$, 然后用 WKB 求微扰解并且比较用多尺度方法得到的解.

6.17 考虑薄长膜的振动

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\mu^2(x)\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\varepsilon\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial t},\ x\in(0,\infty),\ y\in(0,1),\ t>0$$

$$u(x,0,t)=u(x,1,t)=0;\ u(0,y,t)=f(y)\cos\omega t;$$

$$u(x,y,t)<\infty\ (x\to\infty)$$

其中 $\mu(x)>0,\ \alpha(x)>0,\ \mu'(x)<0$.

(a) 利用 WKB 近似求边界层区域以外的长时近似解;

(b) 假定转折点 $x_t>0$, 求边界层区域的一级近似解;

(c) 匹配边界层区域内外的解.

6.18 利用 Fourier 积分法证明方程 (6.3.69b) 和 (6.3.69c) 的解由方程 (6.3.70a) 和 (6.3.70b) 表示.

# 第 7 章　数学物理方程的逆问题

自 20 世纪 60 年代以来, 随着技术的发展, 在地球物理、生命科学、材料科学、遥感技术、信号和图像处理以及量子力学等自然科学和工程技术各领域中, 提出了 "由效果、表现 (输出) 反求原因、原像 (输入)" 的逆问题 (或称反问题), 通称为 "数学物理反问题". 但是逆问题作为一个新的研究方向, 在各个学科领域中尚不成熟. 由于逆问题的不适定性和非线性, 其求解比相应的正问题困难得多. 本章介绍数学物理方程逆问题的基本概念和常用方法: 首先, 我们在 7.1 节中介绍正则化方法和迭代技术; 然后在 7.2 节、7.3 节和 7.4 节中分别介绍抛物型、椭圆型和波动方程的逆问题. 最后, 在 7.5 节中简单介绍本征值逆问题.

## 7.1　正则化方法和迭代技术

本节首先介绍数学物理方程逆问题的基本概念、分类和适定性. 对于偏微分方程控制的系统, 逆问题大致可分为五大类: (1) 系数逆问题; (2) 逆源问题; (3) 初始条件逆问题; (4) 边界条件逆问题; (5) 边界形状逆问题. 由于大部分数学物理方程逆问题最终归结为求解第一类 Fredholm 积分方程, 因此我们专门介绍求解第一类积分方程的正则化方法, 特别是 Tikhonov 正则化方法. 最后, 介绍二个重要的数值计算迭代方法, 即**脉冲谱迭代**和**最佳摄动量迭代技术**.

### 7.1.1　逆问题的适定性和分类

在前面各章中, 主要涉及的是数学物理方程的正问题: 在一定的初始条件和边界条件下, 求解数学物理方程, 得到物理量 (温度、压力和电势等) 的空间分布和随时间演化的规律, 实现对某一物理量的预测. 以波动方程为例

$$\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\boldsymbol{L}u=F(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G,\ 0<t<\infty \tag{7.1.1a}$$

其中 $\boldsymbol{L}u=-\nabla\cdot(p\nabla u)+qu;\ p(\boldsymbol{r})>0,\ \rho(\boldsymbol{r})>0,\ q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$. 在区域边界 $\partial G$, 给定边界条件

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=B(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G,\ 0<t<\infty \tag{7.1.1b}$$

以及初始条件

$$u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=f(\boldsymbol{r});\quad \left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0}=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G \tag{7.1.1c}$$

正问题: 给定方程及边界条件中各项系数 $p(\boldsymbol{r})>0$, $\rho(\boldsymbol{r})>0$, $q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$, $\alpha(\boldsymbol{r})$ 和 $\beta(\boldsymbol{r})$, 以及函数 $F(\boldsymbol{r},t)$、$B(\boldsymbol{r},t)$、$f(\boldsymbol{r})$ 和 $g(\boldsymbol{r})$, 求场函数 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的空间分布和随时间的变化.

显然, 上述正问题可解的必要条件是: (1) 算子 $\boldsymbol{L}$ 确定, 即方程 (7.1.1a) 的各项系数是确定的; (2) 区域 $G$ 与边界 $\partial G$ 确定; (3) 边界条件确定, 即方程 (7.1.1b) 的形式和系数确定; (4) 初始条件式 (7.1.1c) 确定, 即对非定常问题, 有确定的初始分布. 在第一章, 我们已经详细讨论了三类典型方程定解问题的提法以及正问题的适定性.

但是, 如果把正问题的上述四个必要条件的一个或几个作为未知函数 (或因素), 而把正问题中待求的函数 $u(\boldsymbol{r},t)$(或部分 $u(\boldsymbol{r},t)$, 例如在部分边界 $\partial G_1$ 上, 如图 7.1.1), 作为已知条件, 就构成了某类逆问题 (逆问题的分类见下讨论). 因此, 在逆问题中, 正问题的部分求解目标成了逆问题的已知条件 (通过实验测量得到), 而正问题中必须已知的条件却成了逆问题的求解目标.

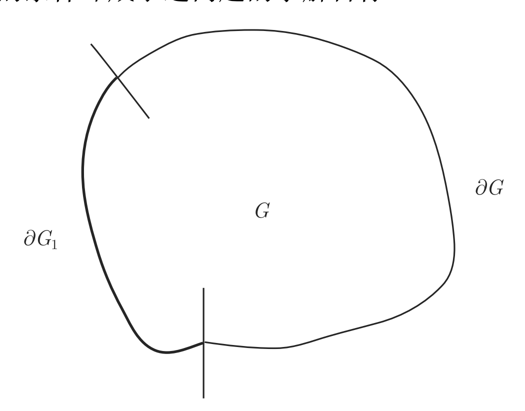



图 7.1.1　已知部分边界 $\partial G_1$ 上 $u(\boldsymbol{r},t)$ 已知

下面举几个逆问题例子.

**例 7.1.1**　非均匀介质的热扩散问题, 热扩散方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot[D(\boldsymbol{r})\nabla u]=f(\boldsymbol{r},t),\ t>0,\ \boldsymbol{r}\in G \tag{7.1.2a}$$

其中 $D(\boldsymbol{r})$ 为热扩散系数的空间分布.

正问题: 给定 $D(\boldsymbol{r})$、$u(\boldsymbol{r},t)$ 的初始分布和边界条件, 求温度场的空间和时间分布 $u(\boldsymbol{r},t)$.

逆问题: 已知部分边界 $\partial G_1$ 的温度和另一部分边界 $\partial G_2$ 热流, 如图 7.1.2

$$u(\boldsymbol{r},t)|_{\partial G_1}=u_0(\boldsymbol{r}_1,t);\ \left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=\psi(\boldsymbol{r}_2,t)$$
$$\boldsymbol{r}_1\in\partial G_1,\ \boldsymbol{r}_2\in\partial G_2,\ t>0 \tag{7.1.2b}$$

求 $G$ 中的热扩散系数 $D(\boldsymbol{r})$.

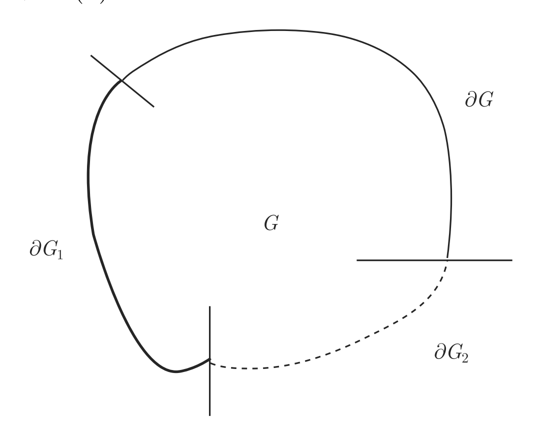



图 7.1.2 部分边界 $\partial G_1$ 和 $\partial G_2$

**例 7.1.2** Randon 变换和逆变换是医学中 X-CT (Computer Tomograhy) 成像的数学基础. 二维函数 $f(x,y)$ 的 Randon 变换定义为沿直线 $L$ 的线积分, 如图 7.1.3

$$(Rf)(l,\vartheta)=\int_L f(x,y)\mathrm{d}L \tag{7.1.3a}$$

其中 $l$ 为原点到直线的距离, $\vartheta$ 为 $x$ 轴与 $l$ 的夹角.

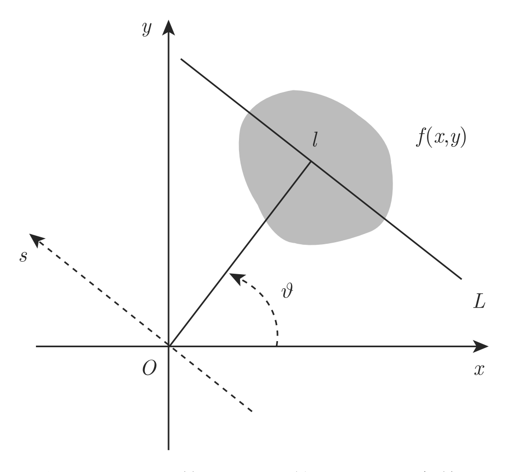



图 7.1.3 函数 $f(x,y)$ 的 Randon 变换

正问题: 已知函数 $f(x,y)$, 求该函数的 Randon 变换.

逆问题: 已知函数 $f(x,y)$ 的 Randon 变换, 求函数 $f(x,y)$ 本身. 转动图 7.1.3 中的坐标 $(x,y)\to(l,s)$, 坐标变换为

$$x=l\cos\vartheta+s\sin\vartheta;\ \ y=l\sin\vartheta-s\cos\vartheta \tag{7.1.3b}$$

于是式 (7.1.3a) 变成

$$(Rf)(l,\vartheta)=\int_{-\infty}^{\infty}f(l\cos\vartheta+s\sin\vartheta,l\sin\vartheta-s\cos\vartheta)\mathrm{d}s \tag{7.1.3c}$$

变化 $l$ 将给出一系列平行直线上的线积分, 而变化角度 $\vartheta$ 给出不同方向直线的线积分. 对式 (7.1.3c) 的变量 $l$ 作一维 Fourier 变换

$$\Im_l[Rf(l,\vartheta)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(l\cos\vartheta+s\sin\vartheta,l\sin\vartheta-s\cos\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l l}\mathrm{d}s\mathrm{d}l \tag{7.1.4a}$$

另一方面, 分析函数 $f(x,y)$ 的二维 Fourier 变换 $\Im(k_x,k_y)$ 在直线 $k_l$ 上的值, 如图 7.1.4,

$$\Im(k_l\cos\vartheta,k_l\sin\vartheta)=\iint_{xy}f(x,y)\exp[\mathrm{i}k_l(x\cos\vartheta+y\sin\vartheta)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.1.4b}$$

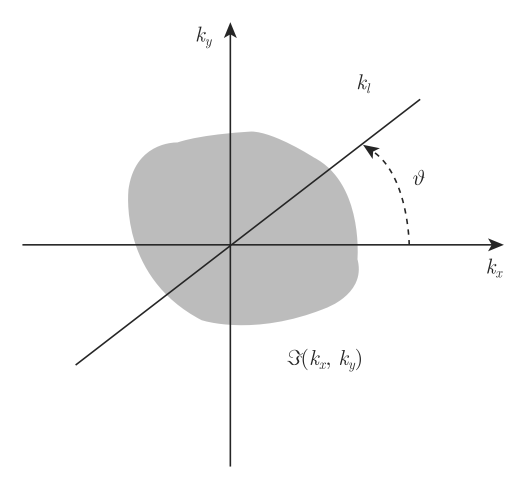



图 7.1.4　频率空间中直线 $k_l$

利用转动坐标系 $(l,s)$, 上式的二重积分为

$$\Im(k_l\cos\vartheta,k_l\sin\vartheta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(l\cos\vartheta+s\sin\vartheta,l\sin\vartheta-s\cos\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l l}\mathrm{d}l\mathrm{d}s \tag{7.1.4c}$$

比较式 (7.1.4a) 与上式右边可知

$$\Im_l[(Rf)(l,\vartheta)] = \Im(k_l\cos\vartheta, k_l\sin\vartheta) \tag{7.1.4d}$$

于是, 固定角度 $\vartheta$ 且对变量 $l$ 作 Fourier 变换, 即可得到 $\Im(k_x,k_y)$ 在直线 $k_l$ 上的值. 因此, 只要变化角度 $\vartheta$, 就可得到整个平面 $(k_x,k_y)$ 上 $\Im(k_x,k_y)$ 的值. 通过逆 Fourier 变换即可反演函数 $f(x,y)$.

**例 7.1.3**　心脏电势逆问题, 设心脏边界为 $\partial G_3$, 人体边界为 $\partial G_1+\partial G_2$, 如图 7.1.5. 心电场的电势满足 Laplace 方程



$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0,\ \boldsymbol{r}\in G \tag{7.1.5a}$$

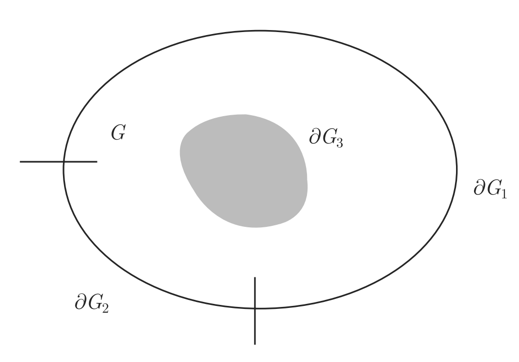



图 7.1.5　心脏电势的逆问题

或者满足更一般的方程 $\nabla\cdot[\varepsilon(\boldsymbol{r})\nabla]u(\boldsymbol{r})=0,\ \boldsymbol{r}\in G$, 其中 $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ 是人体内介电常数的分布. 假定人体表面为绝缘边界

$$\left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G_1+\partial G_2} = 0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1+\partial G_2 \tag{7.1.5b}$$

心脏边界的势分布为

$$u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_3} = u_0(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_3 \tag{7.1.5c}$$

在部分人体 $\partial G_1$ 上, 电势可测量

$$u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_1} = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1 \tag{7.1.5d}$$

正问题: 已知 $u_0(\boldsymbol{r})$ 和假定人体表面为绝缘边界, 求人体内电势分布.

逆问题: 已知 $f(\boldsymbol{r})$, 求心脏的电势 $u_0(\boldsymbol{r})$, 即通过测量部分人体表面的心电势分布, 来判断心脏的功能. 心电逆问题实际上是求 Laplace 方程的初值问题, 由 1.4.6 小节的讨论, 它是不适定的, 具体求解方法见 7.3.1 讨论.

逆问题有三个基本的数学特征.

**不适定性**　在 1.1.4 小节中, 我们初步讨论了定解问题的适定性, 下面给出适定性的数学定义: 设 $X$ 和 $Y$ 是二个赋范空间, 算子 (可以是微分或积分算子) $\boldsymbol{K}$ 把 $X$ 映射到 $Y$, 如果算子方程

$$\boldsymbol{K}x = y,\ x \in X, y \in Y \tag{7.1.6}$$

满足下列三个条件, 则我们称方程 (7.1.6) 是适定的:

(1) **存在性**, 即对所有 $y \in Y$, 至少存在一个 $x \in X$, 使得 $\boldsymbol{K}x = y$;

(2) **唯一性**, 即对所有 $y \in Y$, 至多存在一个 $x \in X$, 使得 $\boldsymbol{K}x = y$;

(3) **稳定性**, 解 $x \in X$ 连续依赖于 $y \in Y$, 即当 $||y - y^*|| \to 0$ 时, $||x - x^*|| \to 0$.

如果三个条件中至少有一个不满足, 则称方程 (7.1.6) 是不适定的.

在这三个条件中, 稳定性特别重要, 一般来说方程 (7.1.6) 的右边项 $y$ 为实验测量得到的数据, 含有一定的测量误差. 如果所得解不稳定, 较小的测量误差带来很大的解的误差, 则这个解没有实际意义, 必须寻求稳定的数值方法来逼近 “真” 解; 如果存在多个解, 则可以通过附加先验条件选择合理的解; 至于存在性, 我们可以通过扩充解的含义 (例如定义使范数 $||\boldsymbol{K}x - y||$ 极小的 $x$ 为方程 (7.1.6) 的解, 即最小范数解) 来解决. 方程的逆问题一般是不适定的.

**非线性**　逆问题一般是非线性问题, 例如在例 7.1.1 中, 系数 $D(\boldsymbol{r})$ 和温度场 $u(\boldsymbol{r}, t)$ 都是待求函数, 一般通过适当的线性化处理, 可以把非线性问题转化成线性积分方程;

**复杂性**　在工程技术问题中, 寻找稳定的数值计算方法是逆问题求解的主要任务, 而在计算中必须面对非线性问题的线性化、不适定问题的正则化和反复求解正问题, 故计算量巨大.

尽管不同的物理问题可以提出不同的逆问题, 但最后的数学形式基本相似. 数学物理方程的逆问题可归纳为五大类, 下面分别讨论.

**系数逆问题**　也称为参数识别 (Parameter identification) 问题, 是最经典的一类逆问题, 有比较成熟的分析方法. 系数逆问题可表述为: 通过方程的解在区域或边界上的部分信息, 确定原方程的一个或多个系数. 例 7.1.1 即是典型的系数逆问题. 方程的系数一般表征介质的某种性质, 因此求解系数逆问题通常是推求介质的特性. 例如, 在地球物理勘探中, 由地面上接收到的地震波大小来推断地层结构, 控制方程为波动方程, 而方程系数为弹性系数和密度分布. 目前, 石油勘探中广泛采用这种方法. 假定问题可化简为一维振动, 波动方程为

$$\rho(z)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left[E(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0, \quad z > 0,\ t > 0 \tag{7.1.7a}$$

边界条件和初始条件为

$$
\begin{aligned}
-E(0)\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} &= g(t),\ t>0 \\
u(z,t)|_{t=0} = u_t(z,t)|_{t=0} &= 0,\ z\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{7.1.7b}
$$

其中 $z$ 为深度, $u(z,t)$ 为位移场, $\rho(z)$ 和 $E(z)$ 分别为地层密度和弹性模量的深度分布, $g(t)$ 为爆炸引起的外力. 设在 $(0,T)$ 时间内记录到地面振动的振幅为

$$
u(z,t)|_{z=0} = u_0(t),\quad 0<t<T \tag{7.1.7c}
$$

逆问题: 能否由 $u_0(t)$ 确定出函数 $\rho(z)$ 和 $E(z)$? 显然要同时确定二个函数是困难的, 为此作走时变换

$$
x = \int_0^z \sqrt{\frac{\rho(z)}{E(z)}}\mathrm{d}z \tag{7.1.7d}
$$

于是方程 (7.1.7a) 和 (7.1.7b) 变成

$$
\begin{aligned}
\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] &= 0,\ x>0,\ t>0 \\
-\sigma(0)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} &= g(t),\ t>0 \\
u(x,t)|_{t=0} = u_t(x,t)|_{t=0} &= 0,\ x\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{7.1.7e}
$$

其中 $\sigma=\sqrt{\rho E}$ 为声阻抗分布. 这一变换的优点是明显的, 它使逆问题变成单参数的逆问题.

**逆源问题** 已知方程中除源 (或汇) 项以外的各个系数, 通过方程的解在区域或边界上的部分信息, 确定源 (或汇) 的强度分布.

例如, 在环境噪声控制工程中, 假定已测得某一曲面上的声压, 希望反演噪声源的空间分布. 考虑如图 7.1.6 的封闭区域 $G$, 其边界为 $\partial G$, 测量点位于曲线或曲面 $\Gamma$(二维示意图为曲线) 上, 非齐次声波方程为

$$
\nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G \tag{7.1.8a}
$$

边界条件

$$
\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = b(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{7.1.8b}
$$

测量附加条件

$$
u(\boldsymbol{r},t)|_{\Gamma} = u_0(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in\Gamma,\ t>0 \tag{7.1.8c}
$$

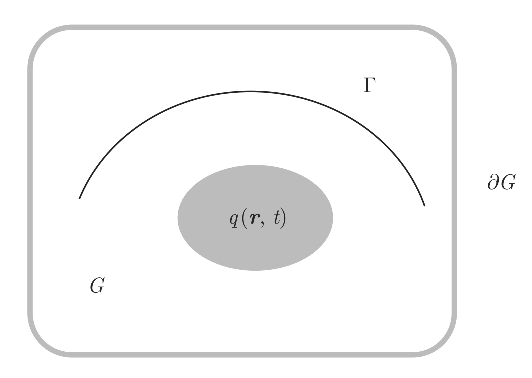



图 7.1.6　封闭空间噪声源的反演

对上述方程作 Fourier 变换

$$\begin{aligned}\nabla^2 U(\boldsymbol{r},\omega)+\omega^2 U(\boldsymbol{r},\omega)=Q(\boldsymbol{r},\omega),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left.\left(\alpha U+\beta\frac{\partial U}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=B(\boldsymbol{r},\omega),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{aligned}\tag{7.1.9a}$$

及

$$U(\boldsymbol{r},\omega)|_{\Gamma}=U_0(\boldsymbol{r},\omega),\ \boldsymbol{r}\in\Gamma\tag{7.1.9b}$$

利用 Green 函数, 由方程 (3.3.5b) 可得

$$U(\boldsymbol{r},\omega)=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)Q(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}\tau'+U_B(\boldsymbol{r},\omega)\tag{7.1.10a}$$

其中边界贡献

$$U_B(\boldsymbol{r},\omega)=\begin{cases}-\displaystyle\iint_{\partial G}\frac{B(\boldsymbol{r}',\omega)}{\alpha}\cdot\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)}{\partial n'}\mathrm{d}S', & \alpha\neq 0\\ +\displaystyle\iint_{\partial G}\frac{B(\boldsymbol{r}',\omega)}{\beta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}S', & \beta\neq 0\end{cases}\tag{7.1.10b}$$

利用测量条件式 (7.1.9b)

$$[U_0(\boldsymbol{r},\omega)-U_B(\boldsymbol{r},\omega)]|_{\Gamma}=\int_G[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)]|_{\boldsymbol{r}\in\Gamma}\,Q(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}\tau'\tag{7.1.10c}$$

显然, 对给定的频率 $\omega$, 上式为第一类 Fredholm 积分方程, 它的解不稳定, 具体解法将在下面讨论. 注意: 一般来说, 场 $u(\boldsymbol{r},t)$ 是源 $q(\boldsymbol{r},t)$ 的线性泛函, 逆源问题是线性的; 反之, 如果源项具有形式 $q(u,\boldsymbol{r},t)$, 则逆源问题也是非线性的.

**初始条件逆问题**　已知方程的每个系数, 对确定的区域和边界, 根据边界条件和 $t=T>0$ 时刻变量的空间分布, 推求 $t=0$ 时刻变量的空间分布, 即为初始条件

逆问题. 在第一章中, 我们已知道波动方程对时间反演具有不变性, 可从 $t = T > 0$ 的波动状态反推 $t = 0$ 的波动状态. 但热传导方程的逆时间问题是不稳定的.

考虑非均匀介质的热传导问题

$$\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{L}u = 0, \boldsymbol{r} \in G,\ 0 < t < T \tag{7.1.11a}$$

逆问题: 已知 $t = T$ 时刻的温度分布

$$u(\boldsymbol{r}, t)|_{t=T} = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G \tag{7.1.11b}$$

求 $t = 0$ 时刻温度场 $u(\boldsymbol{r}, 0)$. 由式 (2.4.15a), 混合问题的一般解为

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(\boldsymbol{r}) \exp(-\lambda_n t) \tag{7.1.12a}$$

利用式 (7.1.11b)

$$u(\boldsymbol{r}, T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(\boldsymbol{r}) \exp(-\lambda_n T) = f(\boldsymbol{r}) \tag{7.1.12b}$$

故

$$a_n = \frac{[\psi_n(\boldsymbol{r}), f(\boldsymbol{r})]}{||\psi_n||^2} \exp(\lambda_n T) \tag{7.1.12c}$$

于是, 混合问题的形式解为

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\psi_n(\boldsymbol{r}), f(\boldsymbol{r})]}{||\psi_n||^2} \psi_n(\boldsymbol{r}) \exp[\lambda_n (T - t)] \tag{7.1.13a}$$

因此 $t = 0$ 时刻的温度场为

$$u(\boldsymbol{r}, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\psi_n(\boldsymbol{r}), f(\boldsymbol{r})]}{||\psi_n||^2} \psi_n(\boldsymbol{r}) \exp(\lambda_n T) \tag{7.1.13b}$$

由 2.2.1 小节讨论, 如果 $\boldsymbol{L}$ 是正算子, $\lambda_n > 0$, 又 $\lambda_n \to \infty$(当 $n \to \infty$ 时). 故对一般的 $t = T$ 时刻的分布 $f(\boldsymbol{r})$, 级数解式 (7.1.13b) 存在收敛性问题. 必须寻找其他形式的解. 设初始温度分布为 $u(\boldsymbol{r}, 0) = g(\boldsymbol{r})$, 则 $t = T$ 时刻的温度场为

$$u(\boldsymbol{r}, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\psi_n(\boldsymbol{r}), g(\boldsymbol{r})]}{||\psi_n||^2} \psi_n(\boldsymbol{r}) \exp(-\lambda_n T) \tag{7.1.14a}$$

注意上式有较好的收敛性. 上式改写成第一类 Fredholm 积分方程形式

$$\int_G k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') g(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau' = f(\boldsymbol{r}) \tag{7.1.14b}$$

其中积分核为

$$k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r}')}{||\psi_n||^2} \exp(-\lambda_n T) \tag{7.1.14c}$$

显然, 方程 (7.1.14c) 的解是不稳定的, 必须寻找其正则化解 (见 7.2.1 小节).

**边界条件逆问题** 已知方程的每个系数, 对确定的区域或边界, 根据函数在区域或边界上的部分 (或全部) 信息, 确定边界条件的类型或参数, 即为边界条件逆问题. 边界条件的类型或参数取决于边界的性质, 从而取决于边界的材料. 因而, 选择边界材料的问题实质上是边界条件逆问题. 在现实生活中这样的例子很多. 一个建筑声学的例子是已知厅堂的混响时间, 决定墙面铺设的吸声材料具有的吸声性能.

一个典型的问题是所谓逆 Stefan 问题. 考虑冰的融化, 如图 7.1.7, 当 $t<0$, 水与冰的平衡分界点为 $x=l$, 当 $t>0$, 在 $x=0$ 处施加热源 $f(t)$, 由于冰融化, 水-冰界面与时间有关, 即 $s=s(t)$. 水中温度场 $u(x,t)$ 满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<s(t),\ t>0 \tag{7.1.15a}$$

边界和初始条件

$$\begin{aligned} -k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} &= f(t),\ t>0 \\ u(x,t)|_{t=0} &= u_0(x),\ 0<x<l \end{aligned} \tag{7.1.15b}$$

其中 $D$ 和 $k$ 为水的热扩散和热传导系数. 此外, 水-冰界面的速率方程为

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha\frac{\partial u[s(t),t]}{\partial x},\ t>0 \tag{7.1.15c}$$

其中 $\alpha$ 为已知常数. 正问题: 已知 $f(t)$ 和 $u_0(x)$, 求 $s(t)$; 逆问题: 已知水-冰界面 $s(t)$, 求边界热流 $f(t)$.

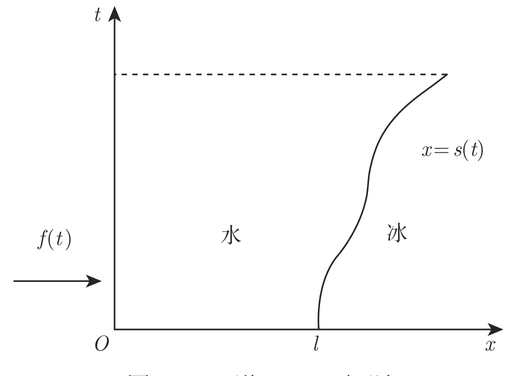



图 7.1.7 逆 Stefan 问题

**边界形状逆问题**　已知方程的每个系数, 对确定的边界 $\partial G_1$ 和未确定的边界 $\partial G_2$, 根据函数在区域或边界上的部分 (或全部) 信息, 确定未知边界 $\partial G_2$ 的形状, 即为边界形状逆问题. 这类逆问题常称为最优形状设计问题, 是当前逆问题研究中最为活跃的领域之一. 在数学物理方程的五类逆问题中, 边界形状逆问题是通过区域边界的几何形状的变化来影响系统的特性, 它不可避免要涉及动边界问题, 因而最为复杂.

考虑声波的逆散射问题. 设声波受不可穿透物体 $G$ 的散射, 如图 7.1.8, Helmholtz 方程和边界条件为

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u(\boldsymbol{r},k)+k^2u(\boldsymbol{r},k)=0,\ \boldsymbol{r}\in\overline{G}\\&\left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r},k)}{\partial n}\right|_{\partial G}=0 \text{ 或 } u(\boldsymbol{r},k)|_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{7.1.16a}$$

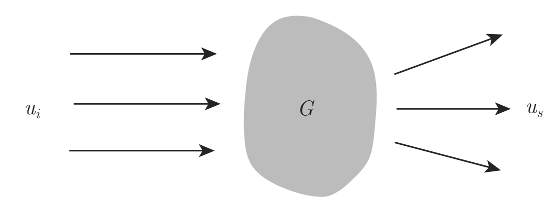



图 7.1.8　声波的散射

其中 $u(\boldsymbol{r},k)$ 为声压, $k$ 为声波波数, $\overline{G}$ 表示 $G$ 的外部. 方程 (7.1.16a) 中边界条件的第一式对应于不可穿透物体 $G$ 是刚性物质, 而第二式对应于软性物质. 总的声场为入射声场 $u_i(\boldsymbol{r},k)$ 和散射声场 $u_s(\boldsymbol{r},k)$ 之和

$$u(\boldsymbol{r},k)=u_i(\boldsymbol{r},k)+u_s(\boldsymbol{r},k)\tag{7.1.16b}$$

散射声场满足辐射条件

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u_s}{\partial r}-\mathrm{i}ku_s\right)=0\tag{7.1.16c}$$

散射场的无限远特征为 (详细见 7.4.2 小节)

$$u_s(\boldsymbol{r},k)=\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{4\pi r}\left[u_\infty(\boldsymbol{e})+O\left(\frac{1}{r}\right)\right],\ r\to\infty\tag{7.1.16d}$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 为散射方向的单位矢量, 具体定义见 7.4.2.

正问题: 已知区域 $G$ 的形状和入射场, 求散射场的分布.

逆问题: 假定对某入射场, 已测得远场不同方向的分布 $u_\infty(\boldsymbol{e})$, 决定区域 $G$ 的边界形状 $\partial G$. 我们将在 7.4 节详细讨论声波的逆散射问题.

在导电材料的电磁无损检测中, 经常遇到 Laplace 方程或椭圆型方程的边界逆问题. 以二维问题为例: 电势在闭区域 $G$ 内满足椭圆型方程

$$\nabla\cdot[\sigma(x,y)\nabla u]=0,(x,y)\in G \tag{7.1.17a}$$

其中 $\sigma=\sigma(x,y)$ 是电导分布, $u=u(x,y)$ 是电势. 闭区域 $G$ 的边界可分成 $\partial G_k$ 和 $\partial G_u$, 如图 7.1.9. 边界 $\partial G_k$ 已知 (如材料表面), 且电势 $u(x,y)$ 和法向导数可测量

$$\begin{aligned} u(x,y)|_{\partial G_k}&=\phi(x,y),\ (x,y)\in\partial G_k\\ \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{\partial G_k}&=\psi(x,y),\ (x,y)\in\partial G_k \end{aligned} \tag{7.1.17b}$$

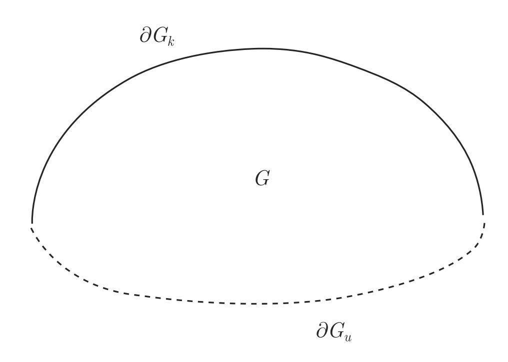



图 7.1.9　部分边界的反演

未知边界 $\partial G_u$ 表示导电介质与非导电介质的分界线, 电势为零

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_u}=0 \tag{7.1.17c}$$

逆问题: 已知边界 $\partial G_k$ 和 $\partial G_k$ 上电势 $u(x,y)$ 和法向导数, 反演未知边界 $\partial G_u$ 和电导分布 $\sigma=\sigma(x,y)$. 如果区域内电导为常数, 逆问题仅需反演未知边界 $\partial G_u$. 显然, 上述问题和例 7.1.3 的心脏电势逆问题与 Laplace 方程的 Cauchy 问题类似, 是不适定的. 由于 Laplace 方程的逆边界问题比较复杂, 以后不作进一步的介绍.

### 7.1.2　正则化方法和 Tikhonov 正则化

正则化方法是把不适定问题转化为条件适定问题的有效方法, 其目的是构建不适定问题的稳定近似解. 考虑方程

$$\boldsymbol{K}\psi=g \tag{7.1.18a}$$

一般 $\boldsymbol{K}$ 是积分算子, 上式的解不稳定. 设右边存在测量误差 $\delta$

$$||g-g^{\delta}||\leqslant\delta \tag{7.1.18b}$$

因此, 代替方程 (7.1.18a), 必须解扰动方程

$$\boldsymbol{K}\psi^{\delta} = g^{\delta} \tag{7.1.18c}$$

严格讲, 上式的解不存在, 因为积分算子 $\boldsymbol{K}$ 的作用是平滑化, 经过 $\boldsymbol{K}$ 作用后的函数比较光滑, 而方程 (7.1.18c) 右边存在测量误差 $\delta$, 不可能光滑.

因此, 只能寻找方程 (7.1.18c) 的广义解, 也就是构成某一个近似算子 $\boldsymbol{R}$ 代替逆算子 $\boldsymbol{K}^{-1}$. 设近似算子 $\boldsymbol{R}$ 是一个依赖于参数 $\alpha$ 的线性、有界算子序列 $\boldsymbol{R}_\alpha$, $(\alpha > 0)$, 且满足

$$\lim_{\alpha\to 0} \boldsymbol{R}_\alpha \boldsymbol{K}\psi = \psi \tag{7.1.18d}$$

即算子序列 $\boldsymbol{R}_\alpha \boldsymbol{K}$ 收敛到恒等算子, 称 $\boldsymbol{R}_\alpha$ 为**正则化算子**, $\alpha$ 为**正则化参数**. $\boldsymbol{K}\psi = g$ 的近似解定义为

$$\psi^{\alpha,\delta} \equiv \boldsymbol{R}_\alpha g^{\delta} \tag{7.1.19a}$$

称上式为方程 (7.1.18c) 的**正则化解**. 近似解的误差为

$$\begin{aligned} ||\psi^{\alpha,\delta} - \psi|| &= ||(\boldsymbol{R}_\alpha g^{\delta} - \boldsymbol{R}_\alpha g) + (\boldsymbol{R}_\alpha g - \psi)|| \\ &\leqslant ||\boldsymbol{R}_\alpha g^{\delta} - \boldsymbol{R}_\alpha g|| + ||\boldsymbol{R}_\alpha g - \psi|| \\ &\leqslant ||\boldsymbol{R}_\alpha|| \cdot ||g^{\delta} - g|| + ||\boldsymbol{R}_\alpha \boldsymbol{K}\psi - \psi|| \end{aligned} \tag{7.1.19b}$$

即

$$||\psi^{\alpha,\delta} - \psi|| \leqslant \delta||\boldsymbol{R}_\alpha|| + ||\boldsymbol{R}_\alpha \boldsymbol{K}\psi - \psi|| \equiv \Delta \tag{7.1.20a}$$

因此, 精确解与近似解的误差 $\Delta$ 有二部分组成: 第一项表示不适定性和测量数据误差而引起的解的误差, 当 $\alpha \to 0$ 时

$$\Delta_1 \equiv \lim_{\alpha\to 0} \delta||\boldsymbol{R}_\alpha|| \to \infty \tag{7.1.20b}$$

式 (7.1.20a) 的第二项表示正则化引起的误差, 即用 $\boldsymbol{R}_\alpha$ 代替逆算子 $\boldsymbol{K}^{-1}$ 引起的误差, 当 $\alpha \to 0$ 时

$$\Delta_2 \equiv \lim_{\alpha\to 0} ||\boldsymbol{R}_\alpha \boldsymbol{K}\psi - \psi|| \to 0 \tag{7.1.20c}$$

如图 7.1.10 所示. 一方面, 稳定性要求 $\alpha$ 足够大, 另一方面, 近似精度要求 $\alpha$ 足够小. 因此存在正则化参数 $\alpha$ 的最佳选择 $\alpha^*$, 使解的误差 $||\psi^{\alpha,\delta} - \psi||$ 最小. 一般正则化参数 $\alpha$ 是测量数据误差 $\delta$ 的函数 $\alpha = \alpha(\delta)$.

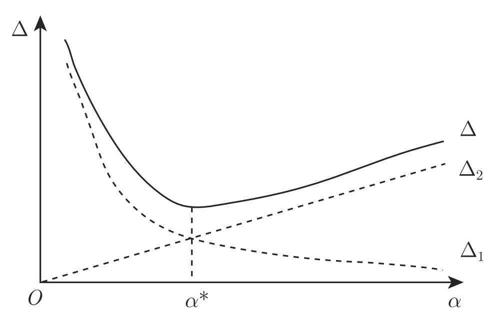



图 7.1.10　误差 Δ 随正则化参数 $\alpha$ 的变化

正则化参数 $\alpha$ 的选择原则是: 解的误差不可能小于测量数据的误差, 即

$$||\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}_\alpha\psi^\delta-\psi^\delta||=\gamma\delta \tag{7.1.20d}$$

其中 $\gamma\geqslant 1$. 上式称为**残差原理**.

下面介绍正则算子 $\boldsymbol{R}_\alpha$ 的构成. 在 Hilbert 空间中, 正则算子 $\boldsymbol{R}_\alpha$ 可通过 $\boldsymbol{K}$ 的奇异值分解系统构成. 如果 $\boldsymbol{K}$ 是 Hilbert 空间中的 Hermite 对称算子, 即满足

$$(\boldsymbol{K}\psi_1,\psi_2)=(\psi_1,\boldsymbol{K}\psi_2) \tag{7.1.21a}$$

根据方程 (5.3.5a), 对形如 $\psi=\boldsymbol{K}g,\ g\in L^2[a,b]$ 的函数, 可将 $\psi$ 展成 $\{\psi_n\}$ 的广义 Fourier 级数

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,\psi)\psi_n;\ \boldsymbol{K}\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\psi_n,\psi)\psi_n \tag{7.1.21b}$$

对 Hilbert 空间中的任意算子 $\boldsymbol{K}$, 定义算子 $\boldsymbol{K}$ 的奇异值为 Hermite 对称的正算子 $\boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K}$ 的本征值的平方根 $\{\mu_n\}$, 且有

$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\mu_3\cdots>0 \tag{7.1.22a}$$

算子理论告诉我们, 存在正交、归一序列 $\{\psi_n\}$ 和 $\{\psi_n^+\}$ 满足

$$\boldsymbol{K}\psi_n=\mu_n\psi_n^+;\ \boldsymbol{K}^+\psi_n^+=\mu_n\psi_n \tag{7.1.22b}$$

根据方程 (5.3.43a), 对 Hilbert 空间中形如 $\psi=\boldsymbol{K}f,\ f\in L^2[a,b]$ 的函数 $\psi$ 可作奇异值分解

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,\psi)\psi_n;\ \boldsymbol{K}\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\psi_n,\psi)\psi_n^+=g \tag{7.1.23a}$$

显然, 上式是式 (7.1.21b) 的推广, 如果 $\boldsymbol{K}$ 是 Hermite 对称算子, 二者一致. $\{\mu_n,\psi_n,\psi_n^+\}$ 称为算子 $\boldsymbol{K}$ 的**奇异系统**. 式 (7.1.23a) 的第二式两边用 $\psi_m^+$ 取内积并利用 $\psi_m^+$ 的正交、归一性质得到

$$\mu_n(\psi_n,\psi)=(\psi_n^+,g) \tag{7.1.23b}$$

事实上, 上式可以通过下列运算得到

$$\begin{aligned}\mu_n(\psi_n,\psi)&=(\psi,\boldsymbol{K}^{+}\psi_n^{+})^*=(\boldsymbol{K}\psi,\psi_n^{+})^*\\&=(g,\psi_n^{+})^*=(\psi_n^{+},g)\end{aligned}\tag{7.1.23c}$$

于是, 算子方程 $\boldsymbol{K}\psi=g$ 的解可用 $\boldsymbol{K}$ 的奇异系统表示为

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}(\psi_n^{+},g)\psi_n\tag{7.1.24a}$$

显然, 上式成立的条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2}\left|(\psi_n^{+},g)\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(\psi_n,\psi)\right|^2=||\psi||^2<\infty\tag{7.1.24b}$$

如果方程 $\boldsymbol{K}\psi=g$ 右边含误差 $g^\delta=g+\delta g$, 由式 (7.1.24a), 解的误差估计为

$$\begin{aligned}||\psi^\delta-\psi||&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}||(\psi_n^{+},\delta g)\psi_n||\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}||\psi_n^{+}||\cdot||\delta g||\cdot||\psi_n||=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}||\delta g||\end{aligned}\tag{7.1.24c}$$

显然, 误差比

$$\frac{|||\psi^\delta-\psi||}{||g^\delta-g||}\sim\frac{1}{\mu_n}\tag{7.1.24d}$$

由于奇异值趋向零而发散. 因此, 奇异值趋向零的速度控制方程 $\boldsymbol{K}\psi=g$ 的病态性质. 如果奇异值趋向零速度较慢, 我们说 $\boldsymbol{K}\psi=g$ 中度病态; 反之, 如果奇异值很快趋向零, 则说 $\boldsymbol{K}\psi=g$ 重度病态.

解式 (7.1.24a) 表明, $\boldsymbol{K}\psi=g$ 的病态性来源于 $\mu_n\to0$, ( $n\to\infty$), 这一特性提示我们能否通过改变式 (7.1.24a) 中 $\mu_n$ 的结构得到 $\boldsymbol{K}\psi=g$ 的正则化解? 为此, 把正则化算子表示成

$$\boldsymbol{R}_\alpha g\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}q(\alpha,\mu_n)(\psi_n^{+},g)\psi_n\tag{7.1.25a}$$

其中 $q(\alpha,\mu_n)$ 称为**正则子**, 显然要求 $q(\alpha,\mu_n)$ 满足

$$\lim_{\alpha\to0}q(\alpha,\mu_n)=1\tag{7.1.25b}$$

另外, 函数 $q(\alpha,\mu_n)$ 的选择还要求满足正则化条件式 (7.1.18d).

**Tikhonov 正则化方法** 下面我们介绍一种常用的正则化方法, 即 Tikhonov 正则化方法. 注意到, 对超定的有限维线性系统 $\boldsymbol{K}\psi=g$, 通常的解法是求泛函

$J(\psi) = ||\boldsymbol{K}\psi - g||^2$ 的极小. 但对无限维系统, 求 $||\boldsymbol{K}\psi - g||^2$ 的极小化问题仍然是病态的. 因此只能进一步对极小函数 $||\boldsymbol{K}\psi - g||^2$ 放宽要求为

$$J_\alpha(\psi) = ||\boldsymbol{K}\psi - g||^2 + \alpha\Omega(\psi) \tag{7.1.26a}$$

然后求新泛函 $J_\alpha(\psi)$ 的极小. 新泛函 $J_\alpha(\psi)$ 称为 **Tikhonov 泛函**, 而第二项中 $\Omega(\psi) > 0$ 称为**稳定化泛函**. 注意: 稳定化泛函取不同形式, 将得到不同的 Tikhonov 正则化解, 见 7.1.3 小节讨论. 当稳定化泛函取简单的形式 $\Omega(\psi) \equiv ||\psi||^2$ 时, 我们来求使 Tikhonov 泛函取极小所满足的方程, 设 $\psi = \psi_\alpha$ 时, $J_\alpha(\psi)$ 取极小, 因为

$$\begin{aligned} J_\alpha(\psi) = & ||\boldsymbol{K}\psi - g||^2 + \alpha||\psi||^2 = ||\boldsymbol{K}\psi_\alpha - g||^2 + \alpha||\psi_\alpha||^2 \\ & +2\mathrm{Re}[(\psi - \psi_\alpha), \alpha\psi_\alpha + \boldsymbol{K}^+(\boldsymbol{K}\psi_\alpha - g)] \\ & +||\boldsymbol{K}(\psi - \psi_\alpha)||^2 + \alpha||\psi - \psi_\alpha||^2 \end{aligned} \tag{7.1.26b}$$

所以当 $\psi_\alpha$ 满足

$$\alpha\psi_\alpha + \boldsymbol{K}^+(\boldsymbol{K}\psi_\alpha - g) = 0 \tag{7.1.26c}$$

即

$$\alpha\psi_\alpha + \boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K}\psi_\alpha = \boldsymbol{K}^+ g \tag{7.1.26d}$$

时 $J_\alpha(\psi)$ 取极小. 显然, 如果 $\boldsymbol{K}\psi = g$ 是第一类 Fredholm 积分方程, 上式就是稳定的第二类 Fredholm 积分方程.

把方程 (7.1.26d) 的解写作 $\psi_\alpha = \boldsymbol{R}_\alpha g$, 其中 $\boldsymbol{R}_\alpha$ 定义为逆算子

$$\boldsymbol{R}_\alpha = (\alpha\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{K}^+ \tag{7.1.27a}$$

如果用算子 $\boldsymbol{K}$ 的奇异系统 $\{\mu_n, \psi_n, \psi_n^+\}$ 表示, 令解为

$$\psi_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha)\psi_n \tag{7.1.27b}$$

代入方程 (7.1.26d) 并利用方程 (7.1.22b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha)(\alpha + \mu_n^2)\psi_n = \boldsymbol{K}^+ g \tag{7.1.27c}$$

于是

$$a_n(\alpha) = \frac{(\psi_n, \boldsymbol{K}^+ g)}{\alpha + \mu_n^2} = \frac{(\boldsymbol{K}\psi_n, g)}{\alpha + \mu_n^2} = \frac{\mu_n(\psi_n^+, g)}{\alpha + \mu_n^2} \tag{7.1.27d}$$

可得 $\boldsymbol{K}\psi = g$ 的正则化解

$$\begin{aligned} \psi_\alpha = \boldsymbol{R}_\alpha g &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\alpha + \mu_n^2}(\psi_n^+, g)\psi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} q(\alpha, \mu_n)(\psi_n^+, g)\psi_n \end{aligned} \tag{7.1.28a}$$

其中正则子为

$$q(\alpha,\mu_n)=\frac{\mu_n^2}{\alpha+\mu_n^2} \tag{7.1.28b}$$

因此, Tikhonov 正则化相当于取式 (7.1.25a) 中的正则子函数 $q(\alpha,\mu_n)$ 为上式表示的形式. 对 Tikhonov 正则化算子 $\boldsymbol{R}_\alpha$, 存在唯一的 $\alpha=\alpha(\delta)$ 使残差公式 (7.1.20d) 成为

$$||\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}_\alpha\psi^\delta-\psi^\delta||=\delta \tag{7.1.28c}$$

在实际问题中, 定义一个误差函数, 根据误差极小原理, 搜寻最佳的 Tikhonov 正则化参数, 具体例子见 7.2.4 小节.

**例 7.1.4** 利用 Tikhonov 正则化方法求解第一类 Volterra 积分方程

$$\int_0^x \psi(y)\mathrm{d}y=g(x) \tag{7.1.29a}$$

上式的解 $\psi(x)$ 就是 $g(x)$ 的一阶导数, 即 $\psi(x)=g'(x)$, 在数值计算中, 如果 $g(x)$ 含有噪声, 则微分是不稳定的. 下面用 Tikhonov 正则化方法解积分方程 (7.1.29a), 从而得到函数 $g(x)$ 的微分 $\psi(x)$. 定义积分算子

$$k(x,y)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ 1, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{7.1.29b}$$

可以把方程 (7.1.29a) 转化为第一类 Fredholm 积分方程

$$\boldsymbol{K}\psi\equiv\int_0^1 k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y=g(x) \tag{7.1.29c}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 的积分核为 $k(x,y)$, 显然共轭算子 $\boldsymbol{K}^+$ 的积分核为

$$k^+(x,y)=k^*(y,x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{7.1.29d}$$

注意算子 $\boldsymbol{K}$ 不是实对称的, 它的奇异系统 $\{\mu_n,\psi_n,\psi_n^+\}$ 满足方程

$$\boldsymbol{K}\psi_n=\mu_n\psi_n^+;\ \boldsymbol{K}^+\psi_n^+=\mu_n\psi_n \tag{7.1.30a}$$

注意到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K}\psi_n&\equiv\int_0^1 k^+(x,s)\left[\int_0^1 k(x,y)\psi_n(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 k^+(x,s)\left[\int_0^s k(s,y)\psi_n(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s\\&=\int_x^1\left[\int_0^s \psi_n(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s=\int_x^1\int_0^s\psi_n(y)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{7.1.30b}$$

故方程 (7.1.30a) 的第一式作用 $\boldsymbol{K}^{+}$ 且利用第二式得到

$$\int_{x}^{1}\int_{0}^{s}\psi_n(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s=\mu_n^2\psi_n(x) \tag{7.1.30c}$$

上式对 $x$ 微分二次后得到 $\psi_n$ 满足的微分方程

$$\mu_n^2\frac{\mathrm{d}^2\psi_n(x)}{\mathrm{d}x^2}+\psi_n(x)=0 \tag{7.1.30d}$$

微分方程的边界条件可由方程 (7.1.30c) 及其一次微分得到: 当 $x=1$ 时, $\psi_n(1)=0$; 而当 $x=0$ 时, $\psi_n'(0)=0$. 因此, 不难得到

$$\psi_n(x)=\sqrt{2}\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right];\ \mu_n=\frac{1}{(n-1/2)\pi}\quad (n=1,2,\cdots) \tag{7.1.31a}$$

由方程 (7.1.30a) 的第一式

$$\psi_n^{+}(x)=\frac{1}{\mu_n}\boldsymbol{K}\psi_n(x)=\sqrt{2}\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right] \tag{7.1.31b}$$

故算子 $\boldsymbol{K}$ 奇异系统 $\{\mu_n,\psi_n,\psi_n^{+}\}$ 由式 (7.1.31a) 和 (7.1.31b) 表示. 由式 (7.1.28a) 得到 $g(x)$ 的一阶导数 $\psi(x)$ 为

$$\psi_\alpha^\delta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{\alpha+\mu_n^2}(\psi_n^{+},g^\delta)\psi_n(x) \tag{7.1.31c}$$

其中 $g^\delta$ 表示 $g(x)$ 含有随机噪声 $\delta$. 数值计算表明: 当 $g^\delta=g(x)+\sigma\delta$(其中 $g(x)$ 是给定的光滑函数, 如 $g(x)=x$; $\delta$ 是误差水平, 如取 $\delta=0.01$; $\sigma$ 是 $[-1,+1]$ 的随机数) 时, 式 (7.1.31c) 能给出很好的数值计算结果. 注意: 取不同的正则化参数 $\alpha$ 将得到不同的 $\psi_\alpha^\delta(x)$, 定义误差函数

$$E(\alpha)\equiv\frac{||\psi_\alpha^\delta(x)-\psi(x)||}{||\psi(x)||} \tag{7.1.31d}$$

其中 $\psi(x)$ 是 "真" 解, 如当 $g(x)=x$ 时, $\psi(x)=g'(x)=1$. 当 $\alpha=\alpha^*$ 时, $E(\alpha)$ 极小, 这时的参数 $\alpha^*$ 就是最佳正则化参数.

注意: 上例中, 我们用算子 $\boldsymbol{K}$ 的奇异系统 $\{\mu_n,\psi_n,\psi_n^{+}\}$ 来求正则化解, 但在实际情况中, 由于算子 $\boldsymbol{K}$ 的复杂性, 求解奇异系统本身就非常困难. 这时, 通常是先把积分方程离散化为有限维的代数方程组, 然后求有限维矩阵的奇异系统 $\{\mu_n,\psi_n,\psi_n^{+}\}$, 然后再用正则化方法, 具体例子见 7.2.4 小节.

### 7.1.3 第一类 Fredholm 积分方程的正则化方法

考虑有限区间 $[a,b]$ 上的第一类 Fredholm 积分方程

$$\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y = g(x) \tag{7.1.32a}$$

如果我们希望解 $\psi(x)$ 的导数平方可积, 则取稳定化泛函为

$$\Omega(\psi) = \int_a^b \left[q_0(y)\psi^2(y) + q_1(y)\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]\mathrm{d}y \tag{7.1.32b}$$

其中 $q_0(y) \geqslant 0$ 和 $q_1(y) > 0$ 为选定的已知函数. Tikhonov 泛函选择为

$$\begin{aligned} J_\alpha(\psi,g) &= ||\boldsymbol{K}\psi - g||^2 + \alpha\Omega(\psi) \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y - g(x)\right]^2 \mathrm{d}x + \alpha\Omega(\psi) \end{aligned} \tag{7.1.32c}$$

注意: 上式中的稳定泛函 $\Omega(\psi)$ 与式 (7.1.26b) 中的区别. 方程 (7.1.32a) 的 Tikhonov 正则化解为求泛函 $J_\alpha(\psi,g)$ 的极小, 即

$$\delta J_\alpha(\psi,g) = 0 \tag{7.1.33a}$$

设 $\psi(x) = \psi_\alpha(x)$ 时 $J_\alpha(\psi,g)$ 取极小, 令 $\psi(x) = \psi_\alpha(x) + \lambda\eta(x)$, 则

$$J_\alpha(\psi,g) = J(\psi_\alpha,\alpha) + 2\lambda Q(\psi_\alpha,\eta) + \lambda^2 J_\alpha(\eta,g) \equiv J(\lambda) \tag{7.1.33b}$$

其中

$$\begin{aligned} Q(\psi_\alpha,\eta) &= \int_a^b \left\{\left[\int_a^b k(x,y)\psi_\alpha(y)\mathrm{d}y - g(x)\right]\cdot \int_a^b k(x,y)\eta(y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x \\ &\quad + \alpha\int_a^b \left[q_0(y)\psi_\alpha(y)\eta(y) + q_1(y)\frac{\mathrm{d}\psi_\alpha(y)}{\mathrm{d}y}\eta'(y)\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left\{\int_a^b \tilde{K}(y,t)\psi_\alpha(t)\mathrm{d}t - \tilde{b} - \alpha\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(q_1\frac{\mathrm{d}\psi_\alpha}{\mathrm{d}y}\right) - q_0\psi_\alpha\right]\right\}\eta(y)\mathrm{d}y \\ &\quad + \left[\alpha q_1(y)\frac{\mathrm{d}\psi_\alpha(y)}{\mathrm{d}y}\eta(y)\right]_a^b \end{aligned} \tag{7.1.33c}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{K}(y,t) &= \int_a^b K(\xi,y)K(\xi,t)\mathrm{d}\xi \\ \tilde{b}(y) &= \int_a^b K(\xi,y)g(\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{7.1.33d}$$

因当 $\psi(x) = \psi_\alpha(x)$ 时 $J_\alpha(\psi, g)$ 取极小, 故 $J'(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$, 于是 $Q(\psi_\alpha, \eta) = 0$. 由 $\eta(x)$ 的任意性, 应有

$$\int_a^b \tilde{K}(y,t)\psi_\alpha(t)\mathrm{d}t - \alpha\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(q_1\frac{\mathrm{d}\psi_\alpha}{\mathrm{d}y}\right) - q_0\psi_\alpha\right] = \tilde{b}(y) \tag{7.1.34a}$$

且

$$\left[\alpha q_1(y)\frac{\mathrm{d}\psi_\alpha(y)}{\mathrm{d}y}\eta(y)\right]_a^b = 0 \tag{7.1.34b}$$

下面根据待求函数 $\psi(x)$ 在端点 $x = a$ 和 $b$ 的性质分别进行讨论.

(1) 已知 $\psi(a) = \psi_a$ 和 $\psi(b) = \psi_b$, 即端点固定, $\eta(a) = \eta(b) = 0$. 这时方程 (7.1.34b) 自动满足, 故方程 (7.1.31a) 的 Tikhonov 正则化解满足带边界条件的积分-微分方程

$$\begin{gathered}\int_a^b \tilde{K}(y,t)\psi_\alpha(t)\mathrm{d}t - \alpha\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(q_1\frac{\mathrm{d}\psi_\alpha}{\mathrm{d}y}\right) - q_0\psi_\alpha\right] = \tilde{b}(y)\\ \psi_\alpha(a) = \psi_a;\quad \psi_\alpha(b) = \psi_b\end{gathered} \tag{7.1.35a}$$

(2) 不知道端点的任何信息, 则方程 (7.1.34b) 为自然边界条件. 它等价于

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_\alpha(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=a} = \left.\frac{\mathrm{d}\psi_\alpha(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=b} = 0 \tag{7.1.35b}$$

而积分-微分方程不变, 仍然为方程 (7.1.35a).

(3) 如果给定的边界条件既不是自然边界条件也不是固定边界, 例如要求满足 $\psi'_\alpha(a) = h$(常数), 则应首先作适当的变换, 如 $\tilde{\psi}_\alpha(x) = \psi_\alpha(x) - hx$, 然后求 $\tilde{\psi}_\alpha(x)$ 的正则化解.

从式 (7.1.32b) 可看出, 稳定化泛函存在的条件是 $\psi(x)$ 的导数平方可积, 如果要求 $\psi(x)$ 有更高的光滑性, 如 $p$ 阶导数平方可积, 那么稳定泛函应取

$$\varOmega(\psi) = \int_a^b \sum_{r=0}^{p} q_r\left[\frac{\mathrm{d}^r\psi(y)}{\mathrm{d}y^r}\right]^2\mathrm{d}y \tag{7.1.36a}$$

其中 $q_r(y) \geqslant 0$, $(r = 1, 2, \cdots, p-1)$, $q_p(y) > 0$. 相应的正则化方程为

$$\int_a^b \tilde{K}(y,t)\psi_\alpha(t)\mathrm{d}t + \alpha\sum_{r=0}^{p}(-1)^r\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}y^r}\left(q_r\frac{\mathrm{d}^r\psi_\alpha}{\mathrm{d}y^r}\right) = \tilde{b}(y) \tag{7.1.36b}$$

边界条件可取为

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(a) = \psi'_\alpha(a) = \cdots = \psi_\alpha^{(p-1)}(a) = 0\\ \psi_\alpha(b) = \psi'_\alpha(b) = \cdots = \psi_\alpha^{(p-1)}(b) = 0\end{aligned} \tag{7.1.36c}$$

### 7.1.4 脉冲谱迭代技术

脉冲谱 (Pulse Spectrum Technique, PST) 是一种求解逆问题的重要数值方法, 其优点: (1) PST 方法不受维数的限制, 无论是一维、二维问题还是三维问题都可用 PST 方法; (2) PST 方法不受方程类型的限制, 一般对含时间的双曲型和抛物型方程, 涉及的逆问题都可用 PST 方法; (3) PST 方法不受问题类型的限制.

设依赖于函数 $a(\boldsymbol{r})$ 和时间 $t$ 的微分算子 $\boldsymbol{L}[a(\boldsymbol{r}),t]$ 的混合问题为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}[a(\boldsymbol{r}),t]u(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{r}\in G,\quad t>0\\ \boldsymbol{B}[u(\boldsymbol{r},t)]=b(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{r}\in\partial G,\quad t>0\\ \boldsymbol{E}[u(\boldsymbol{r},t)]=q(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in G+\partial G\end{gathered}\tag{7.1.37a}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分别是边界和初始算子, $a(\boldsymbol{r})$ 是算子 $\boldsymbol{L}$ 的待求系数. 假定部分边界. $\partial G_1$ 上的测量值为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_1}=\psi_0^\delta(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1,\ t>0\tag{7.1.37b}$$

其中 $\psi_0^\delta(\boldsymbol{r},t)$ 表示含有强度为 $\delta$ 的测量误差. 逆问题: 从测量值 $\psi_0^\delta(\boldsymbol{r},t)$ 反演算子 $\boldsymbol{L}$**的**系数 $a(\boldsymbol{r})$.

**脉冲谱**(PST) 方法的基本过程如下.

首先, 对式 (7.1.37a) 中的方程和边界条件, 以及测量附加条件式 (7.1.37b) 关于时间变量 $t$ 作 Laplace 变换 (或 Fourier 变换) 得到相应的 “谱”(只有在 Fourier 变换时, 才是频谱, 否则 “谱” 是广义的谱), 即

$$\begin{gathered}\tilde{\boldsymbol{L}}[a(\boldsymbol{r}),s]U(\boldsymbol{r},s)=F(\boldsymbol{r},s),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \tilde{\boldsymbol{B}}[U(\boldsymbol{r},s)]=B(\boldsymbol{r},s),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\\ \left.\frac{\partial U(\boldsymbol{r},s)}{\partial n}\right|_{\partial G_1}=\varPhi(\boldsymbol{r},s),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1\end{gathered}\tag{7.1.38a}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{L}},\tilde{\boldsymbol{B}},U,F,B$ 和 $\varPhi$ 分别是 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{B},u,f,b$ 和 $\psi_0^\delta$ 的 Laplace 变换 (或 Fourier 变换) 映象.

其次, 构成 Newton 型迭代 (故本质上, PST 是拟 Newton 型迭代)

$$\begin{gathered}a_{n+1}(\boldsymbol{r})=a_n(\boldsymbol{r})+\delta a_n(\boldsymbol{r})\\ U_{n+1}(\boldsymbol{r},s)=U_n(\boldsymbol{r},s)+\delta U_n(\boldsymbol{r},s)\\ (n=0,1,2,\cdots)\end{gathered}\tag{7.1.38b}$$

其中 $a_0(\boldsymbol{r})$ 是初始猜测值, 假定每次增量很小, 即

$$||\delta a_n(\boldsymbol{r})||\ll||a_n(\boldsymbol{r})||;\quad ||\delta U_n(\boldsymbol{r},s)||\ll||U_n(\boldsymbol{r},s)||\tag{7.1.38c}$$

将式 (7.1.38b) 代入方程 (7.1.38a) 的第一式, 并略去二阶以上的增量, 以增量的阶数分类得到

$$\begin{gathered}\tilde{\boldsymbol{L}}[a_n(\boldsymbol{r}),s]U_n(\boldsymbol{r},s)=F(\boldsymbol{r},s),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \tilde{\boldsymbol{B}}[U_n(\boldsymbol{r},s)]=B(\boldsymbol{r},s),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered}\tag{7.1.39a}$$

以及

$$\begin{gathered}\tilde{\boldsymbol{L}}[a_n(\boldsymbol{r}),s]\delta U_n(\boldsymbol{r},s)=Z[\boldsymbol{r},s,\delta a_n(\boldsymbol{r}),U_n(\boldsymbol{r},s),\cdots],\ \boldsymbol{r}\in G\\ \tilde{\boldsymbol{B}}[\delta U_n(\boldsymbol{r},s)]=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered}\tag{7.1.39b}$$

其中 $Z$ 是运算过程中定义的已知函数, 且线性依赖于 $\delta a_n$. 设算子 $\tilde{\boldsymbol{L}}[a_n(\boldsymbol{r}),s]$ 的 Green 函数为 $G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)$

$$\begin{gathered}\tilde{\boldsymbol{L}}[a_n(\boldsymbol{r}),s]G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \tilde{\boldsymbol{B}}[G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)]=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered}\tag{7.1.40a}$$

则方程 (7.1.39b) 等价于积分方程

$$\delta U_n(\boldsymbol{r},s)=\int_G G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)Z[\boldsymbol{r}',s,\delta a_n(\boldsymbol{r}'),U_n(\boldsymbol{r}',s),\cdots]\mathrm{d}\tau'\tag{7.1.40b}$$

上式关于变量 $\boldsymbol{r}$ 求方向导数 (注意: 方向导数 $\partial U/\partial n=\boldsymbol{n}\cdot\nabla U$), 然后在边界上取值得到边界法向导数

$$\left.\frac{\partial\delta U_n(\boldsymbol{r},s)}{\partial n}\right|_{\boldsymbol{r}\in\partial G_1}=\int_G\left.\frac{\partial G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)}{\partial n}\right|_{\boldsymbol{r}\in G_1}\cdot Z[\boldsymbol{r}',s,\delta a_n(\boldsymbol{r}'),U_n(\boldsymbol{r}',s),\cdots]\mathrm{d}\tau'$$

取近似

$$\delta U_n(\boldsymbol{r},s)\approx U(\boldsymbol{r},s)-U_n(\boldsymbol{r},s)\tag{7.1.40c}$$

并利用附加条件得

$$\begin{aligned}&\int_G\left.\frac{\partial G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)}{\partial n}\right|_{\boldsymbol{r}\in G_1}\cdot Z[\boldsymbol{r}',s,\delta a_n(\boldsymbol{r}'),U_n(\boldsymbol{r}',s),\cdots]\mathrm{d}\tau'\\ &\qquad=\left[\varPhi(\boldsymbol{r},s)-\frac{\partial U_n(\boldsymbol{r},s)}{\partial n}\right]_{\boldsymbol{r}\in\partial G_1}\end{aligned}\tag{7.1.40d}$$

对给定的 $s$, $U_n(\boldsymbol{r},s)$ 从方程 (7.1.39a) 求解正问题得到, 而 Green 函数的法向导数可通过数值方法得到, 于是上式是关于 $\delta a_n(\boldsymbol{r})$ 的第一类 Fredholm 积分方程, 它是不适定的, 必须用正则化方法解之.

因此, PST 方法的迭代过程如下:

(1) 给定初始猜测值 $a_0(\boldsymbol{r})$, 一般取均匀分布为初值;

(2) 对选定的一组 $s$, 求正问题, 即解方程 (7.1.39a) 得到 $U_0(\boldsymbol{r},s)$;

(3) 求 Green 函数, 即解方程 (7.1.40a) 得到 $G_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', s)$, 然后数值计算 $G_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', s)$ 的法向导数;

(4) 用正则化方法解积分方程 (7.1.40d) 得到 $\delta a_0(\boldsymbol{r})$, 从而令

$$a_1(\boldsymbol{r}) = a_0(\boldsymbol{r}) + \delta a_0(\boldsymbol{r}) \tag{7.1.40e}$$

重复迭代过程, 直到达到满意的精度.

利用 PST 求解方程逆问题主要由二部分组成: (1) 正问题的求解; (2) 第一类积分方程求解, 而积分方程的核含有 Green 函数, 对一般的变系数微分算子和边界条件, Green 函数只能通过数值方法求得. $N$ 维问题对应的 Green 函数是 $2N$ 维的, 而且 Green 函数含有奇性, 因此 Green 函数的计算工作量巨大.

如何避免 Green 函数及其方向导数的计算是 PST 方法的一大问题. 研究发现, 在一些特定条件下, Green 函数的计算可以避免, 这样的 PST 方法称为**广义 PST 方法**. 后面将以具体例子来说明.

### 7.1.5 最佳摄动量迭代技术

最佳摄动量 (Optimal Perturbation) 迭代技术是基于变分原理和正则化技术的迭代方法. 设依赖于函数 $a(\boldsymbol{r})$ 和时间 $t$ 的微分算子 $\boldsymbol{L}[a(\boldsymbol{r}), t]$ 的混合问题为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}[a(\boldsymbol{r}), t]u(\boldsymbol{r}, t) = f(\boldsymbol{r}, t),\ t > 0,\ \boldsymbol{r} \in G \\ \boldsymbol{B}[u(\boldsymbol{r}, t)] = b(\boldsymbol{r}, t),\ t > 0,\ \boldsymbol{r} \in \partial G \\ \boldsymbol{E}[u(\boldsymbol{r}, t)] = q(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G + \partial G\end{gathered} \tag{7.1.41a}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分别是给定的边界算子和初始算子.

正问题: 给定算子 $\boldsymbol{L}[a(\boldsymbol{r}), t]$ 的形式、边界函数 $b(\boldsymbol{r}, t)$ 和初始分布 $q(\boldsymbol{r})$, 求区域 $G$ 内的时空分布 $u(\boldsymbol{r}, t)$.

逆问题: 给定边界函数 $b(\boldsymbol{r}, t)$、初始分布 $q(\boldsymbol{r})$ 和附加的测量数据, 求函数 $a(\boldsymbol{r})$, 以确定微分算子 $\boldsymbol{L}[a(\boldsymbol{r}), t]$ 的形式.

附加的测量数据有多种选择, 如区域 $G$ 内某曲面上的场分布或者法向导数, 等等. 下面假定附加测量数据为时间间隔 $t \in (0, T)$ 内, 部分边界 $\partial G_1$ 上的法向导数

$$\left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r}, t)}{\partial n}\right|_{\partial G_1} = \phi_0^\delta(\boldsymbol{r}, t),\ \boldsymbol{r} \in \partial G_1,\ t \in (0, T) \tag{7.1.41b}$$

其中 $\phi_0^\delta(\boldsymbol{r}, t)$ 表示测量数据含有强度为 $\delta$ 的测量误差.

利用 Green 函数和附加测量数据, 原则上, 上述逆问题可以转化为积分算子方程

$$\boldsymbol{K}[a(\boldsymbol{r}), t] = \phi_0^\delta(\boldsymbol{r}, t),\ \boldsymbol{r} \in \partial G_1,\ t \in (0, T) \tag{7.1.42a}$$

根据 Tikhonov 正则化方法, 可将上式化为求下列非线性泛函的极小问题

$$J_\alpha(a)=\int_0^T\iint_{\partial G_1}|\boldsymbol{K}[a(\boldsymbol{r}),t]-\phi_0^\delta(\boldsymbol{r},t)|^2\mathrm{d}S\mathrm{d}t+\alpha\Omega[a(\boldsymbol{r})] \tag{7.1.42b}$$

其中 $\alpha$ 为正则化参数, $\Omega[a(\boldsymbol{r})]$ 为 $L^2[\Omega]$ 上的稳定化泛函. 注意: 理论上, 我们可以得到方程 (7.1.42a) 中算子 $\boldsymbol{K}$ 的具体形式, 但在最佳摄动量法的迭代过程中, 只要用正问题的解计算部分边界 $\partial G_1$ 上的法向导数就可以了, 即写成

$$J_\alpha(a)=\int_0^T\iint_{\partial G_1}\left|\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}-\phi_0^\delta(\boldsymbol{r},t)\right|^2\mathrm{d}S\mathrm{d}t+\alpha\Omega[a(\boldsymbol{r})] \tag{7.1.42c}$$

下面介绍最佳摄动量法求解非线性泛函 $J_\alpha(a)$ 的极小问题, 其基本思路如下.

(1) 建立迭代过程

$$a_{n+1}(\boldsymbol{r})=a_n(\boldsymbol{r})+\delta a_n(\boldsymbol{r}) \tag{7.1.43a}$$

其中扰动量 $\delta a_n(\boldsymbol{r})$ 由下列非线性最优化问题决定 (故称为最佳摄动量)

$$J_\alpha(\delta a)=\int_0^T\iint_{\partial G_1}\left|\frac{\partial u_{n+1}(a_n+\delta a_n)}{\partial n}-\phi_0^\delta\right|^2\mathrm{d}S\mathrm{d}t+\alpha||\delta a_n||^2 \tag{7.1.43b}$$

其中为了方便, 忽略了写变量 $\boldsymbol{r}$ 和 $t$.

(2) 对上述最优化问题进行离散化, 并采用线性化方法求得 $\delta a_n(\boldsymbol{r})$ 的数值解, 即求非线性泛函的局部极小值.

设函数系 $\{\psi_j(\boldsymbol{r})\}$ 是 $L^2[\Omega]$ 上的完备系, 把函数 $a(\boldsymbol{r})$ 作广义 Fourier 展开且取前 $N$ 项近似

$$a(\boldsymbol{r})\approx\sum_{j=1}^N A_j\psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{7.1.44a}$$

于是, 可以把函数 $a(\boldsymbol{r})$ 的扰动转变成广义 Fourier 展开系数的扰动

$$\delta a_n(\boldsymbol{r})\approx\sum_{j=1}^N\delta A_j\psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{7.1.44b}$$

因此, 只要求出展开系数的扰动, 就可以得到第 $n$ 次修正量 $\delta a_n(\boldsymbol{r})$. 设 $u_{n+1}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $u_n(\boldsymbol{r},t)$ 分别是函数 $a(\boldsymbol{r})=a_{n+1}(\boldsymbol{r})$ 和 $a(\boldsymbol{r})=a_n(\boldsymbol{r})$ 时正问题方程 (7.1.41a) 的解, 显然它们分别是 $a_n(\boldsymbol{r})+\delta a_n(\boldsymbol{r})$ 和 $a_n(\boldsymbol{r})$ 的函数, 写成 $u_n(\boldsymbol{r},t)=u_n[a_n(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r},t]$ 和

$$\begin{aligned}u_{n+1}(\boldsymbol{r},t)&=u_{n+1}[a_n(\boldsymbol{r})+\delta a_n(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r},t]\\&=u_{n+1}\left[a_n(\boldsymbol{r})+\sum_{j=1}^N\delta A_j\psi_j(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r},t\right]\end{aligned} \tag{7.1.44c}$$

上式作 Taylor 展开且保留线性项

$$u_{n+1}(\boldsymbol{r},t)\approx u_n[a_n(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r},t]+\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial u_n}{\partial\delta A_j}\right)_{\delta A_j=0}\delta A_j+\cdots \tag{7.1.45a}$$

其中

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial\delta A_j}\right)_{\delta A_j=0}=\lim_{\Delta_j\to 0}\frac{u_n[a_n(\boldsymbol{r})+\Delta_j\psi_j(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r},t]-u_n[a_n(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r},t]}{\Delta_j} \tag{7.1.45b}$$

在数值计算中, 取足够小的 $\Delta_j$ 就可以了. 把式 (7.1.45a) 代入式 (7.1.43b) 得到

$$\begin{aligned}J_\alpha(\delta a)&=\int_0^T\iint_{\partial G_1}\left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial n}-\phi_0^\delta\right|^2\mathrm{d}S\mathrm{d}t+\alpha||\delta a_n||^2\\&=\int_0^T\iint_{\partial G_1}\left|\frac{\partial u_n}{\partial n}-\phi_0^\delta+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial\delta A_j}\right)_{\delta A_j=0}\delta A_j\right|^2\mathrm{d}S\mathrm{d}t+\alpha\sum_{j=1}^{N}\delta A_j\delta A_j\end{aligned} \tag{7.1.45c}$$

上式的平方项展开后得到

$$J_\alpha(\delta a)=\sum_{i,j=1}^{N}(A_{ij}+\alpha\delta_{ij})\delta A_i\delta A_j+2\sum_{j=1}^{N}B_j\delta A_j+C \tag{7.1.46a}$$

其中诸系数为

$$\begin{aligned}A_{ij}&\equiv\int_0^T\iint_{\partial G_1}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial\delta A_j}\right)_{\delta A_j=0}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial\delta A_i}\right)^*_{\delta A_i=0}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\\B_j&\equiv\mathrm{Re}\int_0^T\iint_{\partial G_1}\left(\frac{\partial u_n}{\partial n}-\phi_0^\delta\right)^*\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial\delta A_j}\right)_{\delta A_j=0}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\\C&\equiv\int_0^T\iint_{\partial G_1}\left|\frac{\partial u_n}{\partial n}-\phi_0^\delta\right|^2\mathrm{d}S\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{7.1.46b}$$

由 $J_\alpha(\delta a)$ 极小得到决定 $\delta A_i$ 的代数方程组

$$\sum_{i=1}^{N}(A_{ij}+\alpha\delta_{ij})\delta A_i=B_i,\ (i=1,2,\cdots,N) \tag{7.1.46c}$$

于是, 我们求得 $(n+1)$ 迭代过程的系数

$$a_{n+1}(\boldsymbol{r})\approx a_n(\boldsymbol{r})+\sum_{j=1}^{N}\delta A_j\psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{7.1.46d}$$

定义误差函数

$$E\equiv\int_0^T\iint_{\partial G_1}\left|\frac{\partial u_n}{\partial n}-\phi_0^\delta\right|^2\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{7.1.47a}$$

设定收敛因子 $\varepsilon$, 当满足 $E < \varepsilon$ 时, 迭代过程终止.

由以上过程看出, 最佳摄动量法的关键是三个选择: ① 初始值 $a_0(\boldsymbol{r})$; ② 基函数 $\{\psi_j(\boldsymbol{r})\}$; ③ 正则化参数 $\alpha$. 这些选择对收敛性都有很多影响. 另一方面, 式 (7.1.45c) 中的稳定化泛函也可以有其他选择, 例如

$$\Omega = \sum_{j=1}^{N} B_{ij}\delta A_j \delta A_j \tag{7.1.47b}$$

其中 $[B_{ij}]$ 为正定矩阵, 以改善迭代过程的收敛性.

## 7.2 抛物型方程的逆问题

抛物型方程的逆问题在热物理、工程水力学和环境工程中有非常重要的应用, 涉及逆问题的五个类型, 即① 系数逆问题; ② 源逆问题; ③ 初始条件逆问题; ④ 边界条件逆问题; ⑤ 边界形状逆问题. 本节在 7.2.1 小节中首先介绍比较简单的情形, 即一维热传导方程的初始条件、边界条件和源逆问题. 然后结合具体的科学和工程问题, 介绍如何用脉冲谱迭代技术和最佳摄动量法解这类逆问题. 因边界形状逆问题的复杂性, 不作介绍.

### 7.2.1 一维逆问题和 Hausdorff 矩逆问题

本小节介绍一维热传导方程逆问题的几个简单例子, 包括初始条件逆问题、边界条件逆问题和逆源问题.

**初始条件逆问题** 考虑定义在一维无限大区间 $x \in (-\infty, \infty)$ 的初值问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ t > 0,\ x \in (-\infty,\infty) \\ \psi(x,t)|_{t=0} = \psi_0(x),\ x \in (-\infty,\infty)\end{gathered} \tag{7.2.1a}$$

上述 Cauchy 问题 (正问题) 是适定的, 由方程 (1.4.4a) 和 (1.4.4b) 得到解

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right]\psi_0(s)\mathrm{d}s \tag{7.2.1b}$$

逆问题: 由附加的测量条件, 即时刻 $t = T > 0$ 的温度分布

$$\psi(x,t)|_{t=T} = \psi_T(x),\ x \in (-\infty,\infty) \tag{7.2.1c}$$

反演初始时刻 $t = 0$ 时的温度分布: $\psi(x,t)|_{t=0} = \psi_0(x),\ x \in (-\infty,\infty)$. 显然, 方程 (7.2.1b) 在时刻 $t = T > 0$ 取值, 可以得到第一类 Fredholm 积分方程

$$\psi_T(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi T}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4T}\right]\psi_0(s)\mathrm{d}s \tag{7.2.2a}$$

利用 7.1.2 小节介绍的 Tikhonov 正则化方法, 可以得到上式的正则化解.

进一步假定存在先验条件

$$\psi_0(x)=\begin{cases}\psi_0(x), & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}\tag{7.2.2b}$$

则方程 (7.2.2a) 可以写成

$$\sqrt{4\pi T}\psi_T(x)=\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4T}\right]\psi_0(s)\mathrm{d}s,\ x\in(-\infty,\infty)\tag{7.2.2c}$$

在负半轴 $(x<0)$ 上取值, 分别取 $x=x_j=-2jT,\ (j=1,2,\cdots)$, 上式给出

$$\sqrt{4\pi T}\psi_T(-2jT)=\exp(-j^2T)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{s^2}{4T}\right)\mathrm{e}^{-js}\psi_0(s)\mathrm{d}s\tag{7.2.2d}$$

作变量变换 $\xi=\mathrm{e}^{-s}$ 或者 $s=-\ln\xi$, 上式变成

$$\int_0^1 u(\xi)\xi^n\mathrm{d}\xi=\mu_n,\ (n=0,1,2,\cdots)\tag{7.2.3a}$$

其中 $\mu_n=\sqrt{4\pi T}\exp[(n+1)^2T]\psi_T[-2(n+1)T]$ 以及

$$u(\xi)=\psi_0(-\ln\xi)\exp\left[-\frac{(\ln\xi)^2}{4T}\right]\tag{7.2.3b}$$

或者

$$\psi_0(x)=u(\mathrm{e}^{-x})\exp\left(\frac{x^2}{4T}\right)\tag{7.2.3c}$$

故一旦从方程 (7.2.3a) 求得 $u(\xi)$, 就能从上式得到初始时刻的分布 $\psi_0(x)$. 方程 (7.2.3a) 称为 Hausdorff 矩逆问题.

把方程 (7.2.3a) 写成算子方程的形式

$$\boldsymbol{K}u=\boldsymbol{\mu}\tag{7.2.4a}$$

其中

$$\begin{gathered}\boldsymbol{K}u=[(\boldsymbol{K}u)_0,(\boldsymbol{K}u)_1,(\boldsymbol{K}u)_2,\cdots,(\boldsymbol{K}u)_N,\cdots]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\mu}=[\mu_0,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N,\cdots]^{\mathrm{T}}\end{gathered}\tag{7.2.4b}$$

以及

$$(\boldsymbol{K}u)_n=\int_0^1 u(\xi)\xi^n\mathrm{d}\xi,\ (n=0,1,2,\cdots,N,\cdots)\tag{7.2.4c}$$

Hausdorff 矩问题的解是严重不稳定的. 下面利用 Tikhonov 正则化方法解算子方程 (7.2.4a). 取方程 (7.2.3a) 的前 $N$ 阶矩来近似反演函数 $u(\xi)$, 定义 Tikhonov 泛函

$$J_\alpha(u_\alpha^\delta) \equiv ||\boldsymbol{K}u - \boldsymbol{\mu}^\delta||_{l^2}^2 + \alpha\Omega(u) \tag{7.2.5a}$$

其中

$$\begin{gathered} ||\boldsymbol{K}u - \boldsymbol{\mu}^\delta||_{l^2}^2 = \sum_{j=0}^{N} |(\boldsymbol{K}u)_j - \mu_j^\delta|^2 \\ \boldsymbol{\mu}^\delta = [\mu_0^\delta, \mu_1^\delta, \mu_2^\delta, \cdots, \mu_N^\delta]^{\mathrm{T}} \end{gathered} \tag{7.2.5b}$$

上标 “$\delta$” 表示测量误差. 稳定性泛函取为 (要求解有较好的光滑性质, 见式 (7.1.32b))

$$\Omega(u) = \int_0^1 |u(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi + \int_0^1 |u'(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \tag{7.2.5c}$$

设 $\{N_i(\xi)\}$ 是 $\xi \in [0, 1]$ 的完备的函数系, 则函数 $u(\xi)$ 可以表示成

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^{M} x_i N_i(\xi) \tag{7.2.6a}$$

把上式代入方程 (7.2.4c)

$$(\boldsymbol{K}u)_j = \sum_{i=1}^{M} \phi_{ij} x_i,\ (j = 0, 1, 2, \cdots, N) \tag{7.2.6b}$$

其中

$$\phi_{ij} \equiv \int_0^1 N_i(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi \tag{7.2.6c}$$

于是, 由式 (7.2.5b), (7.2.5c), (7.2.6a) 和 (7.2.6b) 得到 Tikhonov 泛函

$$J_\alpha(u_\alpha^\delta) = \sum_{i,k=1}^{M} w_{ik}^\alpha x_k x_i - 2\sum_{i=1}^{M} v_i^\delta x_i + c \tag{7.2.7a}$$

其中

$$\begin{gathered} w_{ik}^\alpha \equiv \sum_{j=0}^{N} \phi_{ij}\phi_{kj}^* + \alpha\left[\int_0^1 N_i(\xi)N_k(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_0^1 N_i'(\xi)N_k'(\xi)\mathrm{d}\xi\right] \\ v_i^\delta \equiv \sum_{j=0}^{N} \mathrm{Re}(\mu_j^\delta \phi_{ij});\ c \equiv \sum_{j=0}^{N} |\mu_j^\delta|^2 \end{gathered} \tag{7.2.7b}$$

由 $J_\alpha(u_\alpha^\delta)$ 极小得到

$$\sum_{i=1}^{M} w_{ij} x_i = v_j,\ (j = 1, 2, \cdots, M) \tag{7.2.7c}$$

一旦从上式求得 $\{x_i^{\alpha,\delta}\}$, 由式 (7.2.6a) 就得到函数 $u_\alpha^\delta(\xi)$, 于是由式 (7.2.3c) 得到初始时刻的分布 $\psi_0(x)$

$$\psi_0^{\alpha,\delta}(x) = \exp\left(\frac{x^2}{4T}\right)\sum_{i=1}^{M} x_i^{\alpha,\delta} N_i(\mathrm{e}^{-x}) \tag{7.2.7d}$$

这一过程就完成了一维无限大区间 $x \in (-\infty, \infty)$ 初值问题的反演.

**有限区间** 对有限区间, 无法把初始条件逆问题转化成 Hausdorff 矩问题. 考虑有限区间 $x \in (0, L)$ 的混合问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ t > 0,\ x \in (0, L)\\ \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0\\ \psi(x,t)|_{t=0} = \psi_0(x),\ x \in (0, L)\end{gathered} \tag{7.2.8a}$$

当已知 $\psi_0(x)$ 时, 正问题的解为

$$\psi(x,t) = \int_0^L G(x,s,t)\psi_0(s)\mathrm{d}s \tag{7.2.8b}$$

其中含时 Green 函数为

$$G(x,s,t) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi s}{L}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) \tag{7.2.8c}$$

逆问题: 已知 $t = T$ 时温度场的分布 $\psi(x,t)|_{t=T} = \psi_T(x),\ x \in (0, L)$, 反演初始时刻的分布 $\psi_0(x),\ x \in (0, L)$. 由方程 (7.2.8b) 得到第一类 Fredholm 积分方程

$$\psi_T(x) = \int_0^L k(x,s)\psi_0(s)\mathrm{d}s \equiv \boldsymbol{K}\psi_0 \tag{7.2.8d}$$

其中积分算子 $\boldsymbol{K}$ 的积分核为 $k(x,s) = G(x,s,T)$. Tikhonov 泛函取为

$$J_\alpha^\delta(\psi) = \int_0^L \left|\int_0^L k(x,s)\psi_0(s)\mathrm{d}s - \psi_T^\delta(x)\right|^2 \mathrm{d}x + \alpha\int_0^L |\psi_0(x)|^2\mathrm{d}x \tag{7.2.8e}$$

其中 $\psi_T^\delta(x)$ 表示 $\psi_T(x)$ 含有强度为 $\delta$ 的测量误差. 把解 $\psi_0(x)$ 用完备的函数系 $\{\cos(n\pi x/L)\}$ 来展开

$$\psi_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \tag{7.2.9a}$$

代入式 (7.2.8e), 并且注意到 $k(x,s)=G(x,s,T)$, 得到

$$J_\alpha^\delta(\psi_0)=L\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j a_j^2-2L\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j a_j+\int_0^L|\psi_T^\delta(x)|^2\mathrm{d}x \tag{7.2.9b}$$

其中

$$\begin{aligned}&\alpha_j\equiv\frac{1}{\varepsilon_j}\left[\exp\left(-\frac{2j^2\pi^2}{L^2}T\right)+\alpha\right]\\&\beta_j\equiv\frac{1}{L}\int_0^L\psi_T^\delta(x)\cos\frac{j\pi x}{L}\mathrm{d}x\\&\varepsilon_j=1,\ (j=0);\ \varepsilon_j=2,\ (j>0)\end{aligned} \tag{7.2.9c}$$

由 $J_\alpha^\delta(\psi_0)$ 极小得到 $a_j=\beta_j/\alpha_j$, 代入式 (7.2.9a) 得到正则化解为

$$\psi_0^\alpha(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j\beta_j\left[\exp\left(-\frac{2j^2\pi^2}{L^2}T\right)+\alpha\right]^{-1}\cos\frac{j\pi x}{L} \tag{7.2.9d}$$

由上式可以清楚地看出正则化参数的意义. 事实上, 由方程 (7.2.8b) 和 (7.2.8c)

$$\psi(x,T)=\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\cos\frac{n\pi x}{L}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}T\right)\int_0^L\cos\frac{n\pi s}{L}\psi_0(s)\mathrm{d}s \tag{7.2.10a}$$

上式二边乘以 $\cos(j\pi x/L)$ 并且积分得到

$$\exp\left(\frac{j^2\pi^2}{L^2}T\right)\int_0^L\psi^\delta(x,T)\cos\frac{j\pi x}{L}\mathrm{d}s=\int_0^L\cos\frac{j\pi s}{L}\psi_0(s)\mathrm{d}s \tag{7.2.10b}$$

故 $\psi_0(s)$ 可以表示成下列余弦 Fourier 级数

$$\psi_0(s)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j\beta_j\exp\left(\frac{j^2\pi^2}{L^2}T\right)\cos\frac{j\pi x}{L} \tag{7.2.10c}$$

上式是不稳定的, 当 $j\to\infty$ 时, 由于指数项的放大, $\psi^\delta(x,T)$ 的小测量误差将引起很大的 $\psi_0(s)$ 变化. 而正是正则化参数 $\alpha$ 的引进, 把上式写成式 (7.2.9d) 的形式后, 当 $j\to\infty$ 时, 这种无限放大就不存在了.

注意: 本例中我们得到解析形式的解, 是因为式 (7.2.9a) 中的展开函数系 $\{\cos(j\pi x/L)\}$ 恰好是系统的正交、归一的完备系.

**边界条件逆问题**　考虑一维半无限空间 $x\in(0,\infty)$, 热传导方程的混合问题为

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=0,\ t>0,\ x\in(0,\infty)\\\psi(x,t)|_{t=0}=0,\ x\in(0,\infty)\\\psi(0,t)=f(t),\ t>0\end{gathered} \tag{7.2.11a}$$

若 $f(t)$ 已知, 上述正问题的解可由方程 (3.5.25c) 得到

$$\psi(x,t)=\int_0^t\left[f(\tau)\frac{\partial G(x,x',t-\tau)}{\partial x'}\right]_{x'=0}\mathrm{d}\tau \tag{7.2.11b}$$

其中 Green 函数满足

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G(x,x',t)=0,\ t>0,\ (x,x')\in(0,\infty)\\ G(x,x',t)|_{t=0}=\delta(x,x'),\ (x,x')\in(0,\infty)\\ G(x,x',t)|_{x=0}=0,\ t>0,\ x'\in(0,\infty)\end{gathered} \tag{7.2.11c}$$

由方程 (1.4.12d), 不难得到 $G(x,x',t)=G(x-x',t)-G(x+x',t)$, 即

$$G(x,x',t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4t}\right]-\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4t}\right] \tag{7.2.11d}$$

故

$$\left.\frac{\partial G(x,x',t-\tau)}{\partial x'}\right|_{x'=0}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \tag{7.2.12a}$$

代入方程 (7.2.11b), 得到方程 (7.2.11a) 的解

$$\psi(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\tau \tag{7.2.12b}$$

逆问题: 在 $x=x_0$ 点, 测得时间间隔 $t\in(0,T)$ 内的温度变化, 即 $\psi(x_0,t)=g(t)$, 反演端点 $x=0$ 处的温度变化, 即求 $\psi(0,t)=f(t)$. 由方程 (7.2.12b)

$$\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x_0^2}{4(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\tau=g^\delta(t),t\in(0,T) \tag{7.2.12c}$$

其中 $g^\delta(t)=2\sqrt{\pi}g(t)/x_0$. 显然, 上式是第一类 Volterra 积分方程, 是典型的不适定问题. 注意到方程 (5.2.1a) 和 (5.2.1b), 方程 (7.2.12c) 可以写成 $t\in(0,T)$ 上的第一类 Fredholm 积分方程

$$\boldsymbol{K}f\equiv\int_0^T k(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau=g^\delta(t),t\in(0,T) \tag{7.2.13a}$$

其中算子 $\boldsymbol{K}$ 的积分核为

$$k(t,\tau)\equiv\begin{cases}0, & (0\leqslant t<\tau\leqslant T)\\ \dfrac{1}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\dfrac{x_0^2}{4(t-\tau)}\right], & (0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T)\end{cases} \tag{7.2.13b}$$

Tikhonov 泛函取为

$$J_{\alpha}^{\delta}(f)=\int_{0}^{T}\left|\int_{0}^{T}k(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau-g^{\delta}(t)\right|^{2}\mathrm{d}t+\alpha\int_{0}^{T}|f(\tau)|^{2}\mathrm{d}\tau \tag{7.2.13c}$$

由方程 (7.1.26d), 正则化解满足

$$\alpha f_{\alpha}+\boldsymbol{K}^{+}\boldsymbol{K}f_{\alpha}=\boldsymbol{K}^{+}g^{\delta} \tag{7.2.14a}$$

其中共轭算子 $\boldsymbol{K}^{+}$ 的积分核为

$$\begin{aligned}&k^{+}(t,\tau)=k^{*}(\tau,t)\\&\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left[-\dfrac{x_{0}^{2}}{4(\tau-t)}\right], & (0\leqslant t<\tau\leqslant T)\\0, & (0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T)\end{cases}\end{aligned} \tag{7.2.14b}$$

研究表明: 对 $f(t)$ 是连续函数, Tikhonov 正则化解式 (7.2.14a) 能给出好的结果, 但对非连续函数, 结果不理想, 必须寻找新的稳定化泛函 $\Omega(f)$, 不进一步介绍.

**逆源问题**　考虑有限区间 $x\in(0,L)$ 的混合问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^{2}\psi(x,t)}{\partial x^{2}}=f(x,t),\ t>\ 0,x\in(0,L)\\\psi(x,t)|_{x=0}=\psi(x,t)|_{x=L}=0\\\psi(x,t)|_{t=0}=0,\ x\in(0,L)\end{gathered} \tag{7.2.15a}$$

在源项 $f(x,t)$ 已知情况下, 正问题的解为

$$\psi(x,t)=\int_{0}^{t}\int_{0}^{L}\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi s}{L}\exp\left[-\frac{n^{2}\pi^{2}}{L^{2}}(t-\tau)\right]f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{7.2.15b}$$

逆问题: 在时间间隔 $t\in(0,T)$ 内测量 $x=L$ 的热流, 即

$$\left.\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=g^{\delta}(t),\ t\in(0,T) \tag{7.2.15c}$$

反演源项 $f(x,t)$. 由式 (7.2.15b) 得到

$$\begin{aligned}&\frac{2}{L}\int_{0}^{t}\int_{0}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi s}{L}\exp\left[-\frac{n^{2}\pi^{2}}{L^{2}}(t-\tau)\right]f(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\&\qquad=\left.\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=g^{\delta}(t),\ t\in(0,T)\end{aligned} \tag{7.2.16a}$$

注意: 仅仅由上式反演二元函数 $f(x,t)$ 比较困难. 假定源函数有特殊的形式 $f(x,t)=f(x)Q(t)$, 其中 $Q(t)$ 是已知函数. 于是方程 (7.2.16a) 简化为

$$\boldsymbol{K}f \equiv \int_0^L k(t,s)f(s)\mathrm{d}s = g^\delta(t),\ t \in (0,T) \tag{7.2.16b}$$

其中算子 $\boldsymbol{K}$ 的积分核为

$$k(t,s) \equiv \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi s}{L}\cdot\int_0^t Q(\tau)\exp\left[-\frac{n^2\pi^2}{L^2}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau \tag{7.2.16c}$$

进一步, 如果取 $Q(t)=Q_0\delta(t-0)$, 则上式简化为

$$k(t,s) \equiv \frac{2Q_0}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi s}{L}\cdot\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) \tag{7.2.16d}$$

Tikhonov 泛函取为

$$J_\alpha^\delta(\psi) = \int_0^T\left|\int_0^L k(x,s)f(s)\mathrm{d}s - g^\delta(t)\right|^2\mathrm{d}t + \alpha\int_0^L |f(x)|^2\mathrm{d}x \tag{7.1.17a}$$

把 $f(x)$ 用完备的函数系 $\{\sin(n\pi x/L)\}$ 来展开并且取前 $N$ 项

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{7.2.17b}$$

代入式 (7.2.17a) 得到

$$J_\alpha^\delta(f) = \sum_{i,j=1}^{N} w_{ij}a_i a_j - 2\sum_{j=1}^{N} v_j a_j + \int_0^T |g^\delta(t)|^2\mathrm{d}t \tag{7.2.17c}$$

其中

$$\begin{gathered} w_{ij} \equiv Q_0^2(-1)^{i+j+1}\frac{ij}{i^2+j^2}\left\{\exp\left[-\frac{(i^2+j^2)\pi^2}{L^2}T\right]-1\right\}+\alpha\frac{L}{2}\delta_{ij} \\ v_j \equiv Q_0(-1)^j\frac{j\pi}{L}\int_0^T g^\delta(t)\exp\left(-\frac{j^2\pi^2}{L^2}t\right)\mathrm{d}t \end{gathered} \tag{7.2.17d}$$

由 $J_\alpha^\delta(f)$ 极小得到系数 $a_n$ 满足的线性代数方程组

$$\sum_{i=1}^{N} w_{ij}a_i = v_j, (j=1,2,\cdots,N) \tag{7.2.18a}$$

从上式得到正则化近似解 $a_j^\delta$, $(j=1,2,\cdots,N)$, 然后代入式 (7.2.17b) 得到

$$f_\alpha^\delta(x)=\sum_{j=1}^{N}a_j^\delta\sin\frac{j\pi x}{L} \tag{7.2.18b}$$

在以上的一维逆问题例子中, 热传导算子比较简单, 故可以得到简单的第一类 Fredholm 积分方程, 然后利用 Tikhonov 正则化方法反演待求函数. 对系数逆问题, 热传导算子相对复杂, 必须采用迭代方法, 下面进一步介绍.

### 7.2.2　抛物型方程逆问题的脉冲谱迭代技术

**系数逆问题**　考虑二维有限区域 $G$ 内的热扩散问题, $\psi(x,y,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla\cdot[D(x,y)\nabla\psi]=f(x,y,t),\ t>0,\ (x,y)\in G \tag{7.2.19a}$$

初始条件和边界条件为

$$\begin{aligned}\psi(x,y,t)|_{t=0}&=\psi_0(x,y),\ (x,y)\in G+\partial G\\ \psi(x,y,t)|_{\partial G_1}&=\psi_1(x,y,t),\ t>0,\ (x,y)\in\partial G_1\\ \left.\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial n}\right|_{\partial G_2}&=0,\ t>0,\ (x,y)\in\partial G_2\end{aligned} \tag{7.2.19b}$$

其中区域 $G$ 的边界分成不重迭的二部分, 即 $\partial G=\partial G_1+\partial G_2$, 见图 7.1.2.

正问题: 已知 $D(x,y)$、$f(x,y,t)$、$\psi_0(x,y)$ 和 $\psi_1(x,y,t)$, 求温度场 $\psi(x,y,t)$.

逆问题: 已知 $f(x,y,t)$、$\psi_0(x,y)$、$\psi_1(x,y,t)$ 和附加的测量数据, 反演热导系数 $D(x,y)$. 附加测量数据可以是部分边界 $\partial G_2$ 上的温度场, 也可以是部分边界 $\partial G_1$ 上的热流等. 首先考虑比较简单的情形, 即附加测量数据为

$$\psi(x,y,t)|_{\partial G_2}=q^\delta(x,y,t),\ t>0,\ (x,y)\in\partial G_2 \tag{7.2.19c}$$

用 PST 构成迭代过程:

(1) 对方程 (7.2.19a)–(7.2.19c) 作 Laplace 变换, 把时间-空间域的问题转化到 "频率"-空间域

$$\tilde\psi(x,y,s)=\int_0^\infty\psi(x,y,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{7.2.20a}$$

于是得到

$$\nabla\cdot[D(x,y)\nabla\tilde\psi]=s\tilde\psi-\psi_0-\tilde f,\ s>0,\ (x,y)\in G \tag{7.2.20b}$$

注意: 初始条件已进入方程; 边界条件和附加测量数据分别变为

$$\begin{aligned}\tilde\psi(x,y,s)|_{\partial G_1}&=\tilde\psi_1(x,y,s),\ s>0,\ (x,y)\in\partial G_1\\ \left.\frac{\partial\tilde\psi(x,y,s)}{\partial n}\right|_{\partial G_2}&=0,\ s>0,\ (x,y)\in\partial G_2\end{aligned} \tag{7.2.20c}$$

和

$$\tilde{\psi}(x,y,s)|_{\partial G_2}=\tilde{q}^{\delta}(x,y,s),\ s>0,\ (x,y)\in\partial G_2 \tag{7.2.20d}$$

(2) 构成拟 Newton 迭代

$$\begin{gathered}D_{j+1}(x,y)=D_j(x,y)+\delta D_j(x,y)\\ \tilde{\psi}_{j+1}(x,y,s)=\tilde{\psi}_j(x,y,s)+\delta\tilde{\psi}_j(x,y,s)\end{gathered} \tag{7.2.21a}$$

代入方程 (7.2.20b) 和 (7.2.20c) 且忽略二阶项, 得到零阶和一阶近似满足的方程和边界条件分别为

$$\begin{gathered}\nabla\cdot[D_j(x,y)\nabla\tilde{\psi}_j]-s\tilde{\psi}_j=-\psi_0-\tilde{f}\\ \tilde{\psi}_j|_{\partial G_1}=\tilde{\psi}_1,\ \ \left.\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=0\end{gathered} \tag{7.2.21b}$$

和

$$\begin{gathered}\nabla\cdot[D_j(x,y)\nabla\delta\tilde{\psi}_j]-s\delta\tilde{\psi}_j=-\nabla\cdot[\delta D_j(x,y)\nabla\tilde{\psi}_j]\\ \delta\tilde{\psi}_j|_{\partial G_1}=0,\ \ \left.\frac{\partial\delta\tilde{\psi}}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=0\end{gathered} \tag{7.2.21c}$$

显然: (1) 方程 (7.2.21b) 构成椭圆型方程的边值问题, 是适定的正问题. 对给定的 $s$, 用数值方法就可以得到 $\tilde{\psi}_j=\tilde{\psi}_j(x,y,s)$; (2) 方程 (7.2.21c) 给出了热导系数扰动 $\delta D_j(x,y)$ 与场扰动 $\delta\tilde{\psi}_j$ 联系的微分关系. 利用 Green 函数, 写成积分形式

$$\delta\tilde{\psi}_j(x,y,s)=-\iint_G\tilde{G}_j\nabla'\cdot[\delta D_j(x',y')\nabla'\tilde{\psi}_j]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{7.2.22a}$$

其中 Green 函数 $\tilde{G}_j=\tilde{G}_j(x,y,x',y',s)$ 满足

$$\begin{gathered}\nabla\cdot[D_j(x,y)\nabla\tilde{G}_j]-s\tilde{G}_j=\delta(x-x')\delta(y-y')\\ \tilde{G}_j|_{\partial G_1}=0,\ \ \left.\frac{\partial\tilde{G}_j}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=0\end{gathered} \tag{7.2.22b}$$

注意: 每次迭代过程中 Green 函数都不同. 利用 Green 公式, 方程 (7.2.22a) 改写成 (注意恒等式 $\tilde{G}_j\nabla'\cdot(\delta D_j\nabla\tilde{\psi}_j)=\nabla'\cdot(\tilde{G}_j\delta D_j\nabla'\tilde{\psi}_j)-\delta D_j\nabla'\tilde{G}_j\cdot\nabla'\tilde{\psi}_j$)

$$\delta\tilde{\psi}_j=-\int_{\partial G}\delta D_j\tilde{G}_j\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial n'}\mathrm{d}\Gamma'+\iint_G\delta D_j\nabla'\tilde{G}_j\cdot\nabla'\tilde{\psi}_j\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{7.2.22c}$$

其中 $\mathrm{d}\Gamma'$ 是边界 $\partial G$ 上的线元, 注意到: 在 $\partial G_1$ 上, $\tilde{G}_j|_{\partial G_1}=0$, 而在 $\partial G_2$ 上, $(\partial\tilde{\psi}_j/\partial n')|_{\partial G_2}=0$, 故上式第一个线积分为零, 于是

$$\delta\tilde{\psi}_j(x,y,s)=\iint_G\delta D_j(x',y')\nabla'\tilde{G}_j\cdot\nabla'\tilde{\psi}_j\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{7.2.22d}$$

取近似 $\delta\tilde{\psi}_j = \tilde{\psi}_{j+1} - \tilde{\psi}_j \approx \tilde{\psi} - \tilde{\psi}_j$, 上式变成

$$\tilde{\psi}(x,y,s) - \tilde{\psi}_j(x,y,s) = \iint_G \delta D_j(x',y')\nabla'\tilde{G}_j \cdot \nabla'\tilde{\psi}_j \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{7.2.23a}$$

在部分边界 $\partial G_2$ 上取值

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}(\tilde{q}^\delta - \tilde{\psi}_j)|_{\partial G_2} = \iint_G \delta D_j(x',y')\nabla'\tilde{G}_j \cdot \nabla'\tilde{\psi}_j \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\ s>0,\ (x,y)\in\partial G_2\end{gathered} \tag{7.2.23b}$$

上式就是决定 $\delta D_j(x,y)$ 的第一类 Fredholm 积分方程. 把上式改写成

$$\begin{gathered}\iint_G k(x,y,x',y',s)\delta D_j(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = \chi(x,y,s) \\ s>0,\ (x,y)\in\partial G_2\end{gathered} \tag{7.2.23c}$$

其中积分核和非齐次项为

$$\begin{gathered}k(x,y,x',y',s) \equiv \nabla'\tilde{G}_j \cdot \nabla'\tilde{\psi}_j \\ \chi(x,y,s) \equiv \frac{1}{2}(\tilde{q}^\delta - \tilde{\psi}_j)|_{\partial G_2}\end{gathered} \tag{7.2.23d}$$

设边界 $\partial G_2$ 的参数形式为: $x = x(\tau);\ y = y(\tau),\ \tau \in (0,\tau_0)$, 则方程 (7.2.23b) 化为

$$\begin{gathered}\iint_G \tilde{k}(\tau,s,x',y')\delta D_j(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = \tilde{\chi}(\tau,s) \\ s>0,\ \tau\in(0,\tau_0)\end{gathered} \tag{7.2.23e}$$

其中积分核和非齐次项为

$$\begin{gathered}\tilde{\chi}(\tau,s) \equiv \chi(x(\tau),y(\tau),s) \\ \tilde{k}(\tau,s,x',y') \equiv k(x(\tau),y(\tau),x',y',s)\end{gathered} \tag{7.2.23f}$$

如果附加测量数据为

$$D(x,y)\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial n}\bigg|_{\partial G_1} = q^\delta(x,y,t),\ ,\ t>0,\ (x,y)\in\partial G_1 \tag{7.2.24a}$$

或者

$$D(x,y)\frac{\partial\tilde{\psi}(x,y,s)}{\partial n}\bigg|_{\partial G_1} = \tilde{q}^\delta(x,y,s),\ ,\ s>0,\ (x,y)\in\partial G_1 \tag{7.2.24b}$$

对方程 (7.2.22d) 求方向导数, 然后在部分边界 $\partial G_1$ 上取值

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\ \frac{\partial\delta\tilde{\psi}_j}{\partial n}\bigg|_{\partial G_1} = \iint_G \delta D_j(x',y')\nabla'\frac{\partial\tilde{G}_j}{\partial n} \cdot \nabla'\tilde{\psi}_j \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\ s>0,\ (x,y)\in\partial G_1\end{gathered} \tag{7.2.24c}$$

分析: Green 函数 $\tilde{G}_j$ 含有奇性, 对二维问题, $\tilde{G}_j$ 的奇性为 $\tilde{G}_j \sim \ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$, $\nabla'\tilde{G}_j \sim 1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$, $\nabla'\partial\tilde{G}_j/\partial n \sim 1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2$, 根据 5.1.2 小节讨论, 方程 (7.2.23b) 是弱奇异积分方程, 而方程 (7.2.24c) 是奇异积分方程, 其数值计算要复杂得多.

**奇性处理** 为了减弱方程 (7.2.24c) 中核的奇性, 对其作积分处理: 以 $D_j(x,y)\tilde{\psi}_j(x,y,s)$ 乘方程 (7.2.24c) 二边且在 $\partial G_1$ 上作线积分

$$\frac{1}{2}\int_{\partial G_1} \left.\frac{\partial\delta\tilde{\psi}_j}{\partial n}\right|_{\partial G_1} D_j\tilde{\psi}_j \mathrm{d}\Gamma = \iint_G \delta D_j(x',y')\nabla' I_j \cdot \nabla'\tilde{\psi}_j \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{7.2.25a}$$

其中线积分 $I_j$ 为

$$I_j(x',y',s) \equiv \int_{\partial G_1} D_j\tilde{\psi}_j \frac{\partial \tilde{G}_j}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma \tag{7.2.25b}$$

注意到式 (7.2.22b) 中的边界条件, 上式线积分可以扩展到整个边界 $\partial G$, 形成闭合路径积分, 于是由 Gauss 积分公式得到

$$\begin{aligned} I_j &= \int_{\partial G} D_j\tilde{\psi}_j \frac{\partial \tilde{G}_j}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma = \iint_G \nabla\cdot(D_j\tilde{\psi}_j\nabla\tilde{G}_j)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_G [\tilde{\psi}_j\nabla\cdot(D_j\nabla\tilde{G}_j) + D_j\nabla\tilde{\psi}_j\cdot\nabla\tilde{G}_j]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \tilde{\psi}_j(x',y',s) + \iint_G (s\tilde{\psi}_j\tilde{G}_j + D_j\nabla\tilde{\psi}_j\cdot\nabla\tilde{G}_j)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{7.2.25c}$$

得到上式, 利用了 $\tilde{G}_j$ 满足的方程, 即方程 (7.2.22b) 的第一式. 进一步利用恒等式 $D_j\nabla\tilde{\psi}_j\cdot\nabla\tilde{G}_j = \nabla\cdot(D_j\tilde{G}_j\nabla\tilde{\psi}_j) - \tilde{G}_j\nabla\cdot(D_j\nabla\tilde{\psi}_j)$ 和 $\tilde{\psi}_j$ 满足的方程 (7.2.21b), 式 (7.2.25c) 变成

$$\begin{aligned} I_j &= \tilde{\psi}_j + \iint_G [\nabla\cdot(D_j\tilde{G}_j\nabla\tilde{\psi}_j) - \tilde{G}_j[\nabla\cdot(D_j\nabla\tilde{\psi}_j) - s\tilde{\psi}_j]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \tilde{\psi}_j + \int_{\partial G} D_j\tilde{G}_j\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma + \iint_G (\psi_0+\tilde{f})\tilde{G}_j\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \tilde{\psi}_j + \iint_G (\psi_0+\tilde{f})\tilde{G}_j\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{7.2.25d}$$

上式代入方程 (7.2.25a) 得到

$$\iint_G k_j(x',y',s)\delta D_j(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = g_j(s) \tag{7.2.26a}$$

其中积分核和非齐次项分别为

$$\begin{aligned} k_j(x',y',s) &\equiv \nabla' I_j(x',y',s)\cdot\nabla'\tilde{\psi}_j(x',y',s) \\ g_j(s) &\equiv \frac{1}{2}\int_{\partial G_1}\left(\tilde{q}^\delta - D_j\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial n}\right)\tilde{\psi}_j\mathrm{d}\Gamma \end{aligned} \tag{7.2.26b}$$

显然, 方程 (7.2.26a) 的奇性远比方程 (7.2.24c) 要弱, 代价是离散化后的方程个数大大下降, 因为 $g_j(s)$ 仅仅是 $s$ 的函数, 这对决定二元函数 $\delta D_j(x',y')$ 是不利的. 因此, 方程 (7.2.26b) 是严重不适定的.

注意: 如果系数 $D=D(x,y,t)$ 与时间有关, 显然 PST 方法就不适合了, 而最佳摄动量法仍然适用 (见 7.2.3 小节讨论).

**逆源问题**　与上面讨论的例子类似, 考虑二维有限区域 $G$ 内的热扩散问题, $\psi(x,y,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla^2\psi=\chi(t)f(x,y),\ t>0,\,(x,y)\in G \tag{7.2.27a}$$

初始条件、边界条件和测量数据由式 (7.2.19b) 和 (7.2.19c) 表示, 且取 $\psi_0(x,y)=0$, 即

$$\begin{aligned}\psi(x,y,t)|_{t=0}&=0,\ (x,y)\in G+\partial G\\ \psi(x,y,t)|_{\partial G_1}&=\psi_1(x,y,t),\ t>0,\ (x,y)\in\partial G_1\\ \left.\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial n}\right|_{\partial G_2}&=0,\ t>0,\,(x,y)\in\partial G_2\\ \psi(x,y,t)|_{\partial G_2}&=q^\delta(x,y,t),\ t\in(0,T),\ (x,y)\in\partial G_2\end{aligned} \tag{7.2.27b}$$

逆问题: 由测量数据 $q^\delta(x,y,t)$ 反演 $f(x,y)$.

对方程 (7.2.27a) 作 Laplace 变换, 把时间-空间域的问题转化到 “频率”-空间域

$$\tilde\psi(x,y,s)=\int_0^\infty\psi(x,y,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{7.2.27c}$$

得到

$$\nabla^2\tilde\psi-s\tilde\psi=-\tilde\chi(s)f(x,y),\ s>0,\,(x,y)\in G \tag{7.2.28a}$$

其中 $\tilde\chi(s)$ 是 $\chi(t)$ 的 Laplace 变换. 对边界条件和附加测量数据作 Laplace 变换分别得到方程 (7.2.20c) 和 (7.2.20d). 设 Green 函数 $\tilde G=\tilde G(x,y,x',y',s)$ 满足

$$\begin{gathered}\nabla^2\tilde G-s\tilde G=\delta(x-x')\delta(y-y')\\ \tilde G|_{\partial G_1}=0,\quad \left.\frac{\partial\tilde G}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=0\end{gathered} \tag{7.2.28b}$$

由 Green 公式

$$\int_G(\tilde\psi\nabla'^2\tilde G-\tilde G\nabla'^2\tilde\psi)\mathrm{d}\tau'=\iint_{\partial G}\left(\tilde\psi\frac{\partial\tilde G}{\partial n'}-\tilde G\frac{\partial\tilde\psi}{\partial n'}\right)\mathrm{d}S' \tag{7.2.28c}$$

注意到方程 (7.2.20c) 和 (7.2.28b) 中的边界条件, 上式简化为

$$\tilde{\psi}(x,y,s) = -\tilde{\chi}(s)\int_G f(x',y')\tilde{G}\mathrm{d}\tau' + \iint_{\partial G_1} \tilde{\psi}_1(x',y',s)\frac{\partial \tilde{G}}{\partial n'}\mathrm{d}S' \quad s>0,\ (x,y)\in G \tag{7.2.29a}$$

当 $(x,y)$ 趋近边界 $\partial G_2$ 时

$$\frac{1}{2}\tilde{q}(x,y,s) = -\tilde{\chi}(s)\int_G f(x',y')\tilde{G}\mathrm{d}\tau' + \iint_{\partial G_1} \tilde{\psi}_1(x',y',s)\frac{\partial \tilde{G}}{\partial n'}\mathrm{d}S' \quad s>0,\ (x,y)\in \partial G_2 \tag{7.2.29b}$$

即 $f(x,y)$ 满足第一类 Fredholm 积分方程

$$\int_G k(x,y,x',y',s)f(x',y')\mathrm{d}\tau' = g(x,y,s),\ s>0,\ (x,y)\in\partial G_2 \tag{7.2.29c}$$

其中积分核和非齐次项分别为

$$\begin{gathered} k(x,y,x',y',s) \equiv \tilde{\chi}(s)\tilde{G}(x,y,x',y',s) \\ g(x,y,s) \equiv \iint_{\partial G_1}\tilde{\psi}_1(x',y',s)\frac{\partial \tilde{G}}{\partial n'}\mathrm{d}S' - \frac{1}{2}\tilde{q}(x,y,s) \end{gathered} \tag{7.2.29d}$$

注意: 方程 (7.2.29c) 也可以化成方程 (7.2.23e). 形式上, 通过求解方程 (7.2.29c) 就可以的到源的空间分布 $f(x,y)$.

注意: 如果源项 $f(x,y,t)$ 的时间与空间部分不能分离, 经过 Laplace 变换后为 $\tilde{f}(x,y,s)$, 故必须求解每个 "谱" 点 $s$ 的值 $\tilde{f}(x,y,s)$, 然后通过 Laplace 逆变换得到 $f(x,y,t)$. 事实上, 此时我们必须直接在时域上运算, 由方程 (3.5.22c)

$$\begin{aligned} \psi(x,y,t) = &\int_0^t\int_G f(x',y',t')G(x,y,x',y',t-\tau)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t\iint_{\partial G_1}\psi_1(x',y',\tau)\cdot\frac{\partial G(x,y,x',y',t-\tau)}{\partial n'}\mathrm{d}S'\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{7.2.30a}$$

其中 Green 函数 $G(x,y,x',y',t)$ 满足

$$\begin{gathered} \frac{\partial G}{\partial t} - \nabla^2 G = 0,\ (x,y),\ (x',y')\in G,\ t\in(0,T) \\ G|_{t=0} = \delta(x-x',y-y'),\ (x,y),\ (x',y')\in G \\ \psi|_{\partial G_1} = \psi_1(x,y,t),\ t>0,\ (x,y)\in\partial G_1 \\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\partial G_2} = 0,\ t>0,\ (x,y)\in\partial G_2 \end{gathered} \tag{7.2.30b}$$

当 $(x,y)$ 趋近边界 $\partial G_2$ 时

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_G f(x',y',t')G(x,y,x',y',t-\tau)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}q^\delta(x,y,t)\\ -\int_0^t\iint_{\partial G_1}\psi_1(x',y',\tau)\cdot\frac{\partial G(x,y,x',y',t-\tau)}{\partial n'}\mathrm{d}S'\mathrm{d}\tau\\ (x,y)\in\partial G_2,\ t\in(0,T)\end{aligned} \tag{7.2.30c}$$

显然, 当 $(x,y)\in\partial G_2$ 时, 上式右边的非齐次项是二元函数 (与方程 (7.2.23e) 类似), 而待求的 $f(x,y,t)$ 是三元函数, 故方程 (7.2.30c) 是严重不适定的.

**例 7.2.1**　考虑定义在上半平面的热传导方程的逆源问题

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla^2\psi=\chi(t)f(x,y),\ t>0,\ x\in(-\infty,\infty),\ y>0\\ \psi(x,y,t)|_{t=0}=0,\ x\in(-\infty,\infty),\ y>0\\ \psi(x,y,t)|_{y=0}=g(x,t),\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0\end{aligned} \tag{7.2.31a}$$

附加测量数据为直线 $y=y_0$ 上的场分布

$$\psi(x,y,t)|_{y=y_0}=q^\delta(x,t),\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0 \tag{7.2.31b}$$

反演源函数 $f(x,y)$. 作 Laplace 变换

$$\tilde\psi(x,y,s)=\int_0^\infty\psi(x,y,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t, s>0 \tag{7.2.31c}$$

则方程 (7.2.31a) 和 (7.2.31b) 变为

$$\begin{aligned}\nabla^2\tilde\psi-s\tilde\psi=-\tilde\chi(s)f(x,y),\ s>0,\ x\in(-\infty,\infty),\ y>0\\ \tilde\psi(x,y,s)|_{y=0}=\tilde g(x,s),\ x\in(-\infty,\infty),\ s>0\\ \tilde\psi(x,y,s)|_{y=y_0}=\tilde q^\delta(x,s),\ x\in(-\infty,\infty),\ s>0\end{aligned} \tag{7.2.32a}$$

定义 Green 函数 $\tilde G=\tilde G(x,y,x',y',s)$ 满足

$$\begin{aligned}\nabla^2\tilde G-s\tilde G=-\delta(x,y,x',y')\ s>0,\ (x,x')\in(-\infty,\infty),\ (y,y')>0\\ \tilde G(x,y,x',y',s)|_{y=0}=0,\ (x,x')\in(-\infty,\infty),\ (y,y')>0\end{aligned} \tag{7.2.32b}$$

由式 (3.3.45a), 基本解为

$$G_0(\boldsymbol r,\boldsymbol r')=\frac{1}{2\pi}K_0(\sqrt{s}|\boldsymbol r-\boldsymbol r'|),\ (s>0) \tag{7.2.32c}$$

其中 $|\boldsymbol r-\boldsymbol r'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$, 为了满足边界条件 $\tilde G(x,y,x',y',s)|_{y=0}=0$, 用镜像法构成 Green 函数

$$\tilde G(x,y,x',y',s)=\frac{1}{2\pi}[K_0(\sqrt{s}|\boldsymbol r-\boldsymbol r'|)-K_0(\sqrt{s}|\boldsymbol r-\boldsymbol r''|)] \tag{7.2.32d}$$

其中 $\boldsymbol{r}''=(x',-y')$, 故 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|=\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}$. 由 Green 公式 (7.2.28c)

$$\tilde{\psi}(x,y,s)=-\tilde{\chi}(s)\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x',y')\tilde{G}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'-\int_{-\infty}^\infty \tilde{g}(x',s)\left(\frac{\partial\tilde{G}}{\partial y'}\right)_{y'=0}\mathrm{d}x' \quad (7.2.33\text{a})$$

注意到

$$\left(\frac{\partial\tilde{G}}{\partial y'}\right)_{y'=0}=\frac{y\sqrt{s}}{\pi}\frac{1}{R_0}K_1(\sqrt{s}R_0) \quad (7.2.33\text{b})$$

其中 $R_0\equiv\sqrt{(x-x')^2+y^2}$. 上式代入式 (7.2.33a) 得到

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(x,y,s)=&-\tilde{\chi}(s)\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x',y')\tilde{G}(x,y,x',y',s)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\\&-\frac{y\sqrt{s}}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \tilde{g}(x',s)\frac{1}{R_0}K_1(\sqrt{s}R_0)\mathrm{d}x'\end{aligned} \quad (7.2.33\text{c})$$

上式在直线 $y=y_0$ 上取值, 并且注意到附加测量条件 $\tilde{\psi}(x,y,s)|_{y=y_0}=\tilde{q}^\delta(x,s)$, 得到

$$\begin{aligned}-\tilde{q}^\delta(x,s)=&\tilde{\chi}(s)\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x',y')\frac{1}{2\pi}[K_0(\sqrt{s}R_1)-K_0(\sqrt{s}R_2)]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\\&+\frac{y\sqrt{s}}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \tilde{g}(x',s)\frac{1}{R_3}K_1(\sqrt{s}R_1)\mathrm{d}x'\end{aligned} \quad (7.2.33\text{d})$$

其中 $R_3\equiv\sqrt{(x-x')^2+y_0^2}$ 和

$$\begin{aligned}R_1&\equiv\sqrt{(x-x')^2+(y_0-y')^2}\\R_2&\equiv\sqrt{(x-x')^2+(y_0+y')^2}\end{aligned} \quad (7.2.33\text{e})$$

令积分核和非齐次项为

$$\begin{aligned}k(x,s,x',y')&\equiv\frac{\tilde{\chi}(s)}{2\pi}[K_0(\sqrt{s}R_2)-K_0(\sqrt{s}R_3)]\\q^\delta(x,s)&\equiv-\tilde{q}^\delta(x,s)-\frac{y\sqrt{s}}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \tilde{g}(x',s)\frac{1}{R_1}K_1(\sqrt{s}R_1)\mathrm{d}x'\end{aligned} \quad (7.2.34\text{a})$$

方程 (7.2.33d) 写成第一类 Fredholm 积分方程

$$\begin{gathered}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x',y')k(x,s,x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=q^\delta(x,s)\\x\in(-\infty,\infty),\ \ s>0\end{gathered} \quad (7.2.34\text{b})$$

利用 Tikhonov 正则化方法, 原则上可以得到源的分布函数 $f(x,y)$.

### 7.2.3 抛物型方程逆问题的最佳摄动量法

考虑一维有限区间 $x \in (0, L)$ 上的抛物型方程的混合问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right] + c(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial x} + f(x,t) \\ t > 0,\ x \in (0, L)\end{gathered} \tag{7.2.35a}$$

初始条件和边界条件分别为

$$\begin{gathered}\psi(x,t)|_{t=0} = \psi_0(x),\ x \in (0, L) \\ \psi(x,t)|_{x=0} = g_1(t),\ t > 0 \\ \left.\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = g_2(t),\ t > 0\end{gathered} \tag{7.2.35b}$$

注意: 因系数 $c(x, t)$ 与时间有关, 故 PST 迭代法不适合运用于方程 (7.2.35a).

正问题: 给定方程的系数 $k(x)$ 和 $c(x, t)$、源函数 $f(x, t)$、初始条件 $\psi_0(x)$, 以及边界条件 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$, 求场分布 $\psi(x, t)$.

方程 (7.2.35a) 的逆问题可以有多种形式. 为了简单, 我们假定通过附加的测量数据, 即端点 $x = L$ 的函数值

$$\psi(x,t)|_{x=L} = \psi_L^{\delta}(t),\ t \in (0, T) \tag{7.2.35c}$$

反演参数 $c(x, t)$. 根据 7.1.5 小节的最佳摄动量法, 构成如下迭代公式

$$c_{n+1}(x,t) = c_n(x,t) + \delta c_n(x,t) \tag{7.2.36a}$$

扰动量 $\delta c_n(x, t)$ 由下列非线性最优化问题决定

$$J_{\alpha}(\delta c) = \int_0^T |\psi_{n+1}(L,t) - \psi_L^{\delta}(t)|^2 \mathrm{d}t + \alpha \int_0^T \int_0^L |\delta c_n(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{7.2.36b}$$

设函数系 $\{\phi_j(x, t)\}$ 是 $(0, L) \times (0, T)$ 上的完备系, 把函数 $c(x, t)$ 作广义 Fourier 展开且取前 $N$ 项近似

$$c(x,t) \approx \sum_{j=1}^{N} a_j \phi_j(x,t) \tag{7.2.36c}$$

于是, 可以把函数 $c(x, t)$ 的扰动转变成广义 Fourier 展开系数的扰动

$$\delta c_n(x,t) \approx \sum_{j=1}^{N} \delta a_j \phi_j(x,t) \tag{7.2.36d}$$

因此, 只要求出展开系数的扰动, 就可以得到第 $n$ 次修正量 $\delta c_n(x,t)$. 方程 (7.1.45a) 变成

$$\psi_{n+1}(x,t)\approx\psi_n[c_n(x,t),x,t]+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\delta a_j+\cdots \tag{7.2.37a}$$

其中

$$\alpha_j(x,t)=\lim_{\Delta_j\to 0}\frac{\psi_n[c_n(x,t)+\Delta_j\phi_j(x,t),x,t]-\psi_n[c_n(x,t),x,t]}{\Delta_j} \tag{7.2.37b}$$

把式 (7.2.37a) 代入式 (7.2.36b) 得到

$$\begin{aligned}J_\alpha(\delta c)=&\int_0^T\left|\psi_n(L,t)-\psi_L^\delta(t)+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(L,t)\delta a_j\right|^2\mathrm{d}t\\&+\alpha\int_0^T\int_0^L|\delta c_n(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{7.2.38a}$$

其中 $\psi_n(L,t)$ 是当 $c(x,t)=c_n(x,t)$ 时, 方程 (7.2.35a) 和 (7.2.35b) 的正问题给出的端点 $x=L$ 值, $\alpha_j(L,t)$ 表示 $\alpha_j(x,t)$ 在端点 $x=L$ 取值. 上式展开后得到

$$J_\alpha(\delta c)=\sum_{i,j=1}^{N}(a_{ij}+\alpha b_{ij})\delta a_i\delta a_j+2\sum_{j=1}^{N}b_j\delta a_j+d \tag{7.2.38b}$$

其中诸系数为

$$\begin{aligned}a_{ij}&\equiv\int_0^T\alpha_i^*(L,t)\alpha_j(L,t)\mathrm{d}t\\b_{ij}&\equiv\int_0^T\int_0^L\phi_i(x,t)\phi_j^*(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\b_j&\equiv\mathrm{Re}\int_0^T[\psi_n(L,t)-\psi_L^\delta(t)]\alpha_j^*(L,t)\mathrm{d}t\\d&\equiv\int_0^T|\psi_n(L,t)-\psi_L^\delta(t)|^2\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{7.2.38c}$$

由 $J_\alpha(\delta c)$ 极小得到决定 $\delta a_i$ 的代数方程组

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{ij}+\alpha b_{ij})\delta a_i=b_i,\ \ (i=1,2,\cdots,N) \tag{7.2.39a}$$

于是, 我们求得 $(n+1)$ 次迭代过程的系数

$$c_{n+1}(x,t)\approx c_n(x,t)+\sum_{j=1}^{N}\delta a_j\phi_j(x,t) \tag{7.2.39b}$$

积分 $d$ 可作为误差函数, 当 $d<\varepsilon$ 时, 迭代完成. 完备函数系可以取幂次函数

$$\{\phi_j(x,t)\}=\{1,x,t,xt,x^2,t^2,\cdots\} \tag{7.2.39c}$$

由 7.1.5 小节及以上讨论可见, 最佳摄动量法迭代过程中与微分算子的关系体现在正问题的决定上, 只要正问题可解, 就能用最佳摄动量法求解逆问题, 故对波动方程或者非线性方程同样适用.

注意: 至于泛函的形式, 与附加测量条件和待反演的参数有关. 例如: (1) 如果已经知道 $c(x,t)=c(x)$ 或者 $c(x,t)=c(t)$, 则相应的泛函分别可以取为

$$\begin{aligned}
J_\alpha(\delta c)&=\int_0^T|\psi_{n+1}(L,t)-\psi_L^\delta(t)|^2\mathrm{d}t+\alpha\int_0^L|\delta c_n(x)|^2\mathrm{d}x\\
J_\alpha(\delta c)&=\int_0^T|\psi_{n+1}(L,t)-\psi_L^\delta(t)|^2\mathrm{d}t+\alpha\int_0^T|\delta c_n(t)|^2\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{7.2.40a}$$

(2) 如果附加测量数据为

$$\psi(x,t)|_{t=T}=\psi_T^\delta(x),x\in(0,L) \tag{7.2.40b}$$

则相应的泛函可以取为

$$J_\alpha(\delta c)=\int_0^L|\psi_{n+1}(x,T)-\psi_T^\delta(x)|^2\mathrm{d}x+\alpha\int_0^L|\delta c_n(x)|^2\mathrm{d}x \tag{7.2.40c}$$

(3) 如果需要反演的函数是方程的源项 $f(x,t)$ (逆源问题), 只要把式 (7.2.36a)–(7.1.39b) 中的 $c(x,t)$ 修改成 $f(x,t)$ 即可, 具体过程迭代类似. 因此, 最佳摄动量法是一个非常灵活的方法.

**双参数反演**　以方程 (7.2.35a)、(7.2.35b) 和 (7.2.35c) 为例, 如果希望同时反演二个系数 $c(x,t)$ 和 $f(x,t)$. 我们可以构成泛函

$$J_\alpha(\delta c,\delta f)=\int_0^T|\psi_{n+1}(L,t)-\psi_L^\delta(t)|^2\mathrm{d}t+\alpha\Omega(c,f) \tag{7.2.41a}$$

其中稳定化泛函取为

$$\Omega(c,f)\equiv\int_0^T\int_0^L[q_1|\delta c_n(x,t)|^2+q_2|\delta f_n(x,t)|^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{7.2.41b}$$

式中常数 $q_1>0$ 和 $q_2>0$ 可看作为权重因子或量纲因子. 扰动的展开为

$$\begin{aligned}
\delta c_n(x,t)&\approx\sum_{j=1}^N\delta a_j\phi_j(x,t)\\
\delta f_n(x,t)&\approx\sum_{j=1}^N\delta e_j\phi_j(x,t)
\end{aligned} \tag{7.2.41c}$$

注意: 一般 $c(x,t)$ 和 $f(x,t)$ 的展开项数不同, 但只要取最大者即可. 方程 (7.2.37a) 修改为

$$\psi_{n+1}(x,t) \approx \psi_n(c_n, f_n, x, t) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \delta a_j + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \delta e_j + \cdots \tag{7.2.42a}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_j(x,t) &= \lim_{\Delta_j \to 0} \frac{\psi_n(c_n + \Delta_j \phi_j, f_n, x, t) - \psi_n(c_n, f_n, x, t)}{\Delta_j} \\ \beta_j(x,t) &= \lim_{\Delta_j \to 0} \frac{\psi_n(c_n, f_n + \Delta_j \phi_j, x, t) - \psi_n(c_n, f_n, x, t)}{\Delta_j} \end{aligned} \tag{7.2.42b}$$

把式 (7.2.42a) 代入方程 (7.2.41a) 得到类似于式 (7.2.38a) 的泛函式

$$J_\alpha(\delta c, \delta f) = \int_0^T \left| \psi_n(L,t) - \psi_L^\delta(t) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(L,t) \delta a_j + \sum_{j=1}^{N} \beta_j(L,t) \delta e_j \right|^2 \mathrm{d}t + \alpha \Omega(c,f)$$

上式展开后得到

$$\begin{aligned} J_\alpha(\delta c, \delta f) = & \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij} + \alpha q_1 b_{ij}) \delta a_i \delta a_j + 2 \sum_{j=1}^{N} b_j \delta a_j \\ & + \sum_{i,j=1}^{N} (e_{ij} + \alpha q_2 b_{ij}) \delta e_i \delta e_j + 2 \sum_{j=1}^{N} g_j \delta e_j + 2 \sum_{i,j=1}^{N} h_{ij} \delta a_i \delta e_j + d \end{aligned} \tag{7.2.43a}$$

其中系数 $a_{ij}$, $b_{ij}$, $b_j$ 和 $d$ 由式 (7.2.38c) 决定, 系数 $e_{ij}$ 与 $a_{ij}$ 类似, 而 $g_j$ 与 $b_j$ 类似, 只要把 $\alpha_j(L,t)$ 换成 $\beta_j(L,t)$ 即可, 交叉项系数为

$$h_{ij} \equiv \mathrm{Re} \int_0^T \beta_i^*(L,t) \alpha_j(L,t) \mathrm{d}t \tag{7.2.43b}$$

由 $J_\alpha(\delta a, \delta f)$ 极小得到决定 $\delta a_i$ 和 $\delta e_i$ 的代数方程组

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} (a_{ij} + \alpha q_1 b_{ij}) \delta a_i + \sum_{i=1}^{N} h_{ij} \delta e_i = b_j \\ \sum_{i=1}^{N} (e_{ij} + \alpha q_2 b_{ij}) \delta e_i + \sum_{i=1}^{N} h_{ji} \delta a_i = g_j \end{aligned} \tag{7.2.43c}$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, N$. 得到 $\delta a_i$ 与 $\delta e_i$ 的解后, 就完成了一次迭代, 收敛判据也可以选为 $d < \varepsilon$.

### 7.2.4 光热测量中热导系数的反演

考虑光热测量中热导系数深度分布的逆问题. 如图 7.2.1, 激光束垂直入射到层状样品表面提供热产生源, 从而在样品内部产生温度场分布. 假定入射激光束足够宽, 仅需考虑一维分布, 温度场 $\psi(x,t)$ 满足热扩散方程和边界条件

$$\begin{gathered}\rho c\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right]=0,\ t>0,\ x\in(0,L)\\ \psi(x,t)|_{t=0}=0,\ x\in[0,L]\\ -k(0)\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0}=g(t);\ k(L)\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=L}=0\end{gathered}\tag{7.2.44a}$$

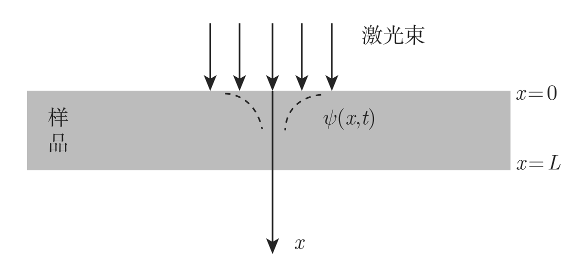



图 7.2.1 光热测量样品表面的温度

其中 $\rho$ 和 $c$ 分别是材料的密度和比热, 可假定与深度无关, $k(x)$ 是材料的热导系数深度分布, 依赖于深度 $x$, $L$ 是样品的厚度. 方程 (7.2.44a) 中 $g(t)$ 是样品吸收光能而产生的表面热流, 第二式是由于空气的热导系数与样品相比可忽略不计, 因而下表面热流为零. 实验中可测量的量为表面的瞬态温度

$$\psi(x,t)|_{x=0}=\psi_0^\delta(t),\ t\in(0,T)\tag{7.2.44b}$$

逆问题为: 通过实验测量数据 $\psi_0^\delta(t)$, 反演热导系数深度分布 $k(x)$. 我们采用 PST 技术, 过程如下.

首先, 对式 (7.2.44a) 和 (7.2.44b) 作 Fourier 变换

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\omega\rho c\psi(x,\omega)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right]=0,\ x\in(0,L)\\ -k(0)\left.\frac{\mathrm{d}\psi(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right|_{z=0}=g(\omega);\ k(L)\left.\frac{\mathrm{d}\psi(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}=0\\ \psi(x,\omega)|_{x=0}=\psi_0^\delta(\omega)\end{gathered}\tag{7.2.44c}$$

注意: 这里用 Fourier 变换, 而不用 Laplace 变换, 因为 $\psi_0(\omega)$ 可直接测量, 而无须测量瞬态信号 $\psi_0(t)$, 后者的测量反而比较困难.

第二步, 建立迭代过程, 令

$$\begin{gathered}\psi_{n+1}(x,\omega)=\psi_n(x,\omega)+\delta\psi_n(x,\omega)\\ k_{n+1}(x)=k_n(x)+\delta k_n(x)\end{gathered} \tag{7.2.45a}$$

代入方程 (7.2.44c), 并忽略 $\delta\psi_n(x,\omega)$ 和 $\delta k_n(x)$ 的高阶项, 得到

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\omega\rho c\psi_n(x,\omega)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k_n(x)\frac{\mathrm{d}\psi_n(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right]=0,\ \ x\in(0,L)\\ -k(0)\left.\frac{\mathrm{d}\psi_n(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=g(\omega);\ \ k_n(L)\left.\frac{\mathrm{d}\psi_n(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}=0\end{gathered} \tag{7.2.45b}$$

以及

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\omega\rho c\delta\psi_n(x,\omega)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k_n(x)\frac{\mathrm{d}\delta\psi_n(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\delta k_n(x)\frac{\mathrm{d}\psi_n(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right]\\ -k_n(0)\left.\frac{\mathrm{d}\delta\psi_n(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\delta k_n(0)\left.\frac{\mathrm{d}\psi_n(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}\\ k_n(L)\left.\frac{\mathrm{d}\delta\psi_n(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}=\delta k_n(L)\left.\frac{\mathrm{d}\psi_n(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}\end{gathered} \tag{7.2.45c}$$

为了避免使用 Green 函数, 利用过程: 方程 (7.2.45b) 和 (7.2.45c) 的第一式两边分别乘 $\delta\psi_n$ 和 $\psi_n$, 把所得的二式相减, 并对变量 $x$ 积分得到

$$\begin{gathered}\int_0^L\left[\delta\psi_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k_n\frac{\mathrm{d}\psi_n}{\mathrm{d}x}\right)-\psi_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k_n\frac{\mathrm{d}\delta\psi_n}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x\\ =\int_0^L\psi_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\delta k_n\frac{\mathrm{d}\psi_n}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\end{gathered} \tag{7.2.45d}$$

对上式分部积分, 并且利用方程 (7.2.45b) 和 (7.2.45c) 中的边界条件得到

$$\int_0^L\delta k_n(x)\left[\frac{\mathrm{d}\psi_n(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right]^2\mathrm{d}x=-\delta\psi_n(0,\omega)g(\omega) \tag{7.2.46a}$$

引进近似

$$\delta\psi_n(0,\omega)=\psi_{n+1}(0,\omega)-\psi_n(0,\omega)\approx\psi_0^\delta(\omega)-\psi_n(0,\omega) \tag{7.2.46b}$$

于是得到关于 $\delta k_n(z)$ 的积分方程

$$\int_0^L\delta k_n(x)\left[\frac{\mathrm{d}\psi_n(x,\omega)}{\mathrm{d}x}\right]^2\mathrm{d}x=g(\omega)[\psi_n(0,\omega)-\psi_0^\delta(\omega)] \tag{7.2.46c}$$

第三步, 正则化方法解第一类 Fredholm 积分方程, 用完备的正交归一函数集 $\{h_j(x)\}$ 展开 $\delta k_n(x)$, 并作截断 $(j \leqslant N)$ 近似

$$\delta k_n(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j h_j(x) \tag{7.2.47a}$$

假定实验中测量的频率点为 $\{\omega_i, i = 1, 2, \cdots, M\}$, 方程 (7.2.46c) 离散成

$$\sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_j = q_i, (i = 1, 2, \cdots, M) \tag{7.2.47b}$$

其中

$$\begin{gathered} q_i = q(\omega_i)[\psi_n(0, \omega_i) - \psi_0^\delta(\omega_i)] \\ w_{ij} = \int_0^L \left[\frac{\mathrm{d}\psi_n(x, \omega_i)}{\mathrm{d}x}\right]^2 h_j(x)\mathrm{d}x \\ (i = 1, 2, \cdots, M; j = 1, 2, \cdots, N) \end{gathered} \tag{7.2.47c}$$

方程 (7.2.47b) 写成矢量形式

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} \tag{7.2.47d}$$

其中 $\boldsymbol{W} = [w_{ij}]$ 是 $M \times N$ 矩阵, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_M)^{\mathrm{T}}$(上标 T 表示转置) 分别是 $N$ 与 $M$ 个分量的列矢量. 因此, 热扩散方程的逆问题转化为求解 $M \times N$ 阶代数方程. 注意到 $M$ 是实验中测量频率点数目, $N$ 是正交归一函数集的截断数, 一般取 $M \gg N$. 因此线性代数方程 (7.2.47d) 是超定的. 另一方面, 数值计算表明, 矩阵 $\boldsymbol{W}$ 的奇异值迅速趋向零, 因此方程 (7.2.47d) 是严重病态的. 事实上, 方程 (7.2.47d) 是第一类 Fredholm 积分方程 (7.2.46c) 离散化而来, 而第一类 Fredholm 积分方程是不适定的.

根据 7.1.2 小节, 我们用 Tikhonov 正则化方法求方程 (7.2.47d) 的正则化解, 由式 (7.1.28a)

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n}{\alpha + \mu_n^2} (\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v}_n^*) \boldsymbol{u}_n \tag{7.2.48a}$$

其中 $\{\mu_n, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_n\}$ 是 $\boldsymbol{W}$ 的奇异系统

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{u}_n = \mu_n \boldsymbol{v}_n;\ \boldsymbol{W}^{*\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_n = \mu_n \boldsymbol{u}_n \tag{7.2.48b}$$

为了寻找最佳的正则化参数 $\alpha$, 定义误差函数

$$E(\alpha) = \frac{1}{||\psi_0^\delta||} \sqrt{\sum_{i=1}^{M} |\psi_n(0, \omega_i, \alpha) - \psi_0^\delta(\omega_i)|^2} \tag{7.2.48c}$$

其中

$$||\psi_0^\delta|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} |\psi_0^\delta(\omega_i)|^2} \tag{7.2.48d}$$

函数集 $h_j(x)$ 取简单的形式

$$h_j(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{N}{L}}, & x \in \left[(j-1)\dfrac{N}{L}, j\dfrac{N}{L}\right] \\ 0, & x \notin \left[(j-1)\dfrac{N}{L}, j\dfrac{N}{L}\right] \end{cases}, \ (j = 1, 2, \cdots, N) \tag{7.2.49a}$$

计算机数值实验过程如下:

(1) 给定热导系数的分布 $k(x)$, 利用数值方法 (如差分法) 求各个频率点样品表面的温度 $\psi_0(\omega_i)$, $(i = 1, 2, \cdots, M)$ 作为测量数据. 真实测量数据 $\psi_0^\delta(\omega_i)$ 的误差通过加白噪声到 $\psi_0(\omega_i)$ 来模拟;

(2) 选择初始分布 $k^0(x)$, 一般取为常数. 由方程 (7.2.45b), 利用数值方法 (如差分法) 求各个频率点的温度分布 $\psi_0(x, \omega_i)$, $(i = 1, 2, \cdots, M)$, 然后由式 (7.2.47c) 可求出 $w_{ij}$ 和 $q_i$;

(3) 结合式 (7.2.48a) 和 (7.2.48c), 尝试正则化参数, 求出最佳正则化参数, 于是求得 $\delta k_0(z)$, 完成第一次迭代, 得到

$$k_1(x) = k_0(x) + \delta k_0(x) \tag{7.2.49b}$$

(4) 重复过程 (2) 和 (3) 得到

$$k_{n+1}(x) = k_n(x) + \delta k_n(x) \tag{7.2.49c}$$

精度判据为

$$I_n = \int_0^L [k_{n+1}(x) - k_n(x)]^2 \mathrm{d}x \tag{7.2.49d}$$

当 $I_n < \varepsilon$ 时, 迭代结束. 图 7.2.2(a) 给出三次迭代过程热导系数的分布, 初始测为常数 $k_0(x) = 40$. 实线为 $k(x)$ 模型. 图 7.2.2(b) 为误差函数 $E(\alpha)$ 随正则化参数 $\alpha$ 的变化, 从图可见: 存在 $\alpha^*$ 使 $E(\alpha)$ 极小, 而且对每一次迭代, $\alpha^*$ 不同.

图 7.2.3 给出测量信号含不同强度噪声后反演结果的数值计算例子. 实线为热导系数分布 $k(x)$ 模型. (a) 是用振幅信号反演的结果, 白噪声强度分别是原信号强度的 2%(●)、5%(▲) 和 10%(▼); (b) 是用相位信号反演的结果, 白噪声与原信号相位差分别为 $0.2°$(●)、$0.5°$(▲) 和 $1.0°$(▼). 图 7.2.4 为精度判据随迭代次数的变化, 可见收敛速度较快, 一般通过 10 次迭代即可满足要求.

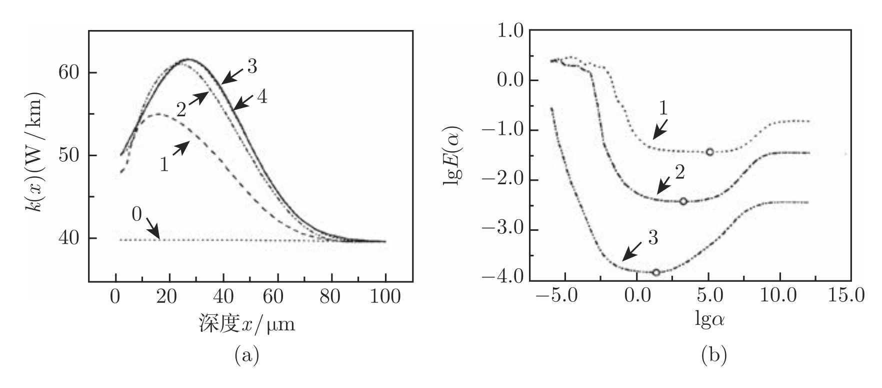



图 7.2.2　(a) 三次迭代中热导系数的分布; (b) 误差函数 $E(\alpha)$ 随正则化参数 $\alpha$ 的变化

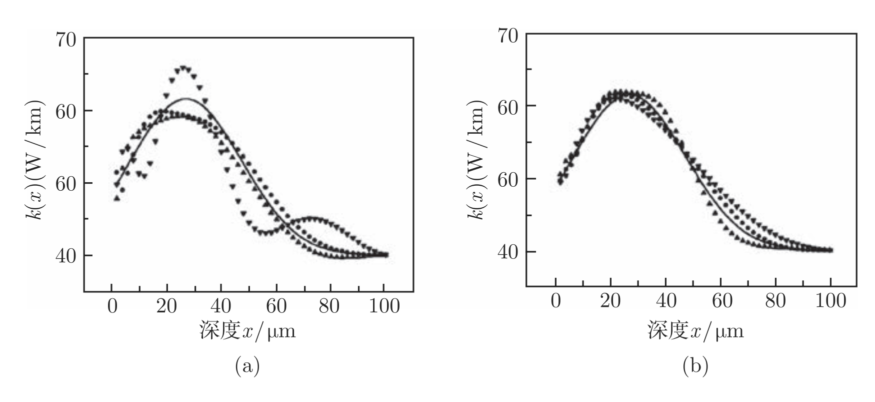



图 7.2.3　不同噪声强度热导系数分布反演的数值例子; (a) 利用温度场的振幅; (b) 利用温度场的相位

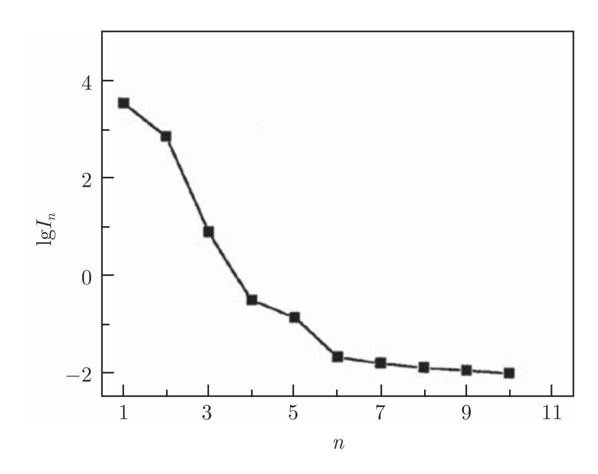



图 7.2.4　精度与迭代次数的关系

上述反演过程避免了 Green 函数的计算 (故为广义 PST). 对一维热扩散问题,

在二端边界条件比较简单时, 这是容易做到的. 但对高维问题, 只有在某些特殊边界条件下, 才能避免 Green 函数, 一般无法避免.

### 7.2.5 环境污染控制的逆源问题

设河道长为 $L$, 上游端点污染浓度为常数 $N_0$, 在河段 $L_1$ 区间内存在污染源, 其强度为 $f(x,t)$, 如图 7.2.5. 下游远处污染浓度趋向均匀. 逆问题: 假定在河段 $L_2$ 内污染浓度要求控制在 $N^*$ 以下, 求污染源的强度分布. 假定河道及排污情况可用一维近似, 污染物浓度 $N(x,t)$ 满足一维对流-扩散方程

$$\frac{\partial N}{\partial t}+u\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial N}{\partial x}\right]+f(x,t),x\in(0,L),\ t>0 \tag{7.2.50a}$$

初始和边界条件为

$$\begin{aligned}&N(x,t)|_{t=0}=0,\ x\in(0,L)\\&N(x,t)|_{x=0}=N_0;\quad \left.\frac{\partial N(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0\ ,t>0\end{aligned} \tag{7.2.50b}$$

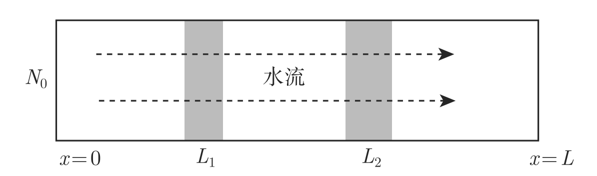



图 7.2.5 河道长为 $L$, 上游端点污染浓度为常数 $N_0$

其中常数 $u$ 为水流速度, $k(x)$ 为污染物扩散系数. 方程 (7.2.50a) 的第二项表示对流作用, 即由于水流作用而使 $x$ 点的污染浓度变小. 在 $L_2$ 区域, 污染浓度限制在可允许值以下

$$N(x,t)|_{x\in L_2}\leqslant N^*(L_2,t),\ t\in(0,T) \tag{7.2.50c}$$

与前面各小节的情况不同, 本问题没有给出区域或者边界的附加测量数据, 而是以不等式 (7.2.50c) 的形式出现. 这一逆问题实际上是一个优化问题, 即求泛函

$$J(f)=\int_0^T\int_{x\in L_2}|N(x,t)-N^*(L_2,t)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{7.2.51a}$$

的条件极小. 约束条件为: $N(x,t)$ 满足方程 (7.2.50a) 和 (7.2.50b). 由于泛函 $J(f)$ 与 $f(x,t)$ 的关系比较复杂, 直接求满足 $\min J(f)$ 的 $f(x,t)$ 是困难. 然而, 用最佳摄动量法能够给出较为简单的迭代方法. 设迭代过程为

$$f_{n+1}(x,t)=f_n(x,t)+\delta f_n(x,t) \tag{7.2.51b}$$

其中扰动量使 Tikhonov 泛函

$$J_\alpha(f)=\int_0^T\int_{x\in L_2}|N_{n+1}(x,t)-N^*(L_2,t)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\alpha\Omega(f)\tag{7.2.51c}$$

取极小, 式中稳定化泛函取为

$$\Omega(f)=\int_0^T\int_{x\in L_2}|\delta f(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{7.2.51d}$$

注意: 直接求泛函 $J(f)$ 的极小问题是病态的, 必须求 Tikhonov 泛函的极小问题. 设函数系 $\{\phi_j(x,t)\}$ 是 $(0,L)\times(0,T)$ 上的完备系, 把函数 $f(x,t)$ 作广义 Fourier 展开且取前 $N$ 项近似

$$f(x,t)\approx\sum_{j=1}^M f_j\phi_j(x,t)\tag{7.2.52a}$$

于是, 可以把 $c(x,t)$ 的扰动转变成广义 Fourier 展开系数的扰动

$$\delta f_n(x,t)\approx\sum_{j=1}^M \delta f_j\phi_j(x,t)\tag{7.2.52b}$$

通过与 7.2.3 小节类似的过程, 我们得到决定系数 $\{\delta f_j\}$ 的方程

$$\sum_{i=1}^M(a_{ij}+\alpha b_{ij})\delta f_i=b_i,\ (i=1,2,\cdots,M)\tag{7.2.53a}$$

上式中诸系数为

$$\begin{aligned}
a_{ij}&\equiv\int_0^T\int_{x\in L_2}\alpha_i^*(x,t)\alpha_j(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
b_{ij}&\equiv\int_0^T\int_{x\in L_2}\phi_i(x,t)\phi_j^*(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
b_j&\equiv\mathrm{Re}\int_0^T\int_{x\in L_2}[N_n(x,t)-N^*(L_2,t)]\alpha_j^*(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
d&\equiv\int_0^T\int_{x\in L_2}|N_n(x,t)-N^*(L_2,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}\tag{7.2.53b}$$

其中

$$\alpha_j(x,t)=\lim_{\Delta_j\to 0}\frac{N_n[f_n(x,t)+\Delta_j\phi_j(x,t),x,t]-N_n[f_n(x,t),x,t]}{\Delta_j}\tag{7.2.53c}$$

于是, 通过迭代可以得到满足不等式 (7.2.50c) 的污染源的强度分布 $f(x,t)$.

## 7.3 椭圆型方程的逆问题

椭圆型方程的逆问题在物理和工程技术中有重要应用, 地质勘探, 医学成像和无损评价等领域中出现的许多问题都可以转化为椭圆型方程的逆问题. 最重要的椭圆型方程为 Laplace 方程, 其逆问题一般为给定 (通过测量, 含有一定误差的数据) 部分边界上的 Cauchy 数据, 反演另外一部分不可达到的边界数据. 本节首先介绍求解 Laplace 方程 Cauchy 问题的二种数值题方法, 即基本解展开法和边界元近似; 然后在 7.3.3 和 7.3.4 小节中介绍系数和源逆问题.

### 7.3.1 Cauchy 问题的积分方程法

由例 1.4.2, Laplace 方程的初值问题是不稳定的. 对足够光滑的初值 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$, 延拓后的函数 $\phi(x+\mathrm{i}y)$ 和 $\psi(x+\mathrm{i}y)$ 满足解析性质. 但如果初值 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 由实验测量得到, 必定含有测量误差, 即 $\phi^\delta(x)$ 和 $\psi^\delta(x)$, 此时经典意义上的解既不稳定也不存在. 然而, 在工程和技术中, 经常遇到 Laplace 方程的初值问题 (如例 7.1.3), 那么, 我们如何得到稳定的空间场分布呢? 常用的反演方法有多种, 如拟逆法、Fourier 变换法、积分方程法、基本解正则化法以及边界元正则化法等. 我们主要介绍后三种.

考虑椭圆方程在带状区域 $y\in(a,b)$ 的 Cauchy 问题

$$\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r},y)}{\partial y^2}-\boldsymbol{L}u=0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ y\in(a,b) \tag{7.3.1a}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 而 $y$ 为单一标量, $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+h(\boldsymbol{r})$ 仅作用于变量 $\boldsymbol{r}$. 由于 $p(\boldsymbol{r})>0$, 故对变量 $(\boldsymbol{r},y)$, 方程 (7.3.1a) 是椭圆型的. 对区域 $G$, 边界条件

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0 \tag{7.3.1b}$$

而对 $y$ 有 Cauchy 边界条件

$$u(\boldsymbol{r},y)|_{y=a}=q^\delta(\boldsymbol{r});\quad \left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r},y)}{\partial y}\right|_{y=a}=g^\delta(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G \tag{7.3.1c}$$

其中上标 “$\delta$” 表示数据含有测量误差. 我们的目标是求另一个边界 $y=b$ 上的值 $u(\boldsymbol{r},y)|_{y=b}$.

令分离变数解为 $u(\boldsymbol{r},y)=\psi(\boldsymbol{r})T(y)$, 由式 (2.4.24b), 我们可以把方程 (7.3.1a) 和 (7.3.1b) 的通解表示成

$$u(\boldsymbol{r},y)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}y}+b_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}y})\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.2a}$$

其中 $\{\psi_n(\boldsymbol{r}),\lambda_n\geqslant 0,\ (n=0,1,2,\cdots)\}$ 是本征值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}\psi_n(\boldsymbol{r})=\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left.\left(\alpha\psi_n+\beta\frac{\partial\psi_n}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered}\tag{7.3.2b}$$

的解. 由边界条件式 (7.3.1c) 得到决定 $a_n$ 与 $b_n$ 的方程

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty}(a_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}a}+b_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}a})\psi_n(\boldsymbol{r})=q^{\delta}(\boldsymbol{r})\\ \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}(a_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}a}-b_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}a})\psi_n(\boldsymbol{r})=g^{\delta}(\boldsymbol{r})\end{gathered}\tag{7.3.2c}$$

因 $\{\psi_n\}$ 是完备的正交系 (假定已归一化), 故

$$\begin{gathered}a_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}a}+b_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}a}=(\psi_n,q^{\delta})\\ \sqrt{\lambda_n}(a_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}a}-b_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}a})=(\psi_n,g^{\delta})\end{gathered}\tag{7.3.2d}$$

从上二式可求得 $a_n$ 和 $b_n$. 为了方便, 下面取 $g^{\delta}(\boldsymbol{r})\equiv 0$(不影响主要结论), 于是可以得到

$$a_n=\frac{1}{2}(\psi_n,q^{\delta})\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}a};\ b_n=\frac{1}{2}(\psi_n,q^{\delta})\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}a}\tag{7.3.3a}$$

代入式 (7.3.2a) 得到 Cauchy 问题的解为

$$u(\boldsymbol{r},y)=\sum_{n=0}^{\infty}\cosh[\sqrt{\lambda_n}(y-a)](\psi_n,q^{\delta})\psi_n(\boldsymbol{r})\tag{7.3.3b}$$

上式取 $u(\boldsymbol{r},y)|_{y=b}$ 得到

$$u(\boldsymbol{r},y)|_{y=b}=\sum_{n=0}^{\infty}\cosh[\sqrt{\lambda_n}(b-a)](\psi_n,q^{\delta})\psi_n(\boldsymbol{r})\tag{7.3.3c}$$

由于 $\lambda_n\to\infty$, 测量数据 $q^{\delta}$ 小的误差将引起解 $u(\boldsymbol{r},y)|_{y=b}\to\infty$, 故上式是不稳定的. 为了得到稳定的解, 设 $u(\boldsymbol{r},y)|_{y=b}=f(\boldsymbol{r})$, 考虑边值问题

$$\begin{gathered}\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2u(\boldsymbol{r},y)}{\partial y^2}-\boldsymbol{L}u=0,\ \boldsymbol{r}\in G,\ y\in(a,b)\\ \left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r},y)}{\partial y}\right|_{y=a}=0;\ u(\boldsymbol{r},y)|_{y=b}=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\end{gathered}\tag{7.3.4a}$$

其中仍然取 $g^{\delta}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$. 不难得到以上边值问题的解为

$$u(\boldsymbol{r}, y)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh[\sqrt{\lambda_n}(y-a)]}{\cosh[\sqrt{\lambda_n}(b-a)]}(\psi_n, f)\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.4b}$$

当 $\lambda_n \to \infty$ 时, $\cosh[\sqrt{\lambda_n}(b-a)] \to \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}(b-a)}/2$, $\cosh[\sqrt{\lambda_n}(y-a)] \to \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}(y-a)}/2$, 故

$$\frac{\cosh[\sqrt{\lambda_n}(y-a)]}{\cosh[\sqrt{\lambda_n}(b-a)]} \to \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}(y-a)}}{\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}(b-a)}} \to \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}(b-y)} \to 0 \tag{7.3.4c}$$

故式 (7.3.4b) 的每一项都指数衰减. 取式 (7.3.4b) 中 $y=a$ 且利用 $u(\boldsymbol{r}, y)|_{y=a}=q^{\delta}(\boldsymbol{r})$ 得到

$$q^{\delta}(\boldsymbol{r})=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh[\sqrt{\lambda_n}(b-a)]}(\psi_n, f) \cdot \psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.5a}$$

上式可以改写成关于 $f(\boldsymbol{r})$ 的第一类 Fredholm 积分方程的形式

$$\int_G k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') f(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau'=q^{\delta}(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.5b}$$

其中积分核为

$$k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(\boldsymbol{r}) \psi_n^*(\boldsymbol{r}')}{\cosh[\sqrt{\lambda_n}(b-a)]} \tag{7.3.5c}$$

方程 (7.3.5b) 可以用 Tikhonov 正则化方法求解, 从而得到稳定解

$$u^{\alpha, \delta}(\boldsymbol{r}, y)|_{y=b}=f^{\alpha, \delta}(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.5d}$$

**例 7.3.1** 矩形区域上 (如图 7.3.1) 的二维 Laplace 方程的 Cauchy 问题为

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}=0,\ x \in(0, \pi);\ y \in(0,1) \\
u(x, y)|_{x=0}=u(x, y)|_{x=\pi}=0,\ y \in[0,1] \\
u(x, y)|_{y=0}=g^{\delta}(x),\quad \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\ x \in[0, \pi]
\end{gathered} \tag{7.3.6a}$$

即取方程 (7.3.1a) 中 $\rho(\boldsymbol{r})=1$ 和 $\boldsymbol{L}=-\partial^2/\partial x^2$. 我们的目标是: 由 Cauchy 数据 $u(x, y)|_{y=0}=g^{\delta}(x)$ 和 $\partial u(x, y)/\partial y|_{y=0}=0$, $x \in[0, \pi]$, 求边界 $y=1$ 上稳定的值 $u(x, y)|_{y=1}=f(x)$.

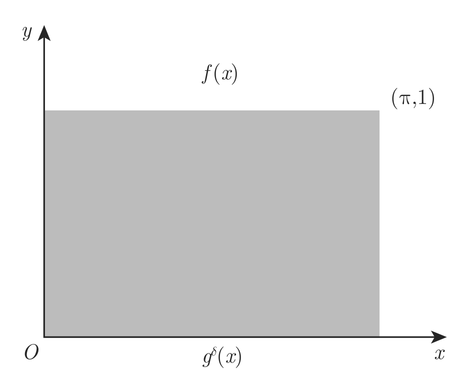



图 7.3.1　矩形区域的 Cauchy 问题

显然, $x$ 方向的本征值问题为

$$-\frac{\partial^2\psi_n(x)}{\partial x^2}=\lambda_n\psi_n(x),\ x\in(0,\pi)$$
$$\psi_n(x)|_{x=0}=\psi_n(x)|_{x=\pi}=0 \tag{7.3.6b}$$

即

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx,\ \lambda_n=n^2,\ (n=1,2,\cdots) \tag{7.3.6c}$$

于是, 对应于式 (7.3.4a) 的正问题 (Laplace 方程的边值问题) 满足

$$\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}=0,\ x\in(0,\pi);\ y\in(0,1)$$
$$u(x,y)|_{x=0}=u(x,y)|_{x=\pi}=0,\ y\in[0,1] \tag{7.3.7a}$$
$$u_y(x,y)|_{y=0}=0,\ u(x,y)|_{y=1}=f(x),\ x\in[0,\pi]$$

由方程 (7.3.4b), 正问题的解为

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cosh ny}{\cosh n}(\psi_n,f)\psi_n(x) \tag{7.3.7b}$$

由测量数据 $u(x,y)|_{y=0}=g^{\delta}(x)$ 得到决定 $f(x)$ 的第一类 Fredholm 积分方程

$$\boldsymbol{K}f\equiv\int_0^{\pi}k(x,x')f(x')\mathrm{d}x'=q^{\delta}(x) \tag{7.3.7c}$$

其中

$$k(x,x')=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh n}\sin nx\sin nx' \tag{7.3.7d}$$

其 Tikhonov 正则解满足

$$\alpha f_\alpha(x) + \boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K} f_\alpha(x) = \boldsymbol{K}^+ q^\delta(x) \tag{7.3.8a}$$

方程 (7.3.8a) 可以简单离散化. 记 $\Delta x = \pi/M$, $x_i = i\Delta x$, $f_i = f(x_i)$ 和 $q_i = q^\delta(x_i)$, 其中 $i = 0, 1, 2, \cdots, M$. 注意到 $k(x, x')$ 是 Hermite 对称的, 即 $k^+(x, x') = k(x, x')$, 故

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}^+ q^\delta(x_l) &= \frac{\pi}{M}\sum_{j=0}^{M} a_j k(x_l, x_j) q^\delta(x_j) \\
\boldsymbol{K}^+\boldsymbol{K} f(x_l) &= \left(\frac{\pi}{M}\right)^2 \sum_{i=0}^{M} a_i k(x_l, x_i)\left[\sum_{j=0}^{M} a_j k(x_i, x_j) f(x_j)\right] \\
&= \left(\frac{\pi}{M}\right)^2 \sum_{i,j=0}^{M} a_i a_j k(x_l, x_i) k(x_i, x_j) f(x_j)
\end{aligned} \tag{7.3.8b}$$

其中 $a_0 = a_M = 1/2$ 和 $a_i = a_j = 1,\ (i, j = 1, 2, \cdots, M-1)$. 上式代入方程 (7.3.8a) 并且写成矩阵的形式

$$\left(\alpha \boldsymbol{I} + \frac{\pi^2}{M^2}\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{f}_\alpha = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^\delta \tag{7.3.9a}$$

其中列矢量

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_\alpha &= [f_\alpha(x_0), f_\alpha(x_1), \cdots, f_\alpha(x_M)]^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{q}^\delta &= [q^\delta(x_0), q^\delta(x_1), \cdots, q^\delta(x_M)]^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{7.3.9b}$$

而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元 $A_{ij}$ 为

$$A_{ij} = a_j k(x_i, x_j),\ (i, j = 0, 1, 2, \cdots, M) \tag{7.3.9c}$$

容易得到

$$\boldsymbol{f}_\alpha = \left(\alpha \boldsymbol{I} + \frac{\pi^2}{M^2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^\delta \tag{7.3.9d}$$

显然, 这种把 Cauchy 问题化为积分方程的方法对比较简单的边界是非常有效的, 但对复杂的边界, 本征函数系 $\{\psi_n(\boldsymbol{r}),\ \lambda_n \geqslant 0,\ (n = 0, 1, 2, \cdots)\}$ 就难以得到, 故必须发展其他有效的数值方法.

### 7.3.2 Cauchy 问题的基本解法

考虑定义在单连通区域 $G$ 内的 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0,\ \boldsymbol{r} \in G \tag{7.3.10a}$$

区域 $G$ 的边界分成不相交的二部分: $\partial G=\partial G_1+\partial G_2$, 如图 7.3.2. 在部分边界 $\partial G_1$ 上满足的条件, 即 Cauchy 数据为

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_1}&=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1\\ \left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G_1}&=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1 \end{aligned} \tag{7.3.10b}$$

其中函数 $f(\boldsymbol{r})$ 和 $g(\boldsymbol{r})$ 由测量得到, 含有强度为 $\delta$ 的噪声, 即

$$\begin{aligned} |f(\boldsymbol{r})-f^{\delta}(\boldsymbol{r})|&<\delta\\ |g(\boldsymbol{r})-g^{\delta}(\boldsymbol{r})|&<\delta \end{aligned} \tag{7.3.10c}$$

我们的目标是: 通过测量数据 $f^{\delta}(\boldsymbol{r})$ 和 $g^{\delta}(\boldsymbol{r})$, 反演已知边界 $\partial G_2$ 上的函数值 $u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_2}$ 或法向导数 $\partial u(\boldsymbol{r})/\partial n|_{\partial G_2}$.

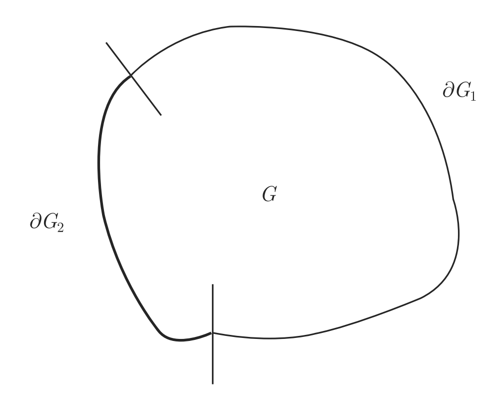



图 7.3.2　区域 $G$ 的边界 $\partial G$ 由不相交的二部分 $\partial G_1$ 和 $\partial G_2$ 组成

**基本解正则化方法**　由 3.3.3 小节的式 (3.3.41b) 和 (3.3.41c), Laplace 方程的基本解为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},(\text{二维}) \tag{7.3.11a}$$

和

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},(\text{三维}) \tag{7.3.11b}$$

满足 Lapace 方程

$$-\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\begin{cases}\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), & \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}'\in G\\ 0, & \boldsymbol{r}\in G,\ \boldsymbol{r}'\notin G\end{cases} \tag{7.3.11c}$$

当取 $\boldsymbol{r}'\notin G$ 时, $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足 Laplace 方程. 在区域 $G$ 外, 取 $N$ 点 $(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N)\notin G$(称为**配置点**), 相应的基本解写成 $\psi_j(\boldsymbol{r})=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j)$, $(j=1,2,\cdots,N)$. 注意: 一

般取 $N$ 个配置点均匀分布在包含区域 $G$ 的大球面 $S_R$(二维情况为大圆). 把方程 (7.3.10a) 的解写成

$$u_N(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{N} C_j \psi_j(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in G \tag{7.3.12a}$$

显然 $u_N(\boldsymbol{r})$ 满足方程方程 (7.3.10a), 通过选取合适的系数 $\{C_j\}$, 使 $u_N(\boldsymbol{r})$ 在一定意义上近似满足边界条件式 (7.3.10b), 就得到了方程 (7.3.10a) 和 (7.3.10b) 的近似解, 于是容易得到边界 $\partial G_2$ 上的函数值 $u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_2}$ 或法向导数 $\partial u(\boldsymbol{r})/\partial n|_{\partial G_2}$.

系数 $\{C_j\}$ 的选择原则是使下列 Tikhonov 泛函取极小

$$\begin{aligned} J_\alpha^\delta(u_N) = & ||u_N(\boldsymbol{r}) - f^\delta(\boldsymbol{r})||^2_{\partial G_1} + \omega \left\| \frac{\partial u_N(\boldsymbol{r})}{\partial n} - g^\delta(\boldsymbol{r}) \right\|^2_{\partial G_1} \\ & + \alpha ||u_N(\boldsymbol{r})||^2_G \end{aligned} \tag{7.3.12b}$$

其中 $\alpha$ 为正则化参数, $\omega$ 是量纲化常数, 当所有的函数和变量都无量纲时, 可取 $\omega = 1$. 上式第一和二项范数的定义为

$$\begin{aligned} ||u_N(\boldsymbol{r}) - f^\delta(\boldsymbol{r})||^2_{\partial G_1} &\equiv \iint_{\partial G_1} |u_N(\boldsymbol{r}) - f^\delta(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}S \\ \left\| \frac{\partial u_N(\boldsymbol{r})}{\partial n} - g^\delta(\boldsymbol{r}) \right\|^2_{\partial G_1} &\equiv \iint_{\partial G_1} \left| \frac{\partial u_N(\boldsymbol{r})}{\partial n} - g^\delta(\boldsymbol{r}) \right|^2 \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{7.3.12c}$$

注意: 积分在部分边界面 $\partial G_1$ 上进行 (二维情况为线积分), 而稳定化泛函为体积分 (二维情况为面积分)

$$||u_N(\boldsymbol{r})||^2_G = \int_G |u_N(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}\tau \tag{7.3.12d}$$

把式 (7.3.12a) 代入式 (7.3.12c) 和 (7.3.12d), 然后代入式 (7.3.12b) 得到

$$J_\alpha^\delta(u_N) = \sum_{i,j=1}^{N} (w_{ij} + \alpha \chi_{ij}) C_i C_j - 2 \sum_{j=1}^{N} \beta_j C_j + b \tag{7.3.13a}$$

其中

$$\begin{aligned} w_{ij} &\equiv \iint_{\partial G_1} \psi_i^*(\boldsymbol{r}) \psi_j(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S + \omega \iint_{\partial G_1} \frac{\partial \psi_i^*(\boldsymbol{r})}{\partial n} \cdot \frac{\partial \psi_j(\boldsymbol{r})}{\partial n} \mathrm{d}S \\ \chi_{ij} &\equiv \int_G \psi_i^*(\boldsymbol{r}) \psi_j(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\tau \\ \beta_j &\equiv \mathrm{Re} \iint_{\partial G_1} f^\delta(\boldsymbol{r}) \psi_j^*(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S + \omega \mathrm{Re} \iint_{\partial G_1} g^\delta(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \psi_j^*(\boldsymbol{r})}{\partial n} \mathrm{d}S \\ b &\equiv \iint_{\partial G_1} |f^\delta(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}S + \omega \iint_{\partial G_1} |g^\delta(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{7.3.13b}$$

由 $\delta J_\alpha^\delta(u_N)=0$ 得到系数 $C_j$ 满足的方程

$$\sum_{i=1}^{N}(w_{ij}+\alpha\chi_{ij})C_i=\beta_j, j=1,2,\cdots,N \tag{7.3.14a}$$

一旦求得系数 $C_j=C_j^{\alpha,\delta}$, 代入式 (7.3.12a) 得到区域 $G$ 内 Laplace 方程的近似解为

$$u_N^{\alpha,\delta}(\boldsymbol{r})=\sum_{j=1}^{N}C_j^{\alpha,\delta}\psi_j(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G \tag{7.3.14b}$$

由此, 不难得到部分边界 $\partial G_2$ 上的函数值和法向导数值.

**多连通区域** 对图 7.1.5 所示的心电逆问题, 区域 $G$ 位于心脏表面 $\partial G_3$ 和人体表面 $\partial G_1+\partial G_2$ 之间, 必须考虑多连通区域上的 Laplace 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{gathered}\nabla^2u(\boldsymbol{r})=0,\ \boldsymbol{r}\in G\\ \left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G_1+\partial G_2}=g^\delta(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1+\partial G_2\\ u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_1}=f^\delta(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1\end{gathered} \tag{7.3.15a}$$

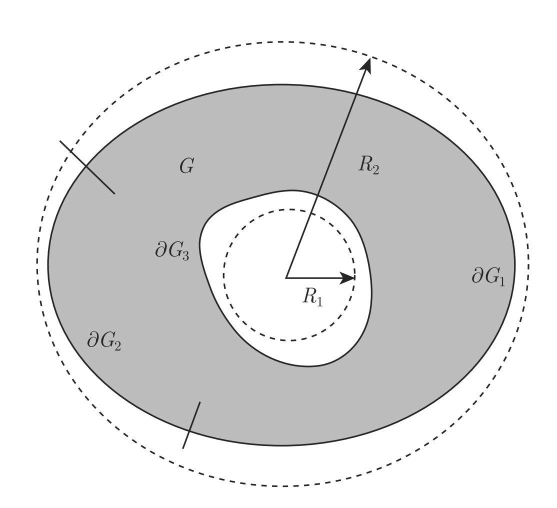



图 7.3.3 心电逆问题中的连通区域 $G$, 内、外边界分别为 $\partial G_1$ 和 $\partial G_2$

我们的目标是, 由测量到的 Cauchy 数据 $g^\delta(\boldsymbol{r})$ 和 $f^\delta(\boldsymbol{r})$, 反演边界 $\partial G_3$ 上的函数值 $u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_3}$. 此时, 配置点可设在包含区域 $G$ 的大球面 $S_{R_2}$ (二维情况为大圆) 和心脏表面 $\partial G_3$ 下的小球面 $S_{R_1}$ 上, 如图 7.3.3. 设 $S_{R_2}$ 和 $S_{R_1}$ 上分别有 $N$ 和 $M$ 个配置点, 相应的基本解分别为

$$\begin{aligned}\psi_{1j}(\boldsymbol{r})=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j),\ \boldsymbol{r}_j\in S_{R_2},\ j=1,2,\cdots,N\\ \psi_{2j}(\boldsymbol{r})=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j),\ \boldsymbol{r}_j\in S_{R_1},\ j=1,2,\cdots,M\end{aligned} \tag{7.3.15b}$$

其中 $\boldsymbol{r}\in G$. 于是 Laplace 方程 $\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=0$ 的解可展开成

$$u_{N,M}(\boldsymbol{r})=\sum_{j=1}^{N}C_j\psi_{1j}(\boldsymbol{r})+\sum_{j=1}^{M}D_j\psi_{2j}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G \tag{7.3.15c}$$

相应的 Tikhonov 泛函取为

$$\begin{aligned}J_\alpha^\delta(u_{N,M})=&||u_{N,M}(\boldsymbol{r})-f^\delta(\boldsymbol{r})||^2_{\partial G_1}+\omega\left\|\frac{\partial u_{N,M}(\boldsymbol{r})}{\partial n}-g^\delta(\boldsymbol{r})\right\|^2_{\partial G_1+\partial G_2}\\&+\alpha||u_{N,M}(\boldsymbol{r})||^2_{\partial G_3}\end{aligned} \tag{7.3.16a}$$

式中第一和二项与式 (7.3.12c) 类似, 而稳定化泛函取为边界 $\partial G_3$ 上的面积分 (二维情况为线积分)

$$||u_{N,M}(\boldsymbol{r})||^2_{\partial G_3}=\iint_{\partial G_3}|u_{N,M}(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}S \tag{7.3.16b}$$

当然, 稳定化泛函也可以取为 $G$ 上的体积分 (可见, 稳定化泛函的取法有一定的选择余地, 取何种形式决定于有效性), 但在数值积分中比面积分多一重积分. 在具体计算中, 相当于有 $N+M$ 个配置点, 方程 (7.3.14a) 修改为

$$\sum_{i=1}^{N+M}(w_{ij}+\alpha\chi_{ij})C_i=\beta_j,\ j=1,2,\cdots,N+M \tag{7.3.17a}$$

其中规定: $C_{N+j}=D_j$, $(j=1,2,\cdots,M)$. 式 (7.3.13b) 中诸式修改为: 当 $i\leqslant N$ 或者 $j\leqslant N$ 时, 取 $\psi_i(\boldsymbol{r})=\psi_{1i}(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi_j(\boldsymbol{r})=\psi_{1j}(\boldsymbol{r})$; 当 $i>N$ 时, 取 $\psi_i(\boldsymbol{r})=\psi_{2i}(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi_j(\boldsymbol{r})=\psi_{2j}(\boldsymbol{r})$.

一旦从上式求得系数 $C_j=C_j^{\alpha,\delta}$, $(j=1,2,\cdots,N)$ 和 $C_{N+j}=D_j^{\alpha,\delta}$, $(j=1,2,\cdots,M)$, 代入式 (7.3.15c) 得到区域 $G$ 内 Laplace 方程的近似解为

$$u^{\alpha,\delta}_{N,M}(\boldsymbol{r})=\sum_{j=1}^{N}C_j^{\alpha,\delta}\psi_{1j}(\boldsymbol{r})+\sum_{j=1}^{M}D_j^{\alpha,\delta}\psi_j(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G \tag{7.3.17b}$$

从而不难求得边界 $\partial G_3$ 上的函数值 $u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_3}$.

### 7.3.3 Cauchy 问题的边界元法

区域 $G$ 的边界分成不相交的二部分: $\partial G=\partial G_1+\partial G_2$, 如图 7.3.2. 考虑方程 (7.3.10a) 和 (7.3.10b) 的逆问题, 即

$$\begin{aligned}\nabla^2u(\boldsymbol{r})=0,\ \boldsymbol{r}\in G\\u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_1}=f^\delta(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1\\\left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G_1}=g^\delta(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1\end{aligned} \tag{7.3.18a}$$

反演边界 $\partial G_2$ 的分布 $u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_2}$ 和法向导数 $\partial u(\boldsymbol{r})/\partial n|_{\partial G_2}$. 边界元方法的过程如下:

(1) 利用 Kirchhoff 积分公式 (5.5.10b) 的离散化形式, 即式 (5.5.11a), 把边界 $\partial G_2$ 上的函数值 $u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_2}$ 和法向导数 $\partial u(\boldsymbol{r})/\partial n|_{\partial G_2}$ 作为未知数, 得到相应的线性代数方程组或矩阵方程;

(2) 利用 Tikhonov 正则化方法解矩阵方程. 由 Kirchhoff 积分公式 (5.5.10b) 和 (7.3.18a) 得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f^{\delta}(\boldsymbol{r}) = &\iint_{\partial G_1}\left[g^{\delta}(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) - f^{\delta}(\boldsymbol{r}')\tilde{g}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right]\mathrm{d}S' \\ &+ \iint_{\partial G_2}\left[\alpha(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) - \beta(\boldsymbol{r}')\tilde{g}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right]\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{7.3.18b}$$

其中 $\boldsymbol{r}\in\partial G_1$ 和

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\beta(\boldsymbol{r}) = &\iint_{\partial G_1}\left[g^{\delta}(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) - f^{\delta}(\boldsymbol{r}')\tilde{g}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right]\mathrm{d}S' \\ &+ \iint_{\partial G_2}\left[\alpha(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) - \beta(\boldsymbol{r}')\tilde{g}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right]\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{7.3.18c}$$

其中 $\boldsymbol{r}\in\partial G_2$. 上两式中

$$\alpha(\boldsymbol{r}) = \left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G_2};\ \beta(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_2} \tag{7.3.18d}$$

为待求函数. 下面直接对方程 (7.3.18b) 和 (7.3.18c) 离散化处理.

如图 7.3.4, 把边界分割成 $N$ 个边界单元 $\Gamma_j$ $(j=1,2,\cdots,N)$,

(1) $N_1$ 个属于 $\partial G_1$, 用 $\Gamma_j^1$, $(j=1,2,\cdots,N_1)$ 表示;

(2) $N_2$ 个属于 $\partial G_2$, 用 $\Gamma_j^2$, $(j=N_1+1,N_1+2,\cdots,N)$ 表示;

(3) 总单元数 $N=N_1+N_2$.

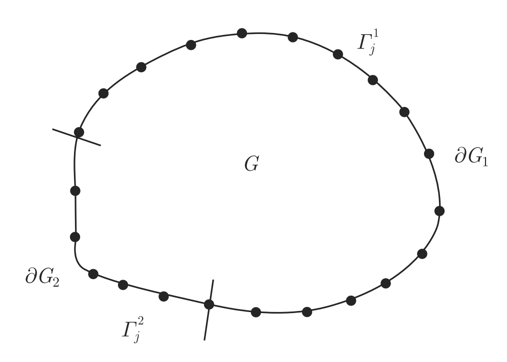



图 7.3.4　把边界分割成 $N$ 个单元, $N_1$ 个属于 $\partial G_1$ 而 $N_2$ 个属于 $\partial G_2$

类似于方程 (5.5.12a), 分别把 $j=N_1+1,N_1+2,\cdots,N$ 和 $j=1,2,\cdots,N_1$ 的项移到左边 (未知量, 待求) 和右边 (已知量)

$$\sum_{j=N_1+1}^{N}\beta_j H_{ij}-\sum_{j=N_1+1}^{N}\alpha_j G_{ij}=\sum_{j=1}^{N_1}[g^\delta(\boldsymbol{r}_j)G_{ij}-f^\delta(\boldsymbol{r}_j)H_{ij}]$$
$$(i=1,2,\cdots,N) \tag{7.3.19a}$$

其中 $f^\delta(\boldsymbol{r}_j)$ 和 $g^\delta(\boldsymbol{r}_j)$ 分别是单元 $\Gamma_j^1$ 上测量数据 $f^\delta(\boldsymbol{r})$ 和 $g^\delta(\boldsymbol{r})$ 的平均值; $\alpha_j$ 和 $\beta_j$ 分别是单元 $\Gamma_j^2$ 上, 待求函数 $\beta(\boldsymbol{r})$ 和法向导数 $\alpha(\boldsymbol{r})$ 的平均值, $H_{ij}=\tilde{H}_{ij}+\delta_{ij}/2$, $\tilde{H}_{ij}$ 和 $G_{ij}$ 由式 (5.5.11b) 表示. 方程 (7.3.19a) 写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}x=h \tag{7.3.19b}$$

其中未知列矢量

$$x=[\beta_{N_1+1},\beta_{N_1+2},\cdots,\beta_N,\alpha_{N_1+1},\alpha_{N_1+2},\cdots,\alpha_N]^{\mathrm{T}} \tag{7.3.20a}$$

非齐次列矢量 $h$ 的矩阵元为

$$h_i=\sum_{j=1}^{N_1}[g^\delta(\boldsymbol{r}_j)G_{ij}-f^\delta(\boldsymbol{r}_j)H_{ij}]$$
$$(i=1,2,\cdots,N) \tag{7.3.20b}$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $N\times 2N_2$ 矩阵, 其矩阵元 $a_{ij}$ 为

$$\begin{aligned} a_{ij}&=H_{i(N_1+j)},\ (i=1,2,\cdots,N;j=1,2,\cdots,N_2)\\ a_{ij}&=-G_{i(N_1+j-N_2)},\ (i=1,2,\cdots,N;j=N_2+1,N_2+2,\cdots,2N_2)\end{aligned} \tag{7.3.20c}$$

分析: (1) 方程 (7.3.19b) 的未知量有 $2N_2$ 个, 而方程有 $N$ 个; (2) 当 $N_2>N_1$ 时, 方程 (7.3.19b) 是欠定的; (3) 而当 $N_2<N_1$ 时, 方程 (7.3.19b) 是超定的. 总之, 它是不适定, 其 Tikhonov 正则化解满足

$$\alpha x_\alpha+\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}x_\alpha=\boldsymbol{A}^+h \tag{7.3.21a}$$

其中 $\boldsymbol{A}^+$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵, 上式的解为

$$x_\alpha=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^+h \tag{7.3.21b}$$

**Helmholtz 方程** 由于 Kirchhoff 积分公式 (5.5.10b) 对 Helmholtz 方程也成立, 故以上结果对有限区域内的 Helmholtz 方程的 Cauchy 问题也成立, 只要把基本解 $g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 换成 Helmholtz 方程的基本解 (即式 (5.5.7a)) 就可以了.

注意: Helmholtz 方程的 Cauchy 问题也是不稳定的, 我们以下例说明

$$\begin{gathered}\nabla^2 u(x,y)+k^2 u(x,y)=0,\ x\in(0,L_x),y\in(0,L_y)\\ u(x,y)|_{y=0}=f(x),\quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\ x\in(0,L_x)\\ u(x,y)|_{x=0}=u(x,y)|_{x=L_x}=0,\ y\in(0,L_y)\end{gathered}\tag{7.3.22a}$$

利用分离变量法, 不难得到

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{L_x}\cosh\left[\left(\frac{n^2\pi^2}{L_x^2}-k^2\right)^{1/2}y\right]\tag{7.3.22b}$$

其中

$$A_n=\frac{2}{L_x}\int_0^{L_x}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L_x}\mathrm{d}x\tag{7.3.22c}$$

取

$$\delta f(x)=\frac{1}{m^2}\sin\frac{m\pi x}{L_x},\ \frac{m\pi}{L_x}>k\tag{7.3.23a}$$

解的变化为

$$u(x,y)=\frac{1}{m^2}\sin\frac{m\pi x}{L_x}\cosh\left[\left(\frac{m^2\pi^2}{L_x^2}-k^2\right)^{1/2}y\right]\tag{7.3.23b}$$

显然, 当 $m\to\infty$ 时, $\max|\delta f(x)|\to 0$, 但 $\max|u(x,y)|\to\infty$, 即解不连续依赖于 Cauchy 数据, 故 Helmholtz 方程与 Laplace 方程一样, 它们的 Cauchy 问题是不稳定的.

### 7.3.4　椭圆型方程的系数逆问题

考虑定义在区域 $G$ 上的椭圆方程和边界条件

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}u(\boldsymbol{r})=0,\ \boldsymbol{r}\in G\\ u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_1}=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1\\ a(\boldsymbol{r})\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_2\end{gathered}\tag{7.3.24a}$$

其中 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[a(\boldsymbol{r})\nabla]+b(\boldsymbol{r})$, $a(\boldsymbol{r})>0$. 区域 $G$ 的边界分成不相交的二部分: $\partial G=\partial G_1+\partial G_2$, 如图 7.3.2. 逆问题: 通过测量部分边界 $\partial G_2$ 上的分布

$$u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_2}=h^{\delta}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_2\tag{7.3.24b}$$

或者部分边界 $\partial G_1$ 的法向导数

$$a(\boldsymbol{r})\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_1}=q^{\delta}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1 \tag{7.3.24c}$$

反演系数 $a(\boldsymbol{r})$(假定已知 $b(\boldsymbol{r})$). 注意: 上述问题中可以把 $a(\boldsymbol{r})$ 理解为热扩散系数, $u(\boldsymbol{r})$ 为稳态温度分布, 而法向导数为通过边界的热流, 也可以把 $a(\boldsymbol{r})$ 理解为介电系数, $u(\boldsymbol{r})$ 为电势分布, 法向导数为边界电场的法向分量.

**迭代法** 构成如下迭代公式

$$\begin{aligned}u_{n+1}(\boldsymbol{r})&=u_n(\boldsymbol{r})+\delta u_n(\boldsymbol{r})\\ a_{n+1}(\boldsymbol{r})&=a_n(\boldsymbol{r})+\delta a_n(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{7.3.25a}$$

代入方程 (7.3.24a) 且忽略二级小量, 得到零级和一级近似的方程分别为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}_n u_n(\boldsymbol{r})=0=0,\ \boldsymbol{r}\in G\\ u_n(\boldsymbol{r})|_{\partial G_1}=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1\\ a_n(\boldsymbol{r})\left.\frac{\partial u_n(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_2\end{gathered} \tag{7.3.25b}$$

和

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}_n\delta u_n(\boldsymbol{r})=\nabla\cdot[\delta a_n(\boldsymbol{r})\nabla]u_n(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \delta u_n(\boldsymbol{r})|_{\partial G_1}=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1\\ a_n(\boldsymbol{r})\left.\frac{\partial\delta u_n(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G_2\end{gathered} \tag{7.3.25c}$$

其中 $\boldsymbol{L}_n=-\nabla\cdot[a_n(\boldsymbol{r})\nabla]+b(\boldsymbol{r})$, 假定在边界上 $\delta a_n(\boldsymbol{r})=0$. 令 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}_nG_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G\\ G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{\partial G_1}=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1,\ \boldsymbol{r}'\in G\\ a_n(\boldsymbol{r})\left.\frac{\partial G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G_2,\ \boldsymbol{r}'\in G\end{gathered} \tag{7.3.26a}$$

并由 Green 公式 (2.2.18a)

$$\int_G[G_n\boldsymbol{L}'_n\delta u_n-\delta u_n\boldsymbol{L}'_nG_n)]\mathrm{d}\tau'=-\iint_{\partial G}a_n\left(G_n\frac{\partial\delta u_n}{\partial n'}-\delta u_n\frac{\partial G_n}{\partial n'}\right)\mathrm{d}S'$$

得到

$$\delta u_n(\boldsymbol{r})=-\int_G G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla'\cdot[\delta a_n(\boldsymbol{r}')\nabla'u_n(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}\tau' \tag{7.3.26b}$$

利用矢量恒等式, 上式化为

$$\delta u_n(\boldsymbol{r})=\int_G \delta a_n(\boldsymbol{r}')\nabla' G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\nabla' u_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'+\iint_{\partial G} G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta a_n(\boldsymbol{r}')\frac{\partial u_n(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S'$$

注意到在边界上 $\delta a_n(\boldsymbol{r})=0$, 则

$$\delta u_n(\boldsymbol{r})=\int_G \delta a_n(\boldsymbol{r}')\nabla' G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\nabla' u_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{7.3.26c}$$

利用近似 $\delta u_n(\boldsymbol{r})=u_{n+1}(\boldsymbol{r})-u_n(\boldsymbol{r})\approx u(\boldsymbol{r})-u_n(\boldsymbol{r})$, 上式在 $\partial G_2$ 上取值且利用方程 (7.3.24b) 得到

$$\int_G \delta a_n(\boldsymbol{r}')\nabla' G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\nabla' u_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{2}[h^\delta(\boldsymbol{r})-u_n(\boldsymbol{r})] \tag{7.3.27a}$$

其中 $\boldsymbol{r}\in\partial G_2$. 显然, 上式是第一类 Fredholm 积分方法, 求解后完成第一次迭代过程. 收敛判据为 $||\delta a_n(\boldsymbol{r}')||<e$(给定的小数).

对附加测量数据是式 (7.3.24c) 的情况, 方程 (7.3.27a) 修改为

$$\int_G \delta a_n(\boldsymbol{r}')\nabla'\frac{\partial G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\cdot\nabla' u_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{2}\left[q^\delta(\boldsymbol{r})-\frac{\partial u_n(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right] \tag{7.3.27b}$$

其中 $\boldsymbol{r}\in\partial G_2$, $\partial G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')/\partial n|_{\partial G_2}=\nabla G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial G_2}$, $\boldsymbol{n}$ 是边界的法向单位矢量.

**最佳摄动量法** 我们用最佳摄动量法求解式 (7.3.24a) 和 (7.3.24b). 构成如下迭代公式

$$a_{n+1}(\boldsymbol{r})=a_n(\boldsymbol{r})+\delta a_n(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.28a}$$

考虑式 (7.3.24b) 给定的附近测量数据, 扰动量 $\delta a_n(\boldsymbol{r})$ 由下列非线性最优化问题决定

$$J_\alpha(\delta a)=\iint_{\partial G_2}|u_{n+1}(\boldsymbol{r})-h^\delta(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}S+\alpha\int_G|\delta a_n(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}\tau \tag{7.3.28b}$$

设函数系 $\{\phi_j(\boldsymbol{r})\}$ 是 $G$ 上的完备系, 把函数 $a(\boldsymbol{r})$ 作广义 Fourier 展开且取前 $N$ 项近似

$$a(\boldsymbol{r})\approx\sum_{j=1}^N a_j\phi_j(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.28c}$$

于是可以把函数 $a(\boldsymbol{r})$ 的扰动转变成广义 Fourier 展开系数的扰动

$$\delta a(\boldsymbol{r})\approx\sum_{j=1}^N \delta a_j\phi_j(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.28d}$$

求出展开系数的扰动, 就可以得到第 $n$ 次修正量 $\delta a_n(\boldsymbol{r})$. 另一方面, 迭代过程中函数 $u(\boldsymbol{r})$ 的变化为

$$u_{n+1}(\boldsymbol{r}) \approx u_n[a_n(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r}] + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \delta a_j + \cdots \tag{7.3.29a}$$

其中

$$\alpha_j(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta_j \to 0} \frac{u_n[a_n(\boldsymbol{r}) + \Delta_j \phi_j(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r}] - u_n[a_n(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r}]}{\Delta_j} \tag{7.3.29b}$$

把式 (7.3.29a) 代入式 (7.3.28b) 得到

$$\begin{aligned} J_\alpha(\delta a) = &\iint_{\partial G_2} |u_n[a_n(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r}] + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \delta a_j - h^\delta(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}S \\ &+ \alpha \int_G |\sum_{j=1}^{N} \delta a_j \phi_j(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{7.3.29c}$$

上式展开后得到

$$J_\alpha(\delta a) = \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij} + \alpha b_{ij}) \delta a_i \delta a_j + 2 \sum_{j=1}^{N} b_j \delta a_j + d \tag{7.3.30a}$$

其中诸系数为

$$\begin{aligned} & a_{ij} \equiv \iint_{\partial G_2} \alpha_i^*(\boldsymbol{r}) \alpha_j(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S \\ & b_{ij} \equiv \int_G \phi_i(\boldsymbol{r}) \phi_j^*(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\tau \\ & b_j \equiv \mathrm{Re} \iint_{\partial G_2} \{u_n[a_n(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r}] - h^\delta(\boldsymbol{r})\} \alpha_j^*(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S \\ & d \equiv \iint_{\partial G_2} |u_n[a_n(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r}] - h^\delta(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{7.3.30b}$$

由 $J_\alpha(\delta a)$ 极小得到决定 $\delta a_i$ 的代数方程组

$$\sum_{i=1}^{N} (a_{ij} + \alpha b_{ij}) \delta a_i = b_i, \ (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{7.3.30c}$$

于是, 我们求得 $(n+1)$ 次迭代过程的函数

$$a_{n+1}(\boldsymbol{r}) \approx a_n(\boldsymbol{r}) + \sum_{j=1}^{N} \delta a_j^{\delta,\alpha} \phi_j(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.30d}$$

积分 $d$ 可作为误差函数, 当 $d<\varepsilon$ 时, 迭代完成.

在较复杂的曲线 (二维情况) 和曲面 (三维情况) 边界情况, 完备函数系的选择较为困难. 事实上, 对正问题

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_n u_n(\boldsymbol{r}) &= 0 = 0,\ \boldsymbol{r}\in G \\ u_n(\boldsymbol{r})|_{\partial G_1} &= f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1 \\ a_n(\boldsymbol{r})\frac{\partial u_n(\boldsymbol{r})}{\partial n}\bigg|_{\partial G_2} &= g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_2 \end{aligned} \tag{7.3.31a}$$

的求解一般采用有限元近似, 故完备系 $\{\phi_j(\boldsymbol{r})\}$ 也可取为有限元中基函数 $\{N_\nu^e(\boldsymbol{r})\}$ (见 4.4.2 小节讨论)

$$a(\boldsymbol{r})\approx\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}a_\nu^e N_\nu^e(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.31b}$$

相应地, 方程 (7.3.28d) 和 (7.3.29a) 分别变成

$$\delta a(\boldsymbol{r})\approx\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\delta a_\nu^e N_\nu^e(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.31c}$$

和

$$u_{n+1}(\boldsymbol{r})\approx u_n[a_n(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}]+\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\alpha_\nu^e\delta a_\nu^e+\cdots \tag{7.3.32a}$$

其中

$$\alpha_\nu^e(\boldsymbol{r})=\lim_{\Delta_\nu^e\to 0}\frac{u_n[a_n(\boldsymbol{r})+\Delta_\nu^e N_\nu^e(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}]-u_n[a_n(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}]}{\Delta_\nu^e} \tag{7.3.32b}$$

故 Tikhonov 正则化泛函为

$$\begin{aligned} J_\alpha(\delta a)=&\iint_{\partial G_2}|u_n[a_n(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}]+\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\alpha_\nu^e\delta a_\nu^e-h^\delta(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}S \\ &+\alpha\int_G|\sum_{e=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{P}\delta a_\nu^e N_\nu^e(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{7.3.32c}$$

需要注意的是, 式 (7.3.31b) 中的 $a_\nu^e$ 不完全独立. 同样, 方程 (7.3.32c) 中的 $\delta a_\nu^e$ 也不完全独立. 必须把 $J_\alpha(\delta a)$ 用独立的 $M_d$ 个结点值 $\delta a_j^d$, $(j=1,2,\cdots,M_d)$ 来表示, 然后由极值条件 $\partial J_\alpha(\delta a)/\partial\delta a_j^d=0$ 得到决定 $\delta a_j^d$, $(j=1,2,\cdots,M_d)$ 的线性方程组.

对附加测量数据是式 (7.3.24c) 的情况, 泛函选择为

$$J_\alpha(\delta a)=\iint_{\partial G_2}\left|\frac{\partial u_{n+1}(\boldsymbol{r})}{\partial n}-h^\delta(\boldsymbol{r})\right|^2\mathrm{d}S+\alpha\int_G|\delta a_n(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}\tau \tag{7.3.32d}$$

不难得到类似的迭代式.

由上述讨论可见: 最佳摄动量法在每次迭代过程中仅需解正问题, 而一般的迭代法在每次迭代过程中不仅仅要求解正问题 (即解方程 (7.3.25b)), 还要求解 Green 函数 (即解方程 (7.3.26a)), 此外, 得到的积分方程 (7.3.27a) 或 (7.3.27b) 也是奇异的.

注意: 上述迭代法和最佳摄动量法都可以用来反演单个函数 $a(\boldsymbol{r})$ 或者二个函数 $a(\boldsymbol{r})$ 和 $b(\boldsymbol{r})$ 的双参数反演.

**例 7.3.2**　生物电阻抗成像中的逆问题. 电阻抗成像技术是通过给人体注入低频电流 $j(\boldsymbol{r})$, 测量体表的电势 $f^{\delta}(\boldsymbol{r})$ 来重建人体内部的电导率分布 $\sigma(\boldsymbol{r})$ 或其变化的图像, 数学上是一个典型的椭圆型方程的反问题. 当向被测人体内部注入低频恒定电流后, 在人体内形成的电场可认为是一个准静态场, 故人体内的电势分布 $u(\boldsymbol{r})$ 和电导率分布 $\sigma(\boldsymbol{r})$ 满足椭圆型方程

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot[\sigma(\boldsymbol{r})\nabla]u(\boldsymbol{r})=0,\ \boldsymbol{r}\in G\\&\sigma(\boldsymbol{r})\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\bigg|_{\partial G}=j(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{aligned}\tag{7.3.33a}$$

附加测量条件为

$$u(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=f^{\delta}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\tag{7.3.33b}$$

正问题: 已知 $\sigma(\boldsymbol{r})$ 和给定的 $j(\boldsymbol{r})$, 求人体内电势分布 $u(\boldsymbol{r})$; 逆问题: 对给定的 $j(\boldsymbol{r})$ 和附加测量的人体表面的电势 $f^{\delta}(\boldsymbol{r})$, 反演 $\sigma(\boldsymbol{r})$.

由 Gauss 公式, 对任意的矢量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 满足

$$\int_G\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\tag{7.3.34a}$$

取 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=u(\boldsymbol{r})\sigma(\boldsymbol{r})\nabla u(\boldsymbol{r})$ 代入上式得到

$$\int_G\nabla\cdot(u\sigma\nabla u)\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}u\sigma\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\tag{7.3.34b}$$

上式左边为

$$\int_G\nabla\cdot(u\sigma\nabla u)\mathrm{d}\tau=\int_G\sigma\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}\tau+\int_G u\nabla\cdot(\sigma\nabla u)\mathrm{d}\tau\tag{7.3.34c}$$

代入式 (7.3.34b) 且利用方程 (7.3.33a) 得到

$$\int_G\sigma\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}f^{\delta}(\boldsymbol{r})j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S\tag{7.3.34d}$$

注意: 上式中 $u(\boldsymbol{r})$ 仍然是未知的, 是 $\sigma(\boldsymbol{r})$ 的函数, 故方程 (7.3.43d) 关于 $\sigma(\boldsymbol{r})$ 是非线性的! 上式是方程 (7.3.33a) 和 (7.3.33b) 的积分形式.

构成如下迭代公式

$$\begin{aligned} u_{n+1}(\boldsymbol{r}) &= u_n(\boldsymbol{r}) + \delta u_n(\boldsymbol{r}) \\ \sigma_{n+1}(\boldsymbol{r}) &= \sigma_n(\boldsymbol{r}) + \delta\sigma_n(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{7.3.35a}$$

代入方程 (7.3.33a) 且忽略二级小量, 得到零级和一级近似的方程分别为

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot[\sigma_n(\boldsymbol{r})\nabla u_n(\boldsymbol{r})] = 0,\ \boldsymbol{r}\in G \\ &\sigma_n(\boldsymbol{r})\frac{\partial u_n(\boldsymbol{r})}{\partial n}\bigg|_{\partial G} = j(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G \end{aligned} \tag{7.3.35b}$$

和

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot[\sigma_n(\boldsymbol{r})\nabla\delta u_n(\boldsymbol{r})] = -\nabla\cdot[\delta\sigma_n(\boldsymbol{r})\nabla u_n(\boldsymbol{r})],\ \boldsymbol{r}\in G \\ &\sigma_n(\boldsymbol{r})\frac{\partial\delta u_n(\boldsymbol{r})}{\partial n}\bigg|_{\partial G} = 0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G \end{aligned} \tag{7.3.35c}$$

其中假定边界上 $\delta\sigma_n(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = 0$. 为了避免迭代过程中 Green 函数的出现, 作运算:

(1) 取 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = u_n(\boldsymbol{r})\sigma_n(\boldsymbol{r})\nabla\delta u_n(\boldsymbol{r})$ 代入式 (7.3.34a), 并且注意到方程 (7.3.35c) 的第二式, 得到

$$\int_G \nabla\cdot(u_n\sigma_n\nabla\delta u_n)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} u_n\sigma_n\frac{\partial\delta u_n}{\partial n}\mathrm{d}S = 0 \tag{7.3.36a}$$

上式左边为

$$\text{左边} = \int_G \sigma_n\nabla u_n\cdot\nabla\delta u_n\mathrm{d}\tau + \int_G u_n\nabla\cdot(\sigma_n\nabla\delta u_n)\mathrm{d}\tau \tag{7.3.36b}$$

利用方程 (7.3.35c) 的第一式

$$\text{左边} = \int_G \sigma_n\nabla u_n\cdot\nabla\delta u_n\mathrm{d}\tau - \int_G u_n\nabla\cdot(\delta\sigma_n\nabla u_n)\mathrm{d}\tau \tag{7.3.6c}$$

上式代入式 (7.3.36a) 得到

$$\int_G \sigma_n\nabla u_n\cdot\nabla\delta u_n\mathrm{d}\tau = \int_G u_n\nabla\cdot(\delta\sigma_n\nabla u_n)\mathrm{d}\tau \tag{7.3.37a}$$

上式进一步利用恒等式 $u_n\nabla\cdot(\delta\sigma_n\nabla u_n) = \nabla\cdot(\delta\sigma_n u_n\nabla u_n) - \delta\sigma_n\nabla u_n\cdot\nabla u_n$, 并且注意到 $\delta\sigma_n(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = 0$, 得到

$$\int_G \sigma_n\nabla u_n\cdot\nabla\delta u_n\mathrm{d}\tau = -\int_G \delta\sigma_n\nabla u_n\cdot\nabla u_n\mathrm{d}\tau \tag{7.3.37b}$$

(2) 取 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \delta u_n(\boldsymbol{r})\sigma_n(\boldsymbol{r})\nabla u_n(\boldsymbol{r})$ 代入式 (7.3.34a) 得到

$$\int_G \nabla\cdot(\delta u_n\sigma_n\nabla u_n)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G}\delta u_n\sigma_n\frac{\partial u_n}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{7.3.38a}$$

由方程 (7.3.35b) 的第二式得到

$$\int_G \nabla\cdot(\delta u_n\sigma_n\nabla u_n)\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}\delta u_n(\boldsymbol{r})j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{7.3.38b}$$

上式左边展并且利用方程 (7.3.35b) 的第一式得到

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\int_G\sigma_n\nabla\delta u_n\cdot\nabla u_n\mathrm{d}\tau+\int_G\delta u_n\nabla\cdot(\sigma_n\nabla u_n)\mathrm{d}\tau\\&=\int_G\sigma_n\nabla\delta u_n\cdot\nabla u_n\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{7.3.38c}$$

即

$$\int_G\sigma_n\nabla\delta u_n\cdot\nabla u_n\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}\delta u_n(\boldsymbol{r})j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{7.3.38d}$$

上式与式 (7.3.37d) 比较得到

$$\int_G\delta\sigma_n\nabla u_n\cdot\nabla u_n\mathrm{d}\tau=-\iint_{\partial G}\delta u_n(\boldsymbol{r})j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{7.3.39a}$$

注意到测量数据方程 (7.3.33b), 作近似

$$\delta u_n(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=[u_{n+1}(\boldsymbol{r})-u_n(\boldsymbol{r})]|_{\partial G}=[f^\delta(\boldsymbol{r})-u_n(\boldsymbol{r})]|_{\partial G} \tag{7.3.39b}$$

最后, 我们得到 $\delta\sigma_n(\boldsymbol{r})$ 满足的积分方程

$$\int_G\delta\sigma_n(\boldsymbol{r})\nabla u_n(\boldsymbol{r})\cdot\nabla u_n(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=-\iint_{\partial G}[f^\delta(\boldsymbol{r})-u_n(\boldsymbol{r})]j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{7.3.39c}$$

**线性化近似** 设电导率 $\sigma(\boldsymbol{r})$ 可表示为均匀电导率 $\sigma_0$ 及扰动电导率 $\delta\sigma(\boldsymbol{r})$ 之和, 即

$$\sigma(\boldsymbol{r})=\sigma_0+\delta\sigma(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.40a}$$

由方程 (7.3.39c), 作一次迭代得到

$$\int_G\delta\sigma(\boldsymbol{r})\nabla u_0(\boldsymbol{r})\cdot\nabla u_0(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=-\iint_{\partial G}[f^\delta(\boldsymbol{r})-u_0(\boldsymbol{r})]j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{7.3.40b}$$

其中 $u_0(\boldsymbol{r})$ 是均匀电导率 $\sigma_0$ 时 Laplace 边值问题的解

$$\begin{gathered}\nabla^2u_0(\boldsymbol{r})=0,\ \boldsymbol{r}\in G\\ \sigma_0\left.\frac{\partial u_0(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G}=j(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered} \tag{7.3.40c}$$

对复杂的边界, 方程 (7.3.40c) 的解可以由有限元方法得到.

注意: 上述推导尽管避免了 Green 函数, 但方程 (7.3.39c) 的右边是边界上的积分, 对一次注入电流 $j(\boldsymbol{r})$ 和测量电势 $f^\delta(\boldsymbol{r})$, 只能得到一个方程, 不可能决定出 $\delta\sigma_n(\boldsymbol{r})$, 解决的方法是: 选择 $M$ 个不同的位置, $M$ 次注入电流 $j_m(\boldsymbol{r})$, $(m=1,2,\cdots,M)$ 和 $M$ 次测量电势 $f_m^\delta(\boldsymbol{r})$, $(m=1,2,\cdots,M)$, 然后得到 $M$ 个方程.

### 7.3.5　椭圆方程的逆源问题

考虑下列椭圆方程的逆源问题

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}u(\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ &u(\boldsymbol{r})|_{\partial G_1}=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1\\ &a(\boldsymbol{r})\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial G_2}=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_2 \end{aligned}\tag{7.3.41a}$$

其中 $\boldsymbol{L}=-\nabla\cdot[a(\boldsymbol{r})\nabla]+b(\boldsymbol{r})$, 区域 $G$ 的边界分成不相交的二部分: $\partial G=\partial G_1+\partial G_2$, 如图 7.3.2, 系数 $a(\boldsymbol{r})$ 和 $b(\boldsymbol{r})$ 已知. 逆问题为: 通过测量部分边界 $\partial G_1$ 上的法向导数

$$a(\boldsymbol{r})\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial G_1}=q^{\delta}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1\tag{7.3.41b}$$

反演源项 $\rho(\boldsymbol{r})$. 令 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G\\ &G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{\partial G_1}=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1,\ \boldsymbol{r}'\in G\\ &\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\bigg|_{\partial G_2}=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G_2,\ \boldsymbol{r}'\in G \end{aligned}\tag{7.3.42a}$$

由 Green 公式 (2.2.18a), 即

$$\int_G(G\boldsymbol{L}'u-u\boldsymbol{L}'G)\mathrm{d}\tau'=-\iint_{\partial G}a\left(G\frac{\partial u}{\partial n'}-u\frac{\partial G}{\partial n'}\right)\mathrm{d}S'\tag{7.3.42b}$$

得到

$$u(\boldsymbol{r})=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'+B(\boldsymbol{r})\tag{7.3.43a}$$

其中边界积分为

$$B(\boldsymbol{r})\equiv\iint_{\partial G_1}a(\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S'-\iint_{\partial G_2}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'\tag{7.3.43b}$$

上式求方向导数, 然后在部分边界 $\partial G_1$ 上取值并且利用式 (7.3.41b) 得到

$$\int_G\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{2}q^{\delta}(\boldsymbol{r})-\frac{\partial B(\boldsymbol{r})}{\partial n},\ \boldsymbol{r}\in\partial G_1\tag{7.3.43c}$$

上式是关于 $\rho(\boldsymbol{r})$ 的第一类 Fredholm 积分方程, 原则上求解这个方程可以得到源项 $\rho(\boldsymbol{r})$. 但由于积分核的奇异性以及离散后方程组的严重欠定方程, 由方程 (7.3.43c) 反演 $\rho(\boldsymbol{r})$ 是非常困难的. 注意: 因为 $\boldsymbol{r}$ 仅仅在曲面 $\partial G_1$ 上取值, 而 $\rho(\boldsymbol{r})$ 是三维函

数; 对二维问题, 方程 (7.3.43c) 的右边非齐次项是一维的, 而 $\rho(\boldsymbol{r})$ 是二维的, 故一定严重欠定.

**例 7.3.3** 在重力场勘探中, 需要解决的问题是: 由于地质密度的变化引起重力场的变化, 通过测量地球表面 $z=0$ 处重力加速度的变化 $\Delta g$, 反演地质密度的分布 $\Delta\rho(x,y,z)$, $(z>0)$. 空间重力势 $u(x,y,z)$ 满足 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-4\pi\Delta\rho(x,y,z),\ (x,y,z)\in(-\infty,\infty) \tag{7.3.44a}$$

附加测量数据为

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=\Delta g^{\delta}(x,y),\ (x,y)\in(-\infty,\infty) \tag{7.3.44b}$$

注意: 本题的定义域是无限大空间, 而不是半空间的边值问题. 在无限大空间, $\Delta\rho(x,y,z)$ 引起的重力场为

$$u(x,y,z)=\int_G\frac{\Delta\rho(x',y',z')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \tag{7.3.44c}$$

其中 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\equiv\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$, $G$ 为地质密度变化区域, 即

$$\Delta\rho(x,y,z)=\begin{cases}\Delta\rho(x,y,z), & (x,y,z)\in G\\ 0, & (x,y,z)\notin G\end{cases} \tag{7.3.44d}$$

在地面 $z=0$ 处, 重力势 $u(x,y,z)$ 的法向导数为

$$\left.\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0}=\int_G\frac{z'\Delta\rho(x',y',z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z'^2]^{3/2}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \tag{7.3.45a}$$

上式代入方程 (7.3.44b) 得到

$$\begin{gathered}\int_G k(x,y;x',y',z')\Delta\rho(x',y',z')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'=\Delta g^{\delta}(x,y)\\ (x,y)\in(-\infty,\infty)\end{gathered} \tag{7.3.45b}$$

其中积分核为

$$k(x,y;x',y',z')\equiv-\frac{z'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z'^2]^{3/2}} \tag{7.3.45c}$$

根据 5.1.2 小节讨论, 方程 (7.3.45b) 是一个奇异积分方程.

**二维情况** $\Delta\rho(x',y',z')=\Delta\rho(x',z')$, 空间重力势 $u(x,z)$ 满足 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-2\pi\Delta\rho(x,z),\ (x,z)\in(-\infty,\infty) \tag{7.3.46a}$$

附加测量数据为

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=\Delta g^{\delta}(x),\ x\in(-\infty,\infty) \tag{7.3.46b}$$

利用二维 Lapace 方程的 Green 函数 (即式 (7.3.11a)) 可以得到

$$u(x,z)=-\iint_{\Omega}\Delta\rho(x',z')\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\mathrm{d}x'\mathrm{d}z' \tag{7.3.46c}$$

其中 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(z-z')^2}$, $\Omega$ 是地质密度变化的二维区域. 在地面 $z=0$ 处, 重力势 $u(x,z)$ 的法向导数为

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0}&=-\iint_{\Omega}\Delta\rho(x',z')\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)_{z=0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}z'\\&=\iint_{\Omega}\frac{z'\Delta\rho(x',z')}{(x-x')^2+z'^2}\mathrm{d}x'\mathrm{d}z'\end{aligned} \tag{7.3.47a}$$

代入式 (7.3.46b) 得到

$$\iint_{\Omega}\frac{z'\Delta\rho(x',z')}{(x-x')^2+z'^2}\mathrm{d}x'\mathrm{d}z'=-\Delta g^{\delta}(x),\ x\in(-\infty,\infty) \tag{7.3.47b}$$

注意: 在 5.1.4 小节的例 5.1.10 中, 由已测得地面 $z=0$ 处重力的变化 $\Delta g$, 反演地质密度不均匀区域的边界, 这样的逆问题得到的是非线性积分方程, 如 Urysohn 积分方程 (5.1.41d).

## 7.4　波动方程的逆问题

本节主要介绍波动方程的逆问题和声波的逆散射理论. 由第一章的讨论可知, 双曲型方程的解比椭圆型和抛物型方程复杂得多, 求解逆问题也较为困难. 由于声波和电磁波是地质勘探、工业无损评价、成像技术等的主要手段, 波动方程的反演方法特别丰富, 包括直接反演方法, 迭代反演方法, 优化反演方法, 等等. 我们首先介绍波动方程系数逆问题的三个实用的迭代技术 (7.4.1 小节), 即时域迭代法, 脉冲谱方法和最佳摄动量法. 在 7.4.2 和 7.4.3 小节中, 介绍声波在不可穿透散射体上的散射和逆散射, 通过测量远场散射数据, 反演散射体的边界形状; 在 7.4.4 和 7.4.5 小节中, 介绍声波在非均匀介质中的散射和逆散射, 通过测量远场散射数据, 反演非均匀介质的参数分布.

### 7.4.1　系数逆问题的迭代法

考虑定义在上半平面 $G:[(x,y)\in(-\infty,\infty),\ z>0]$ 的三维波动方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nabla\cdot(k\nabla u)=f(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0 \tag{7.4.1a}$$

其中 $\rho=\rho(\boldsymbol{r})$ 和 $k=k(\boldsymbol{r})$. 如图 7.4.1 所示, 在 $\varOmega$ 区域以外 $\rho=\rho_0$ 和 $k=k_0$ 为常数, 而在 $\varOmega$ 区域以内存在不均匀区域. 初始条件和边界条件 (边界 $z=0$ 平面用 $\partial G_0:[(x,y)\in(-\infty,\infty),\ z=0]$ 表示) 分别为

$$
\begin{gathered}
u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=0;\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G_0 \\
\left.k\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=g(x,y,t),\ (x,y)\in\partial G_0,\ t>0
\end{gathered}
\tag{7.4.1b}
$$

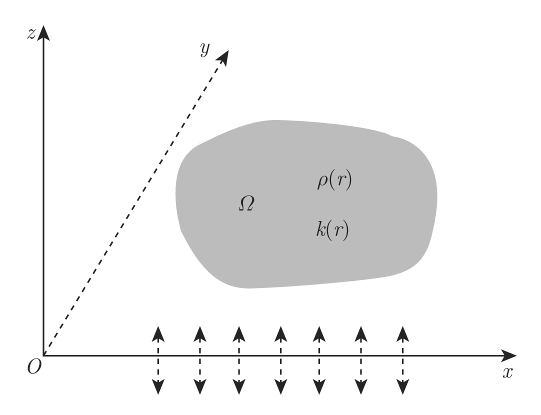



图 7.4.1　已知平面 $z=0$ 的速度, 反演不均匀区

附加条件为: 测量在时间间隔 $t\in(0,T)$ 内边界 $\partial G_0$ 上的速度

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{z=0}=\psi^{\delta}(x,y,t),\ (x,y)\in\partial G_0,\ t>0 \tag{7.4.1c}
$$

假定系数 $\rho(\boldsymbol{r})$ 已知, 逆问题为: 从测量数据 $\psi^{\delta}(x,y,t)$, 反演系数 $k(\boldsymbol{r})$. 注意: 在二维情况, 即 $u(\boldsymbol{r},t)=u(x,z,t)$(见图 7.4.1 的坐标系统), 方程 (7.4.1a) 描述固体介质中传播的水平方向 ($y$ 方向) 极化的弹性波 (位移场只有 $y$ 方向分量); 当 $g=0$ 时, 边界条件 $(k\partial u/\partial z)|_{z=0}=0$ 相当于边界面 ($z=0$) 应力自由.

由于需从方程 (7.4.1a)–(7.4.1c) 同时决定系数 $k(\boldsymbol{r})$ 和瞬态场 $u(\boldsymbol{r},t)$, 故属于非线性的逆问题 (注意: 系数逆问题一般是非线性的, 而源逆问题一般是线性的, 如方程 (7.1.10c) 和 (7.3.43c)).

**时域迭代法**　第一步是线性化处理, 作迭代

$$
\begin{gathered}
k_{n+1}=k_n(\boldsymbol{r})+\delta k_n(\boldsymbol{r}) \\
u_{n+1}(\boldsymbol{r},t)=u_n(\boldsymbol{r},t)+\delta u_n(\boldsymbol{r},t)
\end{gathered}
\tag{7.4.2a}
$$

代入方程 (7.4.1a) 和 (7.4.1b) 并且忽略二阶项, 得到零阶项满足

$$\begin{gathered}\rho\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}-\nabla\cdot(k_n\nabla u_n)=f(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\ u_n|_{t=0}=0;\quad \left.\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G_0\\ k_n\left.\frac{\partial u_n}{\partial z}\right|_{z=0}=g(x,y,t),\ (x,y)\in\partial G_0,\ t>0\end{gathered}\tag{7.4.2b}$$

和一阶项满足

$$\begin{gathered}\rho\frac{\partial^2 \delta u_n}{\partial t^2}-\nabla\cdot(k_n\nabla \delta u_n)=\nabla\cdot(\delta k_n\nabla u_n),\ \boldsymbol{r}\in G,\ t>0\\ \delta u_n|_{t=0}=0;\quad \left.\frac{\partial \delta u_n}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\ \boldsymbol{r}\in G+\partial G_0\\ k_n\left.\frac{\partial \delta u_n}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\ (x,y)\in\partial G_0,\ t>0\end{gathered}\tag{7.4.2c}$$

其中假定在边界 $z=0$ 上 $\delta k_n|_{z=0}=0$. 由式 (3.5.29d), 得到方程 (7.4.2b) 的解为

$$\begin{aligned}u_n(\boldsymbol{r},t)=&\int_0^t\int_G f(\boldsymbol{r}',t')G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t'\\&+\int_0^t\iint_{\partial G_0}g(x',y',t')G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')|_{z'=0}\mathrm{d}S'\mathrm{d}t'\end{aligned}\tag{7.4.3a}$$

上式中 Green 函数 $G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$ 由下式决定

$$\begin{gathered}\rho\frac{\partial^2 G_n}{\partial t^2}-\nabla\cdot(k_n\nabla G_n)=0,\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\ t>0\\ G_n|_{t=0}=0,\quad \rho\left.\frac{\partial G_n}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G+\partial G_0\\ k_n\left.\frac{\partial G_n}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\ x,y\in\partial G_0,\ \boldsymbol{r}'\in G,\ t>0\end{gathered}\tag{7.4.3b}$$

注意: 式 (3.5.29d) 中边界 $\partial G$ 取 $\partial G_0$(平面 $z=0$) 和无限大半球组成, 由时域辐射条件式 (1.3.35b), 无限大半球上的面积分为零.

当 $\rho=\rho_0$ 和 $k_n=k_0$ 恒为常数时, $G_n$ 可由镜像法得到 (见 3.4.3 小节和式 (3.4.32a))

$$\begin{aligned}G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=&\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-c_0t)\\&-\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|-c_0t)\end{aligned}\tag{7.4.3c}$$

其中 $c_0=\sqrt{k_0/\rho_0}$. 如果 $k_n=k_n(\boldsymbol{r})$, 则必须用数值计算方法得到 Green 函数.

同样, 方程 (7.4.2c) 的解可表示为

$$\delta u_n(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t\int_G \nabla'\cdot(\delta k_n\nabla' u_n)G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t' \tag{7.4.4a}$$

利用矢量运算恒等式 $G_n\nabla'\cdot(\delta k_n\nabla' u_n)=\nabla'\cdot(\delta k_n G_n\nabla' u_n)-\delta k_n\nabla' G_n\cdot\nabla' u_n)$ 和 Gauss 公式, 且注意 $\delta k_n|_{z=0}=0$, 上式简化成

$$\delta u_n(\boldsymbol{r},t)=-\int_0^t\int_G \delta k_n(\boldsymbol{r}')\nabla' u_n(\boldsymbol{r}',t')\cdot\nabla' G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t' \tag{7.4.4b}$$

上式取 $z\to 0$ 得到

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial\delta u_n(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right|_{z=0}=-\int_G \delta k_n\nabla' u_n\cdot\nabla'\left.G_n\right|_{z=0}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.4c}$$

注意到附加测量条件式 (7.4.1c), 作近似

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\delta u_n(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right|_{z=0}&=\left.\frac{\partial u_{n+1}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right|_{z=0}-\left.\frac{\partial u_n(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right|_{z=0}\\&\approx\psi^\delta(x,y,t)-\frac{\partial u_n(x,y,0,t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{7.4.5a}$$

代入方程 (7.4.4c) 得到 $\delta k_n(x,y)$ 满足的第一类 Fredholm 积分方程

$$\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{z=0}-\psi^\delta(x,y,t)\right]=\int_\Omega \delta k_n(\nabla' u_n\cdot\nabla' G_n)|_{z=0}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.5b}$$

利用 Tikhonov 正则化方法, 可以得到上式的数值解而完成一次迭代过程.

**脉冲谱迭代法** 仍然考虑方程 (7.4.1a)–(7.4.1c), 根据 PST 原理, 首先对方程 (7.4.1a)–(7.4.1c) 作 Laplace 变换

$$\begin{gathered}\nabla\cdot(k\nabla\tilde{u})-\rho s^2\tilde{u}=\tilde{f},\ s>0\\ k\left.\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right|_{z=0}=\tilde{g}\ ;\ s\tilde{u}|_{z=0}=\tilde{\psi}^\delta,\ s>0\end{gathered} \tag{7.4.6a}$$

其中 $\tilde{u}=\tilde{u}(\boldsymbol{r},s)$, $\tilde{f}=\tilde{f}(\boldsymbol{r},s)$, $\tilde{g}=\tilde{g}(x,y,s)$ 和 $\tilde{\psi}^\delta(x,y,s)$ 分别为 $u(\boldsymbol{r},t)$, $f(\boldsymbol{r},t)$, $g(x,y,t)$ 和 $\psi^\delta(x,y,t)$ 的 Laplace 变换. 其次, 作迭代

$$\begin{gathered}\tilde{u}_{n+1}(\boldsymbol{r},s)=\tilde{u}_n(\boldsymbol{r},s)+\delta\tilde{u}_n(\boldsymbol{r},s)\\ k_{n+1}(\boldsymbol{r})=k_n(\boldsymbol{r})+\delta k_n(\boldsymbol{r})\end{gathered} \tag{7.4.6b}$$

代入方程 (7.4.6a) 的前二式得

$$\begin{gathered}\nabla\cdot(k_n\nabla\tilde{u}_n)-\rho s^2\tilde{u}_n=\tilde{f},\ s>0\\ k_n\left.\frac{\partial\tilde{u}_n}{\partial z}\right|_{z=0}=\tilde{g}(x,y,s),\ (x,y)\in\partial G_0,\ s>0\end{gathered} \tag{7.4.7a}$$

以及

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (k_n \nabla \delta \tilde{u}_n) - \rho s^2 \delta \tilde{u}_n = -\nabla \cdot (\delta k_n \nabla \tilde{u}_n),\ s > 0 \\ &k_n \left.\frac{\partial \delta \tilde{u}_n}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,\ (x, y) \in \partial G_0 \end{aligned} \tag{7.4.7b}$$

其中假定在边界 $z=0$ 上 $\delta k_n|_{z=0} = 0$. 定义 Green 函数 $\tilde{G}_n = \tilde{G}_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', s)$

$$\begin{aligned} &-\nabla \cdot (k_n \nabla \tilde{G}_n) + \rho s^2 \tilde{G}_n = \delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \in G \\ &k_n \left.\frac{\partial \tilde{G}_n}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,\ (x, y) \in \partial G_0 \end{aligned} \tag{7.4.7c}$$

于是, 方程 (7.4.7a) 的解为

$$u_n(\boldsymbol{r}, s) = \int_G \tilde{G}_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', s) \tilde{f} \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' - \iint_{\partial G_0} \tilde{G}_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', s)|_{z'=0} \tilde{g} \mathrm{d}S' \tag{7.4.7d}$$

方程 (7.4.7b) 化为积分方程

$$\delta \tilde{u}_n(\boldsymbol{r}, s) = -\int_G \tilde{G}_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', s) \nabla' \cdot (\delta k_n \nabla' U_n) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' \tag{7.4.8a}$$

即

$$\begin{aligned} \delta \tilde{u}_n(\boldsymbol{r}, s) &= -\int_G \nabla' \cdot (\delta k_n \tilde{G}_n \nabla' \tilde{u}_n) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' + \int_G \delta k_n (\nabla' \tilde{G}_n \cdot \nabla' \tilde{u}_n) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' \\ &= -\iint_{\partial G_0} \delta k_n \tilde{G}_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial n'} \mathrm{d}S' + \int_G \delta k_n (\nabla' \tilde{G}_n \cdot \nabla' \tilde{u}_n) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' \end{aligned} \tag{7.4.8b}$$

由 $\delta k_n|_{z=0} = 0$, 第一项面积分为零, 于是

$$\delta \tilde{u}_n(\boldsymbol{r}, s) = \int_G \delta k_n (\nabla' \tilde{G}_n \cdot \nabla' \tilde{u}_n) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' \tag{7.4.8c}$$

上式在边界 $z=0$ 上取值且由方程 (7.4.6a) 的第三式测量条件得到

$$\int_G \delta k_n (\nabla' \tilde{G}_n \cdot \nabla' \tilde{u}_n)|_{z=0} \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' = \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\psi}^\delta}{s} - \tilde{u}_n|_{z=0} \right) \tag{7.4.9a}$$

由于在 $\Omega$ 外 $\delta k_n = 0$, 上式简化成

$$\int_\Omega \delta k_n (\nabla' \tilde{G}_n \cdot \nabla' \tilde{u}_n)|_{z=0} \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' = \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\psi}^\delta}{s} - \tilde{u}_n|_{z=0} \right) \tag{7.4.9b}$$

利用上节的正则化方法, 可求得上式的解, 完成一次迭代过程.

因方程 (7.4.9b) 涉及到 Green 函数的梯度计算, 这是非常困难的. 另一种计算方法是用有限元法直接求解方程 (7.4.7a) 和 (7.4.7b). 根据变分原理, 方程 (7.4.7a) 和 (7.4.7b) 等价的变分为

$$J(\tilde{u}_n) = -\frac{1}{2}\int_G [k_n(\nabla\tilde{u}_n)^2 + s^2\rho(\tilde{u}_n)^2]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} - \int_G \tilde{u}_n \cdot \tilde{f}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{7.4.10a}$$

$$\begin{aligned} J(\delta\tilde{u}_n) =& -\frac{1}{2}\int_G [k_n(\nabla\delta\tilde{u}_n)^2 + s^2\rho(\delta\tilde{u}_n)^2]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \\ & - \int_G \delta k_n \nabla\delta\tilde{u}_n \cdot \nabla\tilde{u}_n \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{7.4.10b}$$

对区域 $G$ 进行三角形划分, 可以得到关于 $\delta k_n$ 和 $\delta\tilde{u}_n$ 的超定线性方程组, 然后用正则化方法求解, 这样不仅避免了 Green 函数的梯度计算, 而且避免了求解正问题.

如果 $\rho = \rho(\boldsymbol{r})$ 未也知, 则迭代式 (7.4.6b) 相应增加

$$\rho_{n+1}(\boldsymbol{r}) = \rho_n(\boldsymbol{r}) + \delta\rho_n(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.11a}$$

方程 (7.4.7b) 修改为

$$\begin{gathered} \nabla \cdot (k_n \nabla\delta\tilde{u}_n) - \rho_n s^2 \delta\tilde{u}_n = -\nabla \cdot (\delta k_n \nabla\tilde{u}_n) + \delta\rho_n s^2 \tilde{u}_n \\ k_n \left.\frac{\partial\delta\tilde{u}_n}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,\ (x, y) \in \partial G_0 \end{gathered} \tag{7.4.11b}$$

通过类似的过程, 不难得到 $\delta k_n$ 和 $\delta\rho_n$ 满足的积分方程

$$\begin{aligned} &\int_\Omega [\delta k_n \nabla'\tilde{G}_n|_{z=0} \cdot \nabla'\tilde{u}_n - \delta\rho_n s^2 \tilde{G}_n|_{z=0}\tilde{u}_n]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \\ &\approx \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_n|_{z=0} - \frac{\tilde{\psi}^\delta}{s}\right),\ s > 0,\ (x, y) \in \partial G_0 \end{aligned} \tag{7.4.11c}$$

**最佳摄动量法** 直接考虑双参数的反演, 设迭代过程为

$$\begin{aligned} k_{n+1}(\boldsymbol{r}) &= k_n(\boldsymbol{r}) + \delta k_n(\boldsymbol{r}) \\ \rho_{n+1}(\boldsymbol{r}) &= \rho_n(\boldsymbol{r}) + \delta\rho_n(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{7.4.12a}$$

其中摄动量由下列非线性泛函极小得到

$$J_\alpha(\delta k, \delta\rho) = \int_0^T \iint_{\partial G_0} \left(\left.\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t}\right|_{z=0} - \psi^\delta\right)\mathrm{d}S\mathrm{d}t + \alpha\Omega(\delta k, \delta\rho) \tag{7.4.12b}$$

其中 $T$ 是测量延续时间, 稳定化泛函取为

$$\Omega(\delta k, \delta\rho) \equiv \int_\Omega [q_1|\delta k_n(\boldsymbol{r})|^2 + q_2|\delta\rho_n(\boldsymbol{r})|^2]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{7.4.12c}$$

式中常数 $q_1>0$ 和 $q_2>0$ 可看作权重因子 (量纲常数). 扰动的展开为

$$\begin{aligned}\delta k_n(\boldsymbol{r})&\approx\sum_{j=1}^{N}\delta a_j^k\phi_j(\boldsymbol{r})\\ \delta\rho_n(\boldsymbol{r})&\approx\sum_{j=1}^{N}\delta a_j^\rho\phi_j(\boldsymbol{r})\end{aligned}\tag{7.4.13a}$$

方程 (7.2.42a) 修改为

$$u_{n+1}(\boldsymbol{r},t)\approx u_n(k_n,\rho_n)+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\delta a_j^k+\sum_{j=1}^{N}\beta_j\delta a_j^\rho+\cdots\tag{7.4.13b}$$

其中参数 $\alpha_j$ 和 $\beta_j$ 定义为

$$\begin{aligned}\alpha_j(\boldsymbol{r},t)&\equiv\lim_{\Delta_j\to0}\frac{u_n(k_n+\Delta_j\phi_j,\rho_n)-u_n(k_n,\rho_n)}{\Delta_j}\\ \beta_j(\boldsymbol{r},t)&\equiv\lim_{\Delta_j\to0}\frac{u_n(k_n,\rho_n+\Delta_j\phi_j)-u_n(k_n,\rho_n)}{\Delta_j}\end{aligned}\tag{7.4.13c}$$

注意: 以上诸式中忽略了空间和时间变量 $(\boldsymbol{r},t)$, 如 $u_n(k_n,\rho_n)=u_n(k_n,\rho_n,\boldsymbol{r},t)$ 等. 把式 (7.4.13b) 代入方程 (7.4.12b) 得到类似与式 (7.2.43a) 的泛函式

$$\begin{aligned}J_\alpha(\delta k,\delta\rho)=&\int_0^T\iint_{\partial G_0}\left(\dot{u}_n-\psi^\delta+\sum_{j=1}^{N}\dot{\alpha}_j\delta a_j^k+\sum_{j=1}^{N}\dot{\beta}_j\delta a_j^\rho\right)^2_{z=0}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\\ &+\alpha\Omega(\delta k,\delta\rho)\end{aligned}\tag{7.4.14a}$$

注意: 上式中 $\dot{u}_n$, $\dot{\alpha}_j$ 和 $\dot{\beta}_j$ 表示对时间的偏导数. 展开后得到

$$\begin{aligned}J_\alpha(\delta k,\delta\rho)=&\sum_{i,j=1}^{N}(a_{ij}^k+\alpha q_1b_{ij})\delta a_i^k\delta a_j^k+2\sum_{j=1}^{N}b_j^k\delta a_j^k\\ &+\sum_{i,j=1}^{N}(a_{ij}^\rho+\alpha q_2b_{ij})\delta a_i^\rho\delta a_j^\rho+2\sum_{j=1}^{N}b_j^\rho\delta a_j^\rho\\ &+2\sum_{i,j=1}^{N}h_{ij}\delta a_i^k\delta a_j^\rho+d\end{aligned}\tag{7.4.14b}$$

其中诸系数为内积: $a_{ij}^k=(\dot{\alpha}_i,\dot{\alpha}_j)$, $a_{ij}^\rho=(\dot{\beta}_i,\dot{\beta}_j)$, $h_{ij}=(\dot{\alpha}_i,\dot{\beta}_j)$, $b_j^k=(\dot{u}_n-\psi^\delta,\dot{\alpha}_j)$, $b_j^\rho=(\dot{u}_n-\psi^\delta,\dot{\beta}_j)$, $d=(\dot{u}_n-\psi^\delta,\dot{u}_n-\psi^\delta)$, 以及

$$b_{ij}=\int_\Omega\phi_i(\boldsymbol{r})\phi_j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\tag{7.4.15a}$$

其中 $a(\boldsymbol{r},t)$ 和 $b(\boldsymbol{r},t)$ 的内积定义为

$$(a,b)\equiv\int_0^T\iint_{\partial G_0}a(\boldsymbol{r},t)b(\boldsymbol{r},t)|_{z=0}\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{7.4.15b}$$

由 $J_\alpha(\delta k,\delta\rho)$ 极小得到决定 $\delta a_i^k$ 与 $\delta a_i^\rho$ 的代数方程组

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^N(a_{ij}^k+\alpha q_1 b_{ij})\delta a_i^k+\sum_{i=1}^N h_{ij}\delta a_i^\rho=b_j^k\\&\sum_{i=1}^N(a_{ij}^\rho+\alpha q_2 b_{ij})\delta a_i^\rho+\sum_{i=1}^N h_{ji}\delta a_i^k=b_j^\rho\end{aligned} \tag{7.4.15c}$$

其中 $i=1,2,\cdots,N$. 得到 $\delta a_i^k$ 与 $\delta a_i^\rho$ 的解后, 就完成了一次迭代, 收敛判据也可以选为 $d<\varepsilon$.

显然, 最佳摄动量法也可以用于源的逆问题, 即反演函数 $f(\boldsymbol{r},t)$, 具体过程不再重复.

### 7.4.2 散射体的散射和 Kirchhoff 近似

当空间传播的波 (称为入射波, 包括声波、电磁波以及 de Broglie 波) 遇到密度或速度不同的区域 (称为缺陷) 时, 波将改变原来传播的路径, 向其他方向偏转, 这种现象称为波的**散射**. 散射波定义为实际空间的波场与入射波 (它是缺陷不存在时的空间波场) 之差. 散射理论的正问题为: 根据入散波和控制方程以及相应的边界决定散射场. 而散射理论的逆问题是: 从散射场的远场性质, 反演非均匀介质的特性或重构控制方程, 或者决定控制方程的定义区域.

波的散射特性依赖于入射波波长 $\lambda$ 和散射体的大小, 如果用 $l$ 来表征散射体的线度, 当 $\lambda/l\gg1$, 即低频情况, 入射波波长远大于散射体, 可用 Born 近似来讨论; 当 $\lambda/l\ll1$, 即高频情况, 入射波长远小于散射体, 可用 Kirchhoff 近似 (也称为物理光学近似) 来讨论, 在这两种近似情况下, 逆散射问题均能被有效地线性化. 但当入射波波长与散射体线度在同一数量级时, 即 $\lambda/l\approx1$(称为共振散射区), 散射和逆散射问题要复杂得多, 只能通过数值方法才能求解.

此外, 根据散射体的特征, 声波的散射又可以分为二类: 散射体的散射和非均匀介质的散射. 散射体又包括: 不可穿透的刚性散射体 (例如空气中的固体缺陷)、不可穿透的绝对软边界散射体 (如固体介质中的空洞)、不考虑穿透的阻抗边界散射体, 以及可穿透的散射体 (即散射体与背景介质有清晰的边界, 但声波能够透射进入散射体, 如固体介质中的其他固体缺陷, 流体背景介质的其他流体团) 四种情况. 本小节主要分析不可穿透散射体情况, 可穿透情况可作为下节的特殊情况看待.

在频率域, 双曲型的声波方程可转化成 Helmholtz 方程 (见 1.3.4 小节讨论)

$$\nabla^2u(\boldsymbol{r})+k^2u(\boldsymbol{r})=0,\quad \boldsymbol{r}\in\overline{G} \tag{7.4.16a}$$

其中 $k$ 为波数 (假定为常量), $u(\boldsymbol{r})$ 为空间声压场分布, $\overline{G}$ 是区域 $G$(缺陷) 的外部开空间, 见图 7.4.2. 在缺陷表面 $\partial G$ 处满足边界条件为

(1) 刚性散射体, 表面满足第二类边界条件或者 Neumann 边界条件

$$\left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G}=0 \tag{7.4.16b}$$

(2) 绝对软边界散射体, 表面满足第一类边界条件或者 Dirichlet 边界条件

$$u(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=0 \tag{7.4.16c}$$

(3) 阻抗边界散射体, 表面满足第三类边界条件或者 Robin 边界条件

$$\left.\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}+\mathrm{i}k\beta(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r})\right]\right|_{\partial G}=0 \tag{7.4.16d}$$

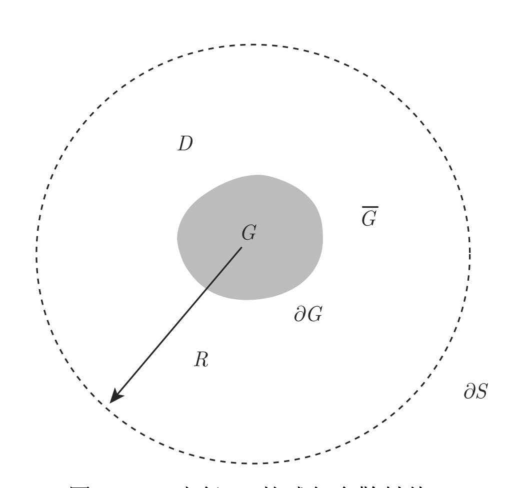



图 7.4.2　半径 $R$ 的球包含散射体 $G$

必须注意的是, 上式中的系数 $\mathrm{i}k\beta(\boldsymbol{r})$ 是复数. 以上边界条件可以统一写成算子的形式

$$\boldsymbol{B}u(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=0 \tag{7.4.17a}$$

此外, 在无限远处, 散射波还必须满足 Sommerfeld 辐射条件, 即

$$\lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty}|\boldsymbol{r}|\left[\frac{\partial u^{(s)}(\boldsymbol{r})}{\partial|\boldsymbol{r}|}-\mathrm{i}ku^{(s)}(\boldsymbol{r})\right]=0 \tag{7.4.17b}$$

其中 $u^{(s)}(\boldsymbol{r})$ 为散射场, 等于总波场 $u(\boldsymbol{r})$ 与入射波 $u^{(i)}(\boldsymbol{r})$ (它是缺陷不存在时的空间波场) 之差, 即 $u^{(s)}(\boldsymbol{r})=u(\boldsymbol{r})-u^{(i)}(\boldsymbol{r})$.

**Kirchhoff 积分解** 在任意有界闭区域 $D$, Green 公式为

$$\int_D (u\nabla'^2 v - v\nabla'^2 u)\mathrm{d}\tau' = \iint_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial n'} - v\frac{\partial u}{\partial n'}\right)\mathrm{d}S' \tag{7.4.18a}$$

其中 $\partial D$ 是 $D$ 的边界. 取包含散射体 $G$ 且半径足够大的球 $R$, 如图 7.4.2, 假定 $D$ 为 $\partial G$ 和球面 $\partial S$ 包围的区域, 使用上式

$$\begin{aligned}\int_D (u\nabla'^2 v - v\nabla'^2 u)\mathrm{d}\tau &= \iint_{\partial G}\left(u\frac{\partial v}{\partial n'} - v\frac{\partial u}{\partial n'}\right)\mathrm{d}S' \\ &\quad + \iint_{\partial S}\left(u\frac{\partial v}{\partial n'} - v\frac{\partial u}{\partial n'}\right)\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{7.4.18b}$$

注意: 在散射体表面 $\partial G$ 上, 法向单位矢量 $\boldsymbol{n}'$ 指向原点; 而在大球面 $\partial S$ 上, 法向单位矢量 $\boldsymbol{n}'$ 指向无限远处. 如果 $u$ 是 Helmhltz 方程 (7.4.16a) 的解, 而 $v$ 取 Helmholtz 方程的基本解

$$v \equiv g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{7.4.18c}$$

于是

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r}) &= \iint_{\partial G}\left[g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S' \\ &\quad + \iint_{\partial S}\left[g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{7.4.18d}$$

下面证明当球半径 $R \to \infty$ 时, 上式第二项面积分为零. 事实上, 通过球面的声能量应为常数 (对散射场或者辐射场), 即如果下式成立

$$\iint_{\partial S}|u|^2\mathrm{d}S' = C(\text{常数}) \tag{7.4.19a}$$

则

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial S}u(\boldsymbol{r}')\left[\frac{\partial g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} - \mathrm{i}kg(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \\ &\leqslant \left[\iint_{\partial S}|u(\boldsymbol{r}')|^2\mathrm{d}S'\right]^{1/2}\cdot\left[\iint_{\partial S}\left|\frac{\partial g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} - \mathrm{i}kg(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right|^2\mathrm{d}S'\right]^{1/2} \\ &= C\left[\iint_{\partial S}\left|\frac{\partial g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} - \mathrm{i}kg(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right|^2\mathrm{d}S'\right]^{1/2} \to 0, |\boldsymbol{r}'| \to \infty\end{aligned} \tag{7.4.19b}$$

同样

$$\begin{aligned}
&\iint_{\partial S} g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\mathrm{i}ku(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \\
&\leqslant \left[\iint_{\partial S}|g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|^2\mathrm{d}S'\right]^{1/2}\left[\iint_{\partial S}\left|\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\mathrm{i}ku(\boldsymbol{r}')\right|^2\mathrm{d}S'\right]^{1/2} \\
&= C\left[\iint_{\partial S}\left|\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\mathrm{i}ku(\boldsymbol{r}')\right|^2\mathrm{d}S'\right]^{1/2}\to 0, |\boldsymbol{r}'|\to\infty
\end{aligned} \tag{7.4.19c}$$

其中对 $u$ 和 $G$ 已利用了辐射条件 (7.4.17b), 上二式相减得到

$$\lim_{|\boldsymbol{r}'|\to\infty}\iint_{\partial S}\left[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'=0 \tag{7.4.19d}$$

因此方程 (7.4.18d) 简化成

$$u(\boldsymbol{r})=\iint_{\partial G}\left[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S',\ \boldsymbol{r}\in\overline{G} \tag{7.4.20a}$$

或者用散射体表面 $\partial G$ 上的表面法向单位矢量 $\boldsymbol{n}'_S=-\boldsymbol{n}'$(指向无限远) 表示得到 Kirchhoff 积分形式的解

$$u(\boldsymbol{r})=\iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}-g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\right]\mathrm{d}S',\ \boldsymbol{r}\in\overline{G} \tag{7.4.20b}$$

上式的意义是: 把空间一点的场用散射体表面 $\partial G$ 上的场及其法向导数来表示.

**远场近似**　下面利用上式分析波的远场特性. 当 $|\boldsymbol{r}|\gg|\boldsymbol{r}'|$ 时, 由近似

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{|\boldsymbol{r}|^2-2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'+|\boldsymbol{r}'|^2}\approx|\boldsymbol{r}|-\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right) \tag{7.4.21a}$$

其中 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ 为远场观察点的单位方向矢量, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}&\approx\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|}}{|\boldsymbol{r}|}\left[\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right] \\
\frac{\partial}{\partial n'_S}\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}&\approx\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|}}{|\boldsymbol{r}|}\left[\frac{\partial\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right]
\end{aligned} \tag{7.4.21b}$$

代入方程 (7.4.20b) 得到远场表达式

$$u(\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|}}{|\boldsymbol{r}|}\left[u_\infty(\boldsymbol{e})+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right],\ |\boldsymbol{r}|\to\infty \tag{7.4.21c}$$

其中远场角分布 $u_\infty(\boldsymbol{e})$ 为

$$u_\infty(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}}{\partial n'_S} - \frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.21d}$$

写成算子的形式

$$\boldsymbol{F}(u) = u_\infty(\boldsymbol{e}) \tag{7.4.22a}$$

其中积分算子 $F$ 为

$$\boldsymbol{F}(u) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}}{\partial n'_S} - \frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.22b}$$

远场分布 $u_\infty(\boldsymbol{e})$ 由实验测量得到, 因包含误差而写成 $u^\delta_\infty(\boldsymbol{e})$, 方程 (7.4.22a) 可以写成

$$\boldsymbol{F}(u) = u^\delta_\infty(\boldsymbol{e}) \tag{7.4.22c}$$

显然, 上式是一个第一类积分方程, 从测量的远场分布 $u^\delta_\infty(\boldsymbol{e})$, 要求重构 Helmholtz 方程的解 $u(\boldsymbol{r})$ 和定义域 $G$. 方程 (7.4.22c) 是反演散射体形状 $\partial G$ 的基础, 将在下小节介绍.

**声波散射** 现在考虑波的散射问题, 设入射波为 $\boldsymbol{d}$ 方向传播的平面波

$$u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d}) = u_0\exp(\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{7.4.23a}$$

其中 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ 为入射波的单位方向矢量. 由于 Helmholtz 方程是关于 $u(\boldsymbol{r})$ 的线性方程, 而方程 (7.4.23a) 满足 Helmholtz 方程, 故总声场是入射场和散射场之和

$$u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d}) = u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d}) + u^{(s)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d}) \tag{7.4.23b}$$

由方程 (7.4.20b) 得到散射波满足的积分方程

$$u^{(s)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d}) = \iint_{\partial G}\left[u^{(s)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S} - g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u^{(s)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})}{\partial n'_S}\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.23c}$$

其中 $\boldsymbol{r}\in\overline{G}$. 另一方面, 入射场在整个空间都满足 Helmholtz 方程, 可以取 Green 公式 (7.4.18a) 中的区域 $D$ 为 $G$ 内 (对入射波而言, 不存在散射体) 且在 $G$ 内运用 Green 公式 (7.4.18a), 因 $\boldsymbol{r}\in\overline{G}$ 而 $\boldsymbol{r}'\in G$, 故 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$, 即 Green 函数在 $G$ 内满足 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0$, 于是, 式 (7.4.18a) 给出

$$0 = \iint_{\partial G}\left[u^{(i)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'_S} - g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u^{(i)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})}{\partial n'_S}\right]\mathrm{d}S',\boldsymbol{r}\in\overline{G} \tag{7.4.23d}$$

上两式相加得到

$$u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})+\iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n_S'}-g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})}{\partial n_S'}\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.24a}$$

注意: 散射场满足方程 (7.4.20b) 或者 (7.4.23c), 入射场不满足辐射条件, 不满足方程 (7.4.20b).

因此, 散射场 ($\boldsymbol{r}\in\overline{G}$) 的表达式为

$$u^{(s)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=\iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n_S'}-g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})}{\partial n_S'}\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.24b}$$

注意, 式 (7.4.23c) 与上式的区别是: 前者的面积分中是散射场 $u^{(s)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})$, 而后者是总场 $u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})$, 在散射体的表面边界条件中, 出现的是总场 $u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})$.

远场表达式为

$$u^{(s)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|}}{|\boldsymbol{r}|}\left[u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right],\ |\boldsymbol{r}|\to\infty \tag{7.4.24c}$$

其中远场角分布 $u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})$ 为

$$u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}}{\partial n_S'}-\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})}{\partial n_S'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.24d}$$

根据边界条件方程 (7.4.16b)~(7.4.16d):

(1) Dirichlet 边界 (软边界): 由边界条件式 (7.4.16c)

$$u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})-\iint_{\partial G}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})}{\partial n_S'}\mathrm{d}S' \tag{7.4.25a}$$

由式 (7.4.21d) 得到远场角分布

$$u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})}{\partial n_S'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}S' \tag{7.4.25b}$$

(2) Neumann 边界 (刚性边界): 由边界条件式 (7.4.16b)

$$u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})+\iint_{\partial G}u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n_S'}\mathrm{d}S' \tag{7.4.26a}$$

式 (7.4.21d) 得到远场角分布

$$u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}}{\partial n_S'}\mathrm{d}S' \tag{7.4.26b}$$

(3) Robin 边界 (阻抗边界): 由边界条件式 (7.4.16d)

$$u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})+\iint_{\partial G}u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\left[\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n_S'}+\mathrm{i}k\beta(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.27a}$$

由式 (7.4.21d) 得到远场角分布

$$u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\left[\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}}{\partial n_S'}+\mathrm{i}k\beta(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.27b}$$

原则上, 如果给定散射体 $G$, 就能从以上积分方程求出散射场, 但非常困难, 在第五章的例 5.1.4 中, 仅仅对球体的散射, 给出了散射场的级数形式的解.

**二维情况**　Helmholtz 方程的基本解为

$$v=g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{7.4.28a}$$

当 $|\boldsymbol{r}|\to\infty$, 远场近似为

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\approx\sqrt{\frac{2}{\pi k|\boldsymbol{r}|}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\exp[\mathrm{i}k(|\boldsymbol{r}|-\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')]\left[1+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right] \tag{7.4.28b}$$

与式 (7.4.21c) 相应的远场表达式为

$$u(\boldsymbol{r})=\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|)}{\sqrt{|\boldsymbol{r}|}}\left[u_\infty(\boldsymbol{e})+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right],\ |\boldsymbol{r}|\to\infty \tag{7.4.28c}$$

其中远场角分布 $u_\infty(\boldsymbol{e})$ 为

$$u_\infty(\boldsymbol{e})=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}\int_{\partial\Gamma}\left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}}{\partial n_S'}-\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n_S'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}\right]\mathrm{d}\Gamma' \tag{7.4.28d}$$

注意: 在二维情况, 式中积分是沿散射体边界曲线 $\partial\Gamma$ 的线积分.

当入射场为 $u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=u_0\exp(\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})$, 相应的散射场远场表达式为

$$u^{(s)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|}}{\sqrt{|\boldsymbol{r}|}}\left[u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right],\ |\boldsymbol{r}|\to\infty \tag{7.4.29a}$$

其中远场角分布 $u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})$ 为

$$u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}\int_{\partial\Gamma}\left[u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}}{\partial n_S'}-\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})}{\partial n_S'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}\right]\mathrm{d}\Gamma' \tag{7.4.29b}$$

**边界反演的 Kirchhoff 近似**　原则上, 从方程 (7.4.22c) 的 $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e})$ ($\boldsymbol{e}$ 覆盖整个单位球面) 可反演出散射体的边界, 我们将在 7.4.3 小节讨论. 下面首先介绍一种简单的近似方法, 即 Kirchhoff 近似, 它能给出比较简洁的边界反演表达式.

以刚性边界条件 $\partial u/\partial n|_{\partial G}=0$ 为例, 重写严格的远场角分布式 (7.4.26b)

$$u_{\infty}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}[u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\nabla\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')]\cdot\boldsymbol{n}'\mathrm{d}S' \tag{7.4.30a}$$

假定边界面是凸曲面 (如图 7.4.3), 在高频近似下, 入射波在边界上的散射可看作平面反射, 在刚性平面上, 反射波与入射波的振幅和相位都相等, 即在边界 $\partial G_1$ 上可近似为

$$u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})|_{\partial G_1}=[u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})+u^{(s)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e})]|_{\partial G_1}\approx 2u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})|_{\partial G_1} \tag{7.4.30b}$$

而在散射体的另一个侧面形成阴影区, 波场近似为零, 即 $u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})|_{\partial G_2}\approx 0$. 注意: 如果曲面较复杂, 就不能看作刚性平面反射, 式 (7.4.30b) 不成立. 于是

$$u_{\infty}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=\frac{1}{2\pi}\iint_{\partial G_1}[u^{(i)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\nabla\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')]\cdot\boldsymbol{n}'\mathrm{d}S' \tag{7.4.30c}$$

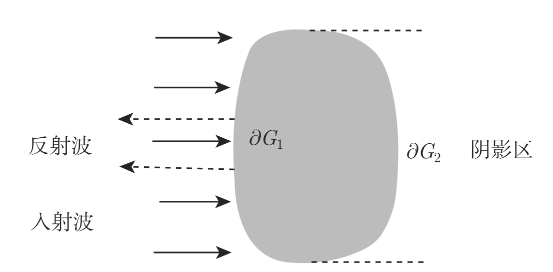



图 7.4.3　Kirchhoff 近似, 在入射波的另一侧形成阴影区 (波场近似为零)

其中 $\partial G_1$ 为入射波照射的一面边界. 设入射波为由式 (7.4.23a) 表示的 $\boldsymbol{d}$ 方向传播的平面波, 代入上式

$$u_{\infty}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=-\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\iint_{\partial G_1}\exp[\mathrm{i}k(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{r}']\ \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}'\mathrm{d}S' \tag{7.4.30d}$$

如果测量的是背向散射 (Back-scattering), 即发射和接收为同一换能器, 即 $\boldsymbol{e}=-\boldsymbol{d}$, 故 $\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}=2\boldsymbol{d}$, 式 (7.4.30d) 变成

$$u_{\infty}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\iint_{\partial G_1}\exp(2\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}')\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}'\mathrm{d}S' \tag{7.4.31a}$$

同样, 如果在物体的另一边 $\partial G_2$ 用相同的平面波照射, 只要把上式中的入射方向 $\boldsymbol{d}$ 改为 $-\boldsymbol{d}$, 即

$$u_{\infty}(\boldsymbol{e},-\boldsymbol{d})=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\iint_{\partial G_2}\exp(-2\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}')(-\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}')\mathrm{d}S' \tag{7.4.31b}$$

其中 $\partial G_2$ 为入射波照射的另一面边界, 显然有 $\partial G = \partial G_1 + \partial G_2$. 上式取复共轭并与 (7.4.31a) 相加

$$u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) + u_\infty^*(\boldsymbol{e},-\boldsymbol{d}) = \frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\iint_{\partial G} \exp(-2\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}')\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}'\mathrm{d}S' \tag{7.4.32a}$$

利用 Gauss 定理, 上述面积分化为 $G$ 上的体积分

$$\begin{aligned} u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) + u_\infty^*(\boldsymbol{e},-\boldsymbol{d}) &= \frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\int_G \nabla\cdot[\boldsymbol{d}\exp(-2\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \\ &= \frac{k^2}{\pi}\int_G \exp(-2\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \end{aligned} \tag{7.4.32b}$$

定义形状函数

$$\gamma(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{r}\in G \\ 0, & \boldsymbol{r}\notin G \end{cases} \tag{7.4.33a}$$

并且令 $\boldsymbol{K} = 2k\boldsymbol{d}$ 以及

$$\Gamma(\boldsymbol{K}) = 4\pi\left[\frac{u_\infty(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) + u_\infty^*(\boldsymbol{e},-\boldsymbol{d})}{|\boldsymbol{K}|^2}\right] \tag{7.4.33b}$$

于是式 (7.4.32b) 成为

$$\Gamma(\boldsymbol{K}) = \int_G \gamma(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.33c}$$

因此形状函数 $\gamma(\boldsymbol{r})$ 是 $\Gamma(\boldsymbol{K})$ 的 Fourier 变换

$$\gamma(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \Gamma(\boldsymbol{K})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{K} \tag{7.4.33d}$$

上式称为 **Bojarski 等式**, 给出了从远场散射数据重构凸散射物边界的方法. 然而, 我们面临二个困难: 1. 与 Kirchhoff 近似条件的矛盾, 在导出 Bojarski 等式时, 假定高频近似成立, 即入射波长远小于散射体尺寸, 但式 (7.4.33d) 的积分包括了低频在内的一切频率; 2. 实际测量的困难, 式 (7.4.33d) 要求从一切方位角测量背向散射场. 在所有方位角和所有频率范围取得散射信息的要求是不实际的. 在实际应用中, Kirchhoff 近似条件是难以满足的.

### 7.4.3 散射体形状的逆散射

逆散射问题的目的是: 由入射平面波 $u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d}) = u_0^{(i)}\exp(\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})$, 测量远场角分布 $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})$, 通过式 (7.4.24d)(二维情况为式 (7.4.29b)), 反演区域 $G$, 即散射体形状. 写成完整的散射和逆散射问题为

(1) 控制方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) + k^2 u(\boldsymbol{r}) = 0,\ \boldsymbol{r} \in \overline{G}$$
$$u(\boldsymbol{r}) = u_0^{(i)} \exp(\mathrm{i}k\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{r}) + u^{(s)}(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.34a}$$

(2) 边界条件

$$\boldsymbol{B}u(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = 0 \tag{7.4.34b}$$

(3) 辐射条件

$$\lim_{|\boldsymbol{r}| \to \infty} |\boldsymbol{r}| \left[ \frac{\partial u^{(s)}(\boldsymbol{r})}{\partial |\boldsymbol{r}|} - \mathrm{i}ku^{(s)}(\boldsymbol{r}) \right] = 0 \tag{7.4.34c}$$

(4) 附加测量条件: 散射场的远场角分布 $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d})$.

正问题: 给定区域 $G$(散射体形状)、$\boldsymbol{B}$ 的形式, 求散射场的空间分布 $u^{(s)}(\boldsymbol{r})$ 及远场角分布式 $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d})$; 逆问题: 给定入射场 $u^{(i)}(\boldsymbol{r})$ 以及测量得到的散射场远场角分布 $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d})$, 反演区域 $G$ 和散射场的空间分布 $u^{(s)}(\boldsymbol{r})$. 注意: 在逆问题中, 边界算子 $\boldsymbol{B}$ 的形式往往难以给定, 或者作为先验条件给出 (见下面讨论). 由方程 (7.4.22c), 逆问题就是解第一类 Fredholm 积分方程

$$\boldsymbol{F}(u) = u_\infty^\delta(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d}) \tag{7.3.35a}$$

其中积分算子 $F$ 为

$$\boldsymbol{F}(u) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial G} \left[ u(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{d}) \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}}{\partial n_S'} - \frac{\partial u(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{d})}{\partial n_S'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'} \right] \mathrm{d}S' \tag{7.4.35b}$$

或者二维情况

$$\boldsymbol{F}(u) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial \Gamma} \left[ u(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{d}) \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}}{\partial n_S'} - \frac{\partial u(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{d})}{\partial n_S'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'} \right] \mathrm{d}\Gamma' \tag{7.4.35c}$$

事实上, 从方程 (7.4.35a) 反演区域 $G$ 的精确形状是非常困难的. 下面介绍二个求近似解的方法, 即分解法和叠加法.

**分解法** 分解法要求是绝对软边界的散射体, 即在未知边界 $\partial G$ 上满足 $u(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = 0$. 所谓分解法就是把反演散射场 $u^{(s)}(\boldsymbol{r})$ 和反演区域 $G$ 分为二个部分: 首先, 由测量得到的远场数据 $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d})$ 反演散射场 $u^{(s)}(\boldsymbol{r})$; 然后计算总场 $u(\boldsymbol{r}) = u^{(s)}(\boldsymbol{r}) + u^{(i)}(\boldsymbol{r})$ 的零点轨迹, 或者 $||u^{(s)} + u^{(i)}||$ 极小轨迹, 于是可以把这个轨迹作为区域边界 $\partial G$, 具体过程如下:

(1) 散射场 $u^{(s)}(\boldsymbol{r})$ 的反演: 显然, 直接解方程 (7.4.34a) 和 (7.4.34b) 是不可能得到散射场 $u^{(s)}(\boldsymbol{r})$, 因为不知道边界 $\partial G$. 我们在待求区域 $G$ 内选择一个辅助曲

面 $\partial Q$(注意: 作为先验知识, 必须知道区域 $G$ 的大致大小), 把散射场表示为积分的形式

$$u^{(s)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=\iint_{\partial Q}\phi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{7.4.36a}$$

其中 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是 Helmholtz 方程的基本解, 由式 (7.4.18c) 或者 (7.4.28a) 表示. 把散射场表示成上式是合理的, 因为 $\boldsymbol{r}'\in\partial Q$, 而 $\boldsymbol{r}\in\overline{G}$, 即 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$, 故 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是 Helmholtz 方程的解, 所以式 (7.4.36a) 满足 Helmholtz 方程, 函数 $\phi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})$(称为**密度函数**) 可以由远场数据 $u^{\delta}_{\infty}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})$ 决定. 利用式 (7.4.21b), 方程 (7.4.36a) 的远场近似为

$$u^{(s)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})\approx\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|}}{4\pi|\boldsymbol{r}|}\iint_{\partial Q}\phi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\left[\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.36b}$$

故函数 $\phi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})$ 满足第一类 Fredholm 积分方程

$$u^{\delta}_{\infty}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=\boldsymbol{F}\phi \tag{7.4.36c}$$

其中积分算子 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\boldsymbol{F}\phi\equiv\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial Q}\phi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{7.4.36d}$$

方程 (7.4.36c) 是严重不适定的, 利用 Tikhonov 正则化方法, 方程 (7.4.36c) 转化成

$$\boldsymbol{F}^{*}u^{\delta}_{\infty}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=\alpha\phi_{\alpha}+\boldsymbol{F}^{*}\boldsymbol{F}\phi_{\alpha} \tag{7.4.37a}$$

从而形式上得到

$$\phi_{\alpha}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}^{*}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{*}u^{\delta}_{\infty}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) \tag{7.4.37b}$$

(2) 边界面 $\partial G$ 的决定: 一旦求得 $\phi_{\alpha}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})$, 代入方程 (7.4.36a) 就能得到散射场 $u^{(s)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})$ . 由散射体表面满足的 Dirichlet 边界条件, 边界面 $\partial G$ 是方程

$$u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})+\iint_{\partial Q}\phi_{\alpha}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'=0,\ \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{7.4.37c}$$

的轨迹. 实际的计算中, 在区域 $D$ 中寻找曲面 $\partial\Omega$ 使积分极小

$$\iint_{\partial\Omega}|u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})+u^{(s)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})|^{2}\mathrm{d}S'=\min \tag{7.4.37d}$$

当然, 知道曲面 $\partial\Omega$ 的几何类型 (也是先验知识) 是非常重要的.

注意: ① 原则上, 只要固定入射波方向 $\boldsymbol{d}_0$, 测量足够多方向 $\boldsymbol{e}_j,(j=1,2,\cdots,M)$ 上的远场散射波 (或者多次入射波 $\boldsymbol{d}_j,(j=1,2,\cdots,M)$, 测量一个固定方向 $\boldsymbol{e}_0$ 上的

远场散射波) 就能够反演边界面 $\partial G$; ② 测量面 $S_m$ 也可以是近场, 只要 $S_m$ 包含区域 $G$, 设 $S_m$ 上测量得到的散射声场为 $[u_m^{(s)}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})]^\delta$, 则决定密度函数 $\phi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})$ 的方程为

$$\iint_{\partial Q}\phi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{d})g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'=[u_m^{(s)}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})]^\delta,\ \boldsymbol{r}\in S_M \tag{7.4.38a}$$

③ 从以上讨论可知, 分解法反演边界面 $\partial G$ 要求较多的先验知识 (Dirichlet 边界条件, 区域 $G$ 的大致大小和边界面 $\partial G$ 的曲面几何类型), 实际问题中这是难以满足的.

**叠加法** 由以上讨论可见, 要反演边界面 $\partial G$ 的形状, 必须构造一个在边界面 $\partial G$ 有特殊性质的函数 (必须与可测量的量联系起来), 然后利用这个性质反演反演边界面 $\partial G$ 的形状. 分解法中, 边界面 $\partial G$ 是总场 $u(\boldsymbol{r})=u^{(s)}(\boldsymbol{r})+u^{(i)}(\boldsymbol{r})$ 的零点, 故 $|u(\boldsymbol{r})|$ 就是要找的函数 (这一点也提醒我们, 对边界 $\boldsymbol{B}u(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=0$, 只要把式 (7.4.37d) 修改成

$$\iint_{\partial\Omega}|\boldsymbol{B}[u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})+u^{(s)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})]|^2\mathrm{d}S'=\min \tag{7.4.38b}$$

就能反演 Neumann 边界或者 Robin 边界了, 但仍然必须先验知道边界面 $\partial G$ 的边界条件.

叠加法的基本思想是: 设计一个入射波 $v^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$, 当 $\boldsymbol{r}_0$ 趋向于边界 $\partial G$ 时, 产生的散射波在散射体表面 $\partial G$ 上趋向无限大, 选择一系列 $\boldsymbol{r}_0$ 点, 就可以识别出边界 $\partial G$ 的形状. 但在逆散射问题中, 测量的是平面波 $u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=u_0\exp(\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})$ 入射时的远场角分布 $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})$, 如何来构成这样的入射波 $v^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$? 可以把平面作为基函数看待: $\{\exp(\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})\}$, 由平面波的叠加构造需要的入射波 $v^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$.

设入射平面波为 $u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=u_0\exp(\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})$, 测量远场角分布为 $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})$. 我们把入射波方向 $\boldsymbol{d}$ 作线性叠加, 构成新的入射波 (称为 **Herglotz 波函数**)

$$v^{(i)}(\boldsymbol{r})=\iint_{\partial\Omega}g(\boldsymbol{d})\exp(\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}\Omega_d \tag{7.4.39a}$$

其中 $\partial\Omega$ 是 $\boldsymbol{d}$ 空间的单位球面: $|\boldsymbol{d}|=1$, $g(\boldsymbol{d})$ 是权重系数. 由叠加原理, 远场角分布应该是

$$v_\infty^{(s)}(\boldsymbol{e})=\iint_{\partial\Omega}g(\boldsymbol{d})u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})\mathrm{d}\Omega_d \tag{7.4.39b}$$

如果给定 $g(\boldsymbol{d})$, $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})$ 由测量给出, 由上式可以计算出 $v_\infty^{(s)}(\boldsymbol{e})$. 而我们希望得到一个在边界 $\partial G$ 上有奇性的散射解, 最简单的形式是

$$v^{(s)}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} \tag{7.4.39c}$$

假定坐标原点位于散射体 $G$ 内, $\boldsymbol{r}_0$ 也位于 $G$ 内. 当 $\boldsymbol{r}_0$ 由 $G$ 的内部趋向于边界 $\partial G$ 时, 显然 $\boldsymbol{B}v^{(s)}(\boldsymbol{r})|_{\partial G} \to \infty$(对第一类边界 $v^{(s)}(\boldsymbol{r}_0) \to \infty$; 对第二来边界 $\partial v^{(s)}(\boldsymbol{r}_0)/\partial n \to \infty$). 注意到式 (7.4.21b), 式 (7.4.39c) 的远场近似为

$$v^{(s)}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|}}{4\pi|\boldsymbol{r}|}\left[\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}_0) + O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right] \tag{7.4.40a}$$

即

$$v_\infty^{(s)}(\boldsymbol{e}) \approx \frac{1}{4\pi}\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}_0) \tag{7.4.40b}$$

于是我们要求权重系数 $g(\boldsymbol{d})$ 满足

$$\iint_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{d})u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})\mathrm{d}\Omega_d = \frac{1}{4\pi}\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}_0) \tag{7.4.40c}$$

显然上式是第一类 Fredholm 积分方程, 可用 Tikhonov 正则化方法求解, 得到 $g(\boldsymbol{d}) \equiv g_\alpha(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}_0)$(其中 $\alpha$ 是正则化系数), 然后代入式 (7.4.39a), 这样得到的入射波 $v^{(i)}(\boldsymbol{r}) \equiv v^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 即

$$v^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = \iint_{\partial\Omega} g_\alpha(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}_0)\exp(\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}\Omega_d \tag{7.4.41a}$$

引起的散射必满足 $\boldsymbol{B}v^{(s)}(\boldsymbol{r})|_{\partial G} \to \infty$ (当 $\boldsymbol{r}_0$ 趋向于边界 $\partial G$ 时). 在具体反演过程中, 无需再求入射波 $v^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$, 只要求出 $g_\alpha(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}_0)$, 可以证明: 当 $\boldsymbol{r}_0$ 趋向于边界 $\partial G$ 时, 同样存在关系

$$||g(\boldsymbol{d})||_{L^2(\partial\Omega)} = ||g_\alpha(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}_0)||_{L^2(\partial\Omega)} \to \infty \tag{7.4.41b}$$

我们仅给出一个简单的说明. 事实上, 为了保证在边界上 $\boldsymbol{B}u(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = 0$ 恒成立, 即当 $\boldsymbol{r}_0$ 由 $G$ 的内部趋向于边界 $\partial G$ 时, 也满足边界条件

$$\boldsymbol{B}[v^{(s)}(r) + v^{(i)}(\boldsymbol{r})]|_{\partial G} = 0 \tag{7.4.41c}$$

入射波 $v^{(i)}(\boldsymbol{r})$ 当却仅当是下列边值问题

$$\begin{gathered}\nabla^2 v(\boldsymbol{r}) + k^2 v(\boldsymbol{r}) = 0,\ \boldsymbol{r}\in G\\ \boldsymbol{B}v(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = -\boldsymbol{B}[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)],\ \boldsymbol{r}\in\partial G\end{gathered} \tag{7.4.42a}$$

的解时, 方程 (7.4.40c) 才可解. 上式中

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} \tag{7.4.42b}$$

是基本解 (二维情况由式 (7.4.28a) 表示). 注意: 由式 (7.4.39a) 表示的 $v^{(i)}(\boldsymbol{r})$ 满足 Helmholtz 方程是显然的. 由第三章的方程 (3.5.9a), 边值问题的解可用 Green 函数表示为

$$v(\boldsymbol{r})=\iint_{\partial G}\boldsymbol{B}'[v^{(s)}(\boldsymbol{r}')]G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{7.4.42c}$$

其中 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足

$$\begin{gathered}\nabla^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+k^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G\\ \boldsymbol{B}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{\partial G}=0,\ \boldsymbol{r}'\in G+\partial G\end{gathered} \tag{7.4.42d}$$

设 $\{\psi_i(\boldsymbol{r}),\lambda_i\}$ 是 Laplace 算子的本征函数和相应的本征值

$$-\nabla^2\psi_i=\lambda_i\psi_i,\ \boldsymbol{B}\psi_i=0,\ (i=0,1,2,\cdots) \tag{7.4.43a}$$

则由 3.5.2 节, Green 函数可表示为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{N_i^2(\lambda_i-k^2)}\psi_i(\boldsymbol{r}')\psi_i(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.43b}$$

其中 $N_j^2=\int_G\psi_j^2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau$. 注意: 对 Robin 边界条件, $\lambda_i$ 为复数, 故一定有 $k^2\neq\lambda_i$, 边值问题必有解式 (7.4.43a) 和 (7.4.43b); 但对 Dirichlet 和 Neumann 边界, 要求 $k^2\neq\lambda_i$, 否则边值问题的解不唯一. 注意: 对 Robin 边界, $\boldsymbol{L}=-(\nabla^2+k^2)$ 是非 Hermite 对称的算子.

当 $\boldsymbol{r}_0$ 趋向于边界 $\partial G$ 时, $\boldsymbol{B}v^{(s)}(\boldsymbol{r})|_{\partial G}\to\infty$, 故 $v^{(i)}(\boldsymbol{r})=v(\boldsymbol{r})\to\infty$. 由式 (7.4.39a)

$$||v^{(i)}(\boldsymbol{r})||_{L^2(G)}=||g(\boldsymbol{d})||_{L^2(\partial\Omega)} \tag{7.4.43c}$$

因此当 $\boldsymbol{r}_0$ 趋向于边界 $\partial G$ 时, $||g(\boldsymbol{d})||_{L^2(\partial\Omega)}\to\infty$.

可见, 叠加法对散射体的边界条件没有要求, 甚至对多个散射体的情况, 都能得到较好的结果. 在具体的反演中, 通过解方程 (7.4.40c), 得到离散的权函数

$$g(\boldsymbol{d})\equiv[g_\alpha(\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{r}_0),g_\alpha(\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{r}_0),\cdots,g_\alpha(\boldsymbol{d}_N,\boldsymbol{r}_0)] \tag{7.4.44a}$$

然后在包含散射体的某个区域内变化 $\boldsymbol{r}_0$ 作出函数 $F(\boldsymbol{r}_0)$

$$F(\boldsymbol{r}_0)\equiv\sum_{j=1}^{N}|g_\alpha(\boldsymbol{d}_j,\boldsymbol{r}_0)| \tag{7.4.44b}$$

的等高线 (二维情况), 出现极大值的等高线就是边界的区域.

### 7.4.4 非均匀介质的散射, Born 近似和 Rytov 近似

设介质的声速 $c(\boldsymbol{r})$ 不均匀, 声波方程满足变系数 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) + \frac{\omega^2}{c^2(\boldsymbol{r})}\left(1 + \mathrm{i}\frac{\gamma}{\omega}\right) u(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{7.4.45a}$$

其中 $\gamma$ 表示介质的耗散. 假定不均匀区为 $G$, 在 $G$ 外, 背景介质的声速为常数 $c_0$, 且无声耗散 $\gamma = 0$. 引进折射率

$$n(\boldsymbol{r}) = c_0^2/c^2(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.45b}$$

方程 (7.4.45a) 变成

$$(\nabla^2 + k_0^2)u(\boldsymbol{r}) = k_0^2 Q(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.45c}$$

其中 $k_0 = \omega/c_0$ 为背景介质中的波数, $Q(\boldsymbol{r})$ 定义为 $Q(\boldsymbol{r}) = 1 - n(\boldsymbol{r})$. 在背景介质中 $n(\boldsymbol{r}) = 1$, $Q(\boldsymbol{r}) = 0$. 设入射波为 $u^{(i)}(\boldsymbol{r})$, 满足背景介质中的 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k_0^2)u^{(i)}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{7.4.46a}$$

因此散射波满足的方程为

$$(\nabla^2 + k_0^2)u^{(s)}(\boldsymbol{r}) = k_0^2 Q(\boldsymbol{r})[u^{(s)}(\boldsymbol{r}) + u^{(i)}(\boldsymbol{r})] \tag{7.4.46b}$$

利用 Green 函数, 散射波满足的积分方程为

$$u^{(s)}(\boldsymbol{r}) = -k_0^2 \int_G Q(\boldsymbol{r}')[u^{(s)}(\boldsymbol{r}') + u^{(i)}(\boldsymbol{r}')]g(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.46c}$$

其中散射场满足辐射条件. 用总场表示

$$u(\boldsymbol{r}) = u^{(i)}(\boldsymbol{r}) - k_0^2 \int_G Q(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.47a}$$

上式称为 **Lippmann-Schwinger 积分方程**(与方程 (5.1.14b) 类似, 讨论见下). 令积分算子

$$\boldsymbol{T}(u) = k_0^2 \int_G Q(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.47b}$$

方程 (7.4.47a) 可写成算子的形式

$$u = u^{(i)} - \boldsymbol{T}(u) \tag{7.4.47c}$$

利用式 (7.4.21b), 方程 (7.4.47a) 的远场特性为

$$u(\boldsymbol{r}) = u^{(i)}(\boldsymbol{r}) + \frac{\exp(\mathrm{i}k_0|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}\left[u_\infty(\boldsymbol{e}) + O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right],\ |\boldsymbol{r}| \to \infty \tag{7.4.48a}$$

远场角分布为

$$u_\infty(\boldsymbol{e})=-\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G Q(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.48b}$$

其中 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ 为观察点的单位方向矢量. 设入射波为 $\boldsymbol{d}$ 方向传播的平面波 $u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d})=u_0^{(i)}\exp(\mathrm{i}k_0\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})$, 测量远场角分布 $u_\infty(\boldsymbol{e})=u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})$, 逆散射的任务是由

$$-\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G Q(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'=u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) \tag{7.4.48c}$$

反演分布 $Q(\boldsymbol{r})$. 显然, 由于 $u(\boldsymbol{r})$ 也未知, 故属于非线性性反演问题.

**例 7.4.1**　考虑二维散射问题: 在半径为 $a$ 的圆内 $Q(\boldsymbol{r})=Q_0$(常数), 圆外 $Q(\boldsymbol{r})=0$. 方程 (7.4.47a) 简化为

$$u(\rho,\varphi)=u^{(i)}(\rho,\varphi)-Q_0k_0^2\int_0^a\int_0^{2\pi}u(\rho',\varphi')g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi' \tag{7.4.49a}$$

其中 $G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 由式 (7.4.28a) 表示, 根据第三章的展开式 (3.3.67b), 即

$$\begin{aligned}g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)&=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\\&=\frac{\mathrm{i}}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\cdot\begin{cases}J_m(k_0\rho')H_m^{(1)}(k_0\rho),\ \rho>\rho'\\H_m^{(1)}(k_0\rho')J_m(k_0\rho),\ \rho<\rho'\end{cases}\end{aligned} \tag{7.4.49b}$$

对外部散射场, 取 $\rho>\rho'$ 代入式 (7.4.49a)

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi)=&u^{(i)}(\rho,\varphi)-\frac{\mathrm{i}Q_0k_0^2}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}H_m^{(1)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\\&\times\int_0^a\int_0^{2\pi}u(\rho',\varphi')J_m(k_0\rho')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi'\end{aligned} \tag{7.4.49c}$$

令

$$u(\rho,\varphi)=u^{(i)}(\rho,\varphi)+\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_m(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{7.4.50a}$$

代入 (7.4.49c) 得到

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_m(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=-\frac{\mathrm{i}Q_0k_0^2}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}H_m^{(1)}(k_0\rho)(\tilde{u}_m^{(i)}+A_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{7.4.50b}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{u}_m^{(i)}&\equiv\int_0^a\int_0^{2\pi}u^{(i)}(\rho',\varphi')J_m(k_0\rho')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi'\\A_m&\equiv2\pi\int_0^aR_m(\rho')J_m(k_0\rho')\rho'\mathrm{d}\rho'\end{aligned} \tag{7.4.50c}$$

利用 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\}$ 的正交性, 式 (7.4.50b) 给出 $R_m(\rho)$ 满足的积分方程

$$R_m(\rho)=-\frac{\mathrm{i}Q_0k_0^2}{4}H_m^{(1)}(k_0\rho)(\tilde{u}_m^{(i)}+A_m) \tag{7.4.50d}$$

注意: 由方程 (7.4.50c), $A_m$ 是 $R_m(\rho)$ 的积分, 故上式是关于 $R_m(\rho)$ 的第二类 Fredholm 积分方程. 上式二边乘 $2\pi J_m(k_0\rho)\rho$ 且积分得到

$$A_m=-\frac{\mathrm{i}\pi Q_0k_0^2}{2}g_m(k_0)(\tilde{u}_m^{(i)}+A_m) \tag{7.4.51a}$$

其中 $g_m$ 为

$$g_m(k_0)\equiv\int_0^a H_m^{(1)}(k_0\rho)J_m(k_0\rho)\rho\mathrm{d}\rho \tag{7.4.51b}$$

因此得到

$$A_m=-\frac{\mathrm{i}\pi Q_0k_0^2}{2}\cdot\frac{g_m(k_0)\tilde{u}_m^{(i)}}{1+g_m(k_0)(\mathrm{i}\pi Q_0k_0^2/2)} \tag{7.4.51c}$$

代入方程 (7.4.50d) 得到系数 $R_m(\rho)$

$$R_m(\rho)=-\frac{\mathrm{i}Q_0k_0^2}{4}\cdot\frac{\tilde{u}_m^{(i)}H_m^{(1)}(k_0\rho)}{1+\mathrm{i}\pi Q_0k_0^2g_m(k_0)/2} \tag{7.4.51d}$$

由方程 (7.4.50a) 得到 Lippmann-Schwinger 积分方程的解

$$u(\rho,\varphi)=u^{(i)}(\rho,\varphi)-\frac{\mathrm{i}Q_0k_0^2}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}_m^{(i)}H_m^{(1)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}}{1+\mathrm{i}\pi Q_0k_0^2g_m(k_0)/2} \tag{7.4.51e}$$

注意: 散射场并非严格正比于 $Q_0$.

**例 7.4.2** 三维层状介质的声散射. 设在半径为 $a$ 的球内 $Q(\boldsymbol{r})=Q(r)$, 球外 $Q(\boldsymbol{r})=0$. 令

$$u(r,\vartheta,\varphi)=u^{(i)}(r,\vartheta,\varphi)+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}R_{ml}(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{7.4.52a}$$

并根据第三章的展开式 (3.3.62b), 即

$$\begin{aligned}g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)=\frac{\exp(\mathrm{i}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}&=-\mathrm{i}k_0\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')\\&\times\begin{cases}h_l^{(1)}(k_0r)j_l(k_0r'), & r>r'\\ j_l(k_0r)h_l^{(1)}(k_0r'), & r<r'\end{cases}\end{aligned} \tag{7.4.52b}$$

代入方程 (7.4.47a) (对外部散射场, 取 $r > r'$) 得到 $R_m(\rho)$ 满足的积分方程

$$R_{ml}(r) = \mathrm{i}k_0^3[\tilde{u}_{lm}^{(i)} + A_{ml}]h_l^{(1)}(k_0 r) \tag{7.4.52c}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{lm}^{(i)} &\equiv \iint_\Omega \int_0^a Q(r')u^{(i)}(r',\vartheta',\varphi')j_l(k_0 r')\mathrm{d}r' Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')\mathrm{d}\Omega' \\ A_{ml} &\equiv \int_0^a Q(r')R_{ml}(r')j_l(k_0 r')\mathrm{d}r'\end{aligned} \tag{7.4.52d}$$

式 (7.4.52c) 表明可以取 $R_{ml}(r) = a_{lm}h_l^{(1)}(k_0 r)$ 代入式 (7.4.52c) 得到

$$a_{lm} = \mathrm{i}k_0^3\tilde{u}_{lm}^{(\mathrm{i})} + \mathrm{i}k_0^3 a_{lm}\int_0^a Q(r')h_l^{(1)}(k_0 r')j_l(k_0 r')\mathrm{d}r' \tag{7.4.53a}$$

即

$$a_{lm} = \frac{\mathrm{i}k_0^3}{1 - \mathrm{i}k_0^3 g_l(k_0)}\tilde{u}_{lm}^{(i)} \tag{7.4.53b}$$

其中

$$g_l(k_0) \equiv \int_0^a Q(r')h_l^{(1)}(k_0 r')j_l(k_0 r')\mathrm{d}r' \tag{7.4.53c}$$

因此散射场为

$$u^{(s)}(r,\vartheta,\varphi) = \mathrm{i}k_0^3\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{\tilde{u}_{lm}^{(i)}}{1 - \mathrm{i}k_0^3 g_l(k_0)}h_l^{(1)}(k_0 r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{7.4.53d}$$

**Born 近似**　下面估计积分算子 $\boldsymbol{T}$ 的模, 假定半径为 $a$ 的球包含不均匀区 $G$, 在球外 $Q(\boldsymbol{r}) = 0$, 故方程 (7.4.47b) 的体积分在球内进行, 即

$$||\boldsymbol{T}(u)|| \leqslant k_0^2||Q||_\infty \cdot ||u||_\infty \max_{|\boldsymbol{r}|<a}\int_{|\boldsymbol{r}'|<a}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.54a}$$

其中 $\boldsymbol{r} \in (0, a)$, 即

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{T}||_\infty &\leqslant k_0^2||Q||_\infty \max_{|\boldsymbol{r}|<a}\int_{|\boldsymbol{r}'|<a}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \\ &= \frac{(k_0 a)^2}{2}||Q||_\infty\end{aligned} \tag{7.4.54b}$$

式中模 $||Q||_\infty$ 定义为 $||Q||_\infty = \max\limits_{|\boldsymbol{r}|<a}|Q|$. 当 $||\boldsymbol{T}||_\infty < 1$ 时, 即当 $(k_0 a)^2||Q||_\infty < 2$ 时 (注意: 仅仅是充分条件), 方程 (7.4.47c) 的解可表示成 Neumann 级数

$$u(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\boldsymbol{T}^j u^{(i)}(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.54c}$$

Neumann 级数的前二项

$$u^{(B)}(\boldsymbol{r}) \approx u^{(i)}(\boldsymbol{r}) - k_0^2 \int_G Q(\boldsymbol{r}')u^{(i)}(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.54d}$$

称为 **Born 近似**. 显然, Born 近似的误差估计为

$$\begin{aligned} ||u-u^{(B)}||_\infty &\leqslant \sum_{j=2}^{\infty} ||\boldsymbol{T}||_\infty^j ||u^{(i)}||_\infty = ||\boldsymbol{T}||_\infty^2 \frac{1}{1-||\boldsymbol{T}||_\infty} \\ &\leqslant ||\boldsymbol{T}||_\infty^2 \leqslant \frac{(k_0 a)^4}{4}||Q||_\infty^2 \end{aligned} \tag{7.4.54e}$$

注意: 在例 5.2.4 的讨论中, 入射粒子必须有较高的能量, Born 近似才成立, 故 Born 近似也称为高能近似; 而在声学中, 要求 $(k_0a)^2||Q||_\infty < 2$, 即入射波的频率要足够低, Born 近似才成立. 从 Born 近似成立条件 $(k_0a)^2||Q||_\infty < 2$ 可知, 近似成立依赖于三个因素: ① 低频近似; ② 不均匀区 $a$ 要足够小; ③ 不均匀区的不均匀度, 即折射率变化比较小. 实际中这三个苛刻的条件一般难以满足.

对 Born 近似, 远场角分布为

$$u_\infty^{(B)}(\boldsymbol{e}) = -\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G Q(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')u^{(i)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.55a}$$

设入射波为 $\boldsymbol{d}$ 方向传播的平面波 $u^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{d}) = u_0\exp(\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})$, 代入上式

$$u_\infty^{(B)}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) = -\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G Q(\boldsymbol{r}')\exp[-\mathrm{i}k_0(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{r}']\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.55b}$$

令

$$\Gamma^{(B)}(\boldsymbol{K}) = -4\pi\frac{u_\infty^{(B)}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})}{k_0^2};\ \boldsymbol{K} = k_0(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{d}) \tag{7.4.55c}$$

方程 (7.4.55b) 变成

$$\Gamma^{(B)}(\boldsymbol{K}) = \int_G Q(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.55d}$$

因此原则上可由上式从远场测量的散射数据反演出不均匀分布

$$Q(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \Gamma^{(B)}(\boldsymbol{K})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{K} \tag{7.4.55e}$$

与 Kirchhoff 近似存在的矛盾一样, 上式同样面临二个困难: ① Born 近似成立的条件是 $(k_0a)^2||Q||_\infty < 2$, 即低频 (且不均匀区域较小), 而上式覆盖整个频率区域; ② 上式要求从一切方位角测量散射场. Born 近似给出 $\boldsymbol{K}$ 空间低频区的分布, 相当于对 $Q(\boldsymbol{r})$ 作低通滤波, 而 Kirchhoff 近似恰好相反.

**Rytov 近似**　下面介绍的 Rytov 近似对较高的频率和较大的不均匀区域仍有较好的近似效果. 首先作变换

$$u(\boldsymbol{r}) = u^{(i)}(\boldsymbol{r}) \exp[\chi(\boldsymbol{r})] \tag{7.4.56a}$$

代入方程 (7.4.45c) 得到 $\chi(\boldsymbol{r})$ 的非线性方程

$$\nabla^2\chi(\boldsymbol{r}) + \nabla\chi(\boldsymbol{r}) \cdot \nabla\chi(\boldsymbol{r}) + 2\nabla \ln u^{(i)}(\boldsymbol{r}) \cdot \nabla\chi(\boldsymbol{r}) - k_0^2 Q(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{7.4.56b}$$

引进新的函数 $\xi(\boldsymbol{r}) \equiv u^{(i)}(\boldsymbol{r})\chi(\boldsymbol{r})$, 把 $\chi(\boldsymbol{r}) = \xi(\boldsymbol{r})/u^{(i)}(\boldsymbol{r})$ 代入上式

$$\nabla^2\xi(\boldsymbol{r}) + k_0^2\xi(\boldsymbol{r}) = u^{(i)}(\boldsymbol{r})[k_0^2 Q(\boldsymbol{r}) - |\nabla\chi(\boldsymbol{r})|^2] \tag{7.4.56c}$$

利用 Green 函数, 即式 (7.4.18c) 或者式 (7.4.28a)

$$u^{(i)}(\boldsymbol{r})\chi(\boldsymbol{r}) = -\int_G u^{(i)}(\boldsymbol{r}')[k_0^2 Q(\boldsymbol{r}') - |\nabla\chi(\boldsymbol{r}')|^2] G(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.57a}$$

取 Rytov 近似

$$|k_0^2 Q(\boldsymbol{r}')| \gg |\nabla\chi(\boldsymbol{r}')|^2 \tag{7.4.57b}$$

方程 (7.4.57a) 近似成

$$u^{(i)}(\boldsymbol{r})\chi(\boldsymbol{r}) \approx -k_0^2 \int_G Q(\boldsymbol{r}')u^{(i)}(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.57c}$$

比较式 (7.4.54d), 右边积分项相同, 分别用 $u_s^{(B)}$ 和 $\chi_s^{(R)}$ 表示二种近似解, 显然有关系

$$u^{(i)}(\boldsymbol{r})\chi^{(R)}(\boldsymbol{r}) = u_s^{(B)}(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.58a}$$

由式 (7.4.56a), 总波场满足关系

$$u^{(R)}(\boldsymbol{r}) = u^{(i)}(\boldsymbol{r}) \exp\left[\frac{u_s^{(B)}(\boldsymbol{r})}{u^{(i)}(\boldsymbol{r})}\right] \tag{7.4.58b}$$

上式也可由式 (7.4.54d) 通过 “重整化” 得到, 把式 (7.4.54d) 写成

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}) &\approx u^{(i)}(\boldsymbol{r})\left[1 - \frac{k_0^2}{u^{(i)}(\boldsymbol{r})}\int_G Q(\boldsymbol{r}')u^{(i)}(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\right] \\ &= u^{(i)}(\boldsymbol{r})\left[1 + \frac{u_s^{(B)}(\boldsymbol{r})}{u^{(i)}(\boldsymbol{r})}\right] \approx u^{(i)}(\boldsymbol{r}) \exp\left[\frac{u_s^{(B)}(\boldsymbol{r})}{u^{(i)}(\boldsymbol{r})}\right] \end{aligned} \tag{7.4.58c}$$

最后一步利用了指数展开 $\exp(x) \approx 1 + x$, $(x \ll 1)$. 上式即为式 (7.4.58b). 一般来说, "重整化" 解的成立范围比原解要大得多.

研究表明: Rytov 近似对较高频率和较大非均匀区的散射体也能给出较好的近似结果. 事实上, 由 Rytov 近似条件, 即方程 (7.4.57b), $|\nabla\chi(\boldsymbol{r})|$ 表示单位波长上相位的变化, 它与成像区的大小关系不大, 仅取决于的 $Q(\boldsymbol{r})$ 变化大小, Rytov 近似对 $Q(\boldsymbol{r})$ 的变化较敏感. 但是在 Born 近似成立的区域, Rytov 近似又略差于 Born 近似.

### 7.4.5 介质参数的逆散射

介质参数逆散射的数学形式为

(1) 控制方程

$$\begin{aligned}(\nabla^2 + k_0^2)u(\boldsymbol{r}) &= k_0^2 Q(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r}) \\ u(\boldsymbol{r}) &= u_0^{(i)}\exp(\mathrm{i}k\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}) + u^{(s)}(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{7.4.59a}$$

(2) 辐射条件

$$\lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty}|\boldsymbol{r}|\left[\frac{\partial u^{(s)}(\boldsymbol{r})}{\partial|\boldsymbol{r}|} - \mathrm{i}ku^{(s)}(\boldsymbol{r})\right] = 0 \tag{7.4.59b}$$

(3) 附加测量条件: 散射场的远场角分布 $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d})$.

逆问题: 给定入射场 $u^{(i)}(\boldsymbol{r}) = u_0^{(i)}\exp(\mathrm{i}k_0\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})$ 以及测量得到的散射场远场角分布 $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d})$, 反演介质参数 $Q(\boldsymbol{r})$ 和散射场的空间分布 $u^{(s)}(\boldsymbol{r})$.

方程 (7.4.59a) 和 (7.4.59b) 可以写成 Lippmann-Schwinger 积分方程的形式

$$u(\boldsymbol{r}) = u^{(i)}(\boldsymbol{r}) - k_0^2\int_G Q(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}')g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}\in G \tag{7.4.60a}$$

以及散射场的远场角分布方程 (7.4.48c), 即

$$-\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G Q(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' = u_\infty^\delta(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d}),\ \boldsymbol{e}\in\varOmega \tag{7.4.60b}$$

其中 $\varOmega$ 是单位球面. 逆散射的目标就是从方程 (7.4.60a) 和 (7.4.60b) 反演介质参数 $Q(\boldsymbol{r})$, 即在约束条件式 (7.4.60a) 下, 寻求方程 (7.4.60b) 的解.

令算子 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(\psi) &= \frac{1}{4\pi}\int_G \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}\in G \\ \boldsymbol{W}(\psi) &= -\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G \exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{e}\in\varOmega\end{aligned} \tag{7.4.60c}$$

方程 (7.4.60a) 和 (7.4.60b) 改写成简洁的形式

$$\begin{gathered}u+k_0^2\boldsymbol{V}(Qu)=u^{(i)}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\\ \boldsymbol{W}(Qu)=u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}),\ \boldsymbol{e}\in\Omega\end{gathered}\tag{7.4.60d}$$

下面我们介绍求解方程 (7.4.60d) 的迭代方法, 即**拟 Newton 迭代法**. 设迭代过程为

$$\begin{gathered}u_{l+1}(\boldsymbol{r})=u_l(\boldsymbol{r})+\delta u_l(\boldsymbol{r})\\ Q_{l+1}(\boldsymbol{r})=Q_l(\boldsymbol{r})+\delta Q_l(\boldsymbol{r})\end{gathered}\tag{7.4.61a}$$

代入方程 (7.4.60d) 的第一式分别得到零阶和一阶量满足的方程

$$u_l+k_0^2\boldsymbol{V}(Q_lu_l)=u^{(i)}\ (\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in G\tag{7.4.61b}$$

以及

$$\delta u+k_0^2\boldsymbol{V}(Q_l\delta u_l+u_l\delta Q_l)=0,\ \boldsymbol{r}\in G\tag{7.4.61c}$$

即

$$\delta u_l(\boldsymbol{r})+\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}[Q_l(\boldsymbol{r}')\delta u_l(\boldsymbol{r}')+u_l(\boldsymbol{r}')\delta Q_l(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'=0\tag{7.4.61d}$$

利用式 (7.4.21b), 得到上式的远场近似为

$$\delta u_l(\boldsymbol{r})\approx-\frac{k_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|}}{4\pi|\boldsymbol{r}|}\int_G\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}[Q_l(\boldsymbol{r}')\delta u_l(\boldsymbol{r}')+u_l(\boldsymbol{r}')\delta Q_l(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\tag{7.4.62a}$$

上式左边利用近似 $\delta u_l(\boldsymbol{r})=u_{l+1}(\boldsymbol{r})-u_l(\boldsymbol{r})\approx u(\boldsymbol{r})-u_l(\boldsymbol{r})$, 故相应的远场角分布的方程为

$$u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})-u_{l\infty}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})\approx-\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}'}[Q_l(\boldsymbol{r}')\delta u_l(\boldsymbol{r}')+u_l(\boldsymbol{r}')\delta Q_l(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\tag{7.4.62b}$$

其中 $u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})$ 为测量的远场角分布, 而 $u_{l\infty}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})$ 为 $Q(\boldsymbol{r})=Q_l(\boldsymbol{r})$ 和 $u(\boldsymbol{r})=u_l(\boldsymbol{r})$ 时的远场角分布

$$u_{l\infty}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})=-\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G\exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')Q_l(\boldsymbol{r}')u_l(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{e}\in\Omega\tag{7.4.62c}$$

方程 (7.4.62b) 就是决定迭代增量 $\delta Q_l(\boldsymbol{r})$ 和 $\delta u_l(\boldsymbol{r})$ 的第一类 Fredholm 积分方程. 迭代过程中可以取初值: $Q_0(\boldsymbol{r})=0$ 和 $u_0(\boldsymbol{r})=u^{(i)}(\boldsymbol{r})$.

**简化拟 Newton 迭代法**: 以上讨论的拟 Newton 迭代法的缺点是每次迭代必须解第一类 Fredholm 积分方程 (7.4.62b), 下面介绍的简化拟 Newton 迭代法克服了这个缺点. 设迭代过程为

$$\begin{gathered} u_{l+1}(\boldsymbol{r}) = u_l(\boldsymbol{r}) + \delta u(\boldsymbol{r}) \\ Q_{l+1}(\boldsymbol{r}) = Q_l(\boldsymbol{r}) + \delta Q(\boldsymbol{r}) \end{gathered} \tag{7.4.63a}$$

上式代入方程 (7.4.60d) 且忽略二次项得到

$$\begin{gathered} k_0^2\boldsymbol{V}(\delta Q u_l) + \delta u + k_0^2\boldsymbol{V}(Q_l\delta u) = u^{(i)} - u_l - k_0^2\boldsymbol{V}(Q_l u_l) \\ \boldsymbol{W}(\delta Q u_l) + \boldsymbol{W}(Q_l\delta u) = u_\infty^\delta - \boldsymbol{W}(Q_l u_l) \end{gathered} \tag{7.4.63b}$$

显然这是二个耦合的积分方程. 求解比较困难.

当 $l=0$ 进行第一次迭代时, 取初值 $Q_0(\boldsymbol{r})=0$ 和 $u_0(\boldsymbol{r})=u^{(i)}(\boldsymbol{r})$, 那么上式左边 $\boldsymbol{V}(Q_0\delta u)\approx 0$ 和 $\boldsymbol{W}(Q_0\delta u)\approx 0$, 而保留 $\boldsymbol{V}(\delta Q u^{(i)})$ 和 $\boldsymbol{W}(\delta Q u^{(i)})$ 项, 可见 $\boldsymbol{V}(Q_l\delta u)$ 和 $\boldsymbol{W}(Q_l\delta u)$ 相比 $\boldsymbol{V}(\delta Q u_l)$ 和 $\boldsymbol{W}(\delta Q u_l)$ 可以忽略. 于是得到解耦的积分方程

$$\begin{gathered} k_0^2\boldsymbol{V}(\delta Q u_l) + \delta u \approx u^{(i)} - u_l - k_0^2\boldsymbol{V}(Q_l u_l) \\ \boldsymbol{W}(\delta Q u_l) \approx u_\infty^\delta - \boldsymbol{W}(Q_l u_l) \end{gathered} \tag{7.4.63c}$$

上二式进一步取近似, 即 $\boldsymbol{V}(\delta Q u_l)\approx\boldsymbol{V}[\delta Q u^{(i)}]$ 和 $\boldsymbol{W}(\delta Q u_l)\approx\boldsymbol{W}[\delta Q u^{(i)}]$ 得到方便的迭代式

$$\begin{gathered} k_0^2\boldsymbol{V}[\delta Q u^{(i)}] + \delta u \approx u^{(i)} - u_l - k_0^2\boldsymbol{V}(Q_l u_l) \\ \boldsymbol{W}[\delta Q u^{(i)}] \approx u_\infty^\delta - \boldsymbol{W}(Q_l u_l) \end{gathered} \tag{7.4.64a}$$

第二式写成积分方程为

$$\int_G \exp[-\mathrm{i}k_0(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{r}')\delta Q(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \approx f(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) \tag{7.4.64b}$$

其中

$$f(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) \equiv -\frac{4\pi}{k_0^2 u_0^{(i)}}u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) + \frac{1}{u_0^{(i)}}\int_G \exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')Q_l(\boldsymbol{r}')u_l(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.64c}$$

注意到方程 (7.4.64b) 的左边是 $\delta Q(\boldsymbol{r})$ 的 Fourier 积分, 令 $\boldsymbol{K}\equiv k_0(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{d})$, 则形式上

$$\delta Q(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})\mathrm{d}^3\boldsymbol{K} \tag{7.4.65a}$$

上式与方程 (7.4.55e) 类似, 对每一个入射波 $\boldsymbol{d}$, 给出半径为 $k_0$ 且球心位于 $\boldsymbol{d}$ 的球上的谱, 对所有的入射波, 给出半径为 $2k_0$ 且球心位于原点的球 (记为 $B$) 上的谱, 见图 7.7.4.

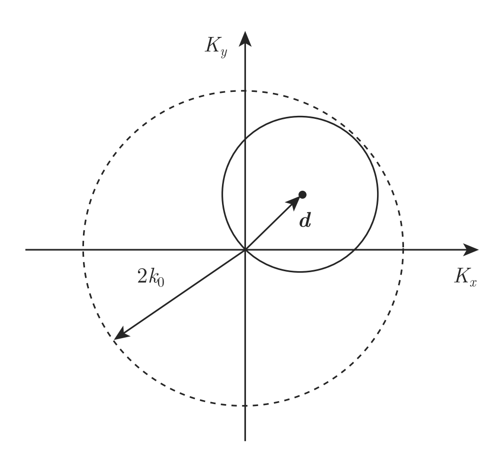



图 7.4.4　每一个入射波 $\boldsymbol{d}$, 给出半径为 $k_0$ 且球心位于 $\boldsymbol{d}$ 的球上的谱, 对所有的入射波, 得到半径为 $2k_0$ 且球心位于原点的球内的谱 (仅画出二维)

由上分析, 把球 $B$ 网格化: 每个格点用 $\boldsymbol{J}_{lpq}=(o,p,q)$, $(o,p,q=0,1,2,\cdots,N)$ 表示, 其中 $N$ 由式 $|\boldsymbol{J}_{opq}|_{\max}=\sqrt{3N^2}\leqslant 2k_0$ 决定, 即 $N\leqslant 2k_0/\sqrt{3}$. 于是方程 (7.4.64b) 离散化成

$$\int_G \exp(\mathrm{i}k_0\boldsymbol{J}_{opq}\cdot\boldsymbol{r}')\delta Q(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\approx f(\boldsymbol{e}_{opq},\boldsymbol{d}_{opq}) \tag{7.4.65b}$$

其中 $\boldsymbol{e}_{opq}$ 和 $\boldsymbol{d}_{opq}$ 是网格 $(o,p,q)$ 上的值. 因此

$$\delta Q(\boldsymbol{r})\approx\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{o,p,q=0}^{N}\exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{J}_{opq}\cdot\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{e}_{opq},\boldsymbol{d}_{opq}) \tag{7.4.65c}$$

这样就完成一次迭代过程. 迭代过程为

(1) 取初值: $l=0$, $Q_0(\boldsymbol{r})=0$ 和 $u_0(\boldsymbol{r})=u^{(i)}(\boldsymbol{r})$;

(2) 第一次迭代

$$\begin{gathered}\delta Q(\boldsymbol{r})\approx\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{o,p,q=0}^{N}\exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{J}_{opq}\cdot\boldsymbol{r})f_0(\boldsymbol{e}_{opq},\boldsymbol{d}_{opq})\\ \delta u(\boldsymbol{r})\approx -k_0^2\boldsymbol{V}[\delta Q(\boldsymbol{r})u^{(i)}(\boldsymbol{r})]\end{gathered} \tag{7.4.66a}$$

其中

$$f_0(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})\equiv-\frac{4\pi}{k_0^2u_0^{(i)}}u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) \tag{7.4.66b}$$

于是

$$\begin{gathered}Q_1(\boldsymbol{r})=\delta Q(\boldsymbol{r})\\ u_1(\boldsymbol{r})=u^{(i)}(\boldsymbol{r})+\delta u(\boldsymbol{r})\end{gathered} \tag{7.4.66c}$$

(3) 第 $l$ 次迭代

$$\delta Q(\boldsymbol{r}) \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{o,p,q=0}^{N}\exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{J}_{opq}\cdot\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{e}_{opq},\boldsymbol{d}_{opq})$$
$$\delta u(\boldsymbol{r}) \approx u^{(i)}(\boldsymbol{r}) - u_l(\boldsymbol{r}) - k_0^2\boldsymbol{V}[Q_l(\boldsymbol{r})u_l(\boldsymbol{r})] - k_0^2\boldsymbol{V}[\delta Q(\boldsymbol{r})u^{(i)}(\boldsymbol{r})] \tag{7.4.67a}$$

其中

$$f(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) \equiv -\frac{4\pi}{k_0^2u_0^{(i)}}u_\infty^\delta(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}) + \frac{1}{u_0^{(i)}}\int_G \exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')Q_l(\boldsymbol{r}')u_l(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{7.4.67b}$$

于是

$$u_{l+1}(\boldsymbol{r}) = u_l(\boldsymbol{r}) + \delta u(\boldsymbol{r})$$
$$Q_{l+1}(\boldsymbol{r}) = Q_l(\boldsymbol{r}) + \delta Q(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.67c}$$

收敛判据可设为

$$\frac{||\delta Q(\boldsymbol{r})||_{L^2(G)}}{||Q_l(\boldsymbol{r})||_{L^2(G)}} < \varepsilon \tag{7.4.67d}$$

如果不满足, 则继续第 3 步.

可以证明, 上述迭代过程收敛到方程 (7.4.60a) 和 (7.4.60b) 的解

## 7.5　本征值逆问题

本征值逆问题有重要的应用, 最简单的例子是如何从测量的共振频率决定弦的不均匀密度分布. 另一个例子是从人的发声, 反演声道的形状. 本节主要讨论简单的 S-L 本征值逆问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u(x) = \lambda u(x),\ x\in(0,l)$$
$$u'(0) - hu(0) = 0;\ u'(l) + Hu(l) = 0 \tag{7.5.1a}$$

正问题: 已知函数 $q(x)$, 求本征值 $\lambda_n$ 及相应的本征函数 $u_n(x)$, 而逆问题为: 已知本征值的分布 $\lambda_n$, $(n=1,2,\cdots)$, 求函数 $q(x)$. 对一般形式的 S-L 方程可通过 Liouville-Green 变换 (见 6.4.1 小节) 化为上述简单形式.

### 7.5.1　本征值的渐近特征

在 6.4 节中我们已讨论了本征值的渐近特征, 但在本征值逆问题中, 必须知道更精确的渐近表达式来证明本征值逆问题的唯一性. 为了简单, 以下讨论限于第一类边值问题, 即假定 $h\to\infty$ 和 $H\to\infty$.

由常微分方程理论, 对给定的函数 $q \in L^2(0,l)$ 和 $\lambda \in C$, 下列二个初值问题的解存在且唯一

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u_1(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u_1(x) = \lambda u_1(x),\ x \in (0,l) \\ u_1(0) = 1;\ u_1'(0) = 0 \tag{7.5.1b}$$

以及

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u_2(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u_2(x) = \lambda u_2(x),\ x \in (0,l) \\ u_2(0) = 0;\ u_2'(0) = 1 \tag{7.5.1c}$$

函数 $\{u_1, u_2\}$ 称为常微分方程

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u(x) = \lambda u(x),\ x \in (0,l) \tag{7.5.1d}$$

的**基本系统**. 因为函数 $\{u_1, u_2\}$ 的 Wronskian 行列式 $W(u_1, u_2)$ 具有性质

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W(u_1,u_2) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = u_1u_2'' - u_1''u_2 \\ &= u_1(q-\lambda)u_2 - u_2(q-\lambda)u_1 = 0\end{aligned} \tag{7.5.2a}$$

且由初始条件得 $W(u_1, u_2)|_{x=0} = 1$, 故 $W(u_1, u_2) = C$(常数). 因此函数 $u_1$ 和 $u_2$ 线性独立. 于是, 方程的通解可由基本系统构成

$$u(x) = Au_1(x) + Bu_2(x) \tag{7.5.2b}$$

其中 $A$ 和 $B$ 是常数, 由边界条件 $u(0) = u(l) = 0$, 显然应该有 $A = 0$ 和 $u_2(l) = 0$. 由于函数 $\{u_1, u_2\}$ 依赖于 $q$ 和 $\lambda$, 可表示成 $u_1(x,\lambda,q)$ 和 $u_2(x,\lambda,q)$, 因此 $u(l) = 0$ 即

$$f(\lambda) \equiv u_2(l,\lambda,q) = 0 \tag{7.5.2c}$$

是决定本征值 $\lambda$ 的方程, $f(\lambda)$ 称为本征值问题 (7.5.1a) 的**特征函数**.

**例 7.5.1**　当$q(x) = 0$ 时, 方程 (7.5.1a) 的基本系统为

$$u_1(x,\lambda,0) = \cos\sqrt{\lambda}x;\quad u_2(x,\lambda,0) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \tag{7.5.2d}$$

不难用 WKB 近似证明, 对任意的 $q \in L^2(0,l)$, 当 $\lambda \to \infty$ 时, 方程 (7.5.1a) 的基本系统具有以上渐近特性.

下面证明初值问题 (7.5.1b) 和 (7.5.1c) 与下列第二类 Volterra 积分方程等价

$$u_1(x) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}q(t)u_1(t)\mathrm{d}t,\quad x \in [0,l] \tag{7.5.3a}$$

$$u_2(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)u_2(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [0, l] \tag{7.5.3b}$$

方程 (7.5.3a) 证明如下. 为了方便, 令函数

$$C(x) \equiv \cos\sqrt{\lambda}x;\ S(x) \equiv \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \tag{7.5.3c}$$

利用积分关系

$$\int_a^b [f''(t)g(t) - f(t)g''(t)]\mathrm{d}t = [f'(t)g(t) - f(t)g'(t)]_a^b \tag{7.5.4a}$$

如果 $u_1$ 满足 (7.5.1b), 则

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x-t)\, q(t)u_1(t)\mathrm{d}t &= \int_0^x S(x-t)[\lambda u_1(t) + u_1''(t)]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x u_1(t)[\lambda S(x-t) + S''(x-t)]\mathrm{d}t \\ &\quad + [u_1'(t)S(x-t) + u_1(t)S(x-t)]_{t=0}^{t=x} \\ &= u_1(x) - \cos(\sqrt{\lambda}x)\end{aligned} \tag{7.5.4b}$$

即为方程 (7.5.3a). 反过来, 证明如果 $u_1$ 满足方程 (7.5.3a), 必满足方程 (7.5.1b). 显然方程 (7.5.3a) 满足边界条件, 对方程 (7.5.3a) 求一阶和二阶导数得到

$$\begin{aligned}u_1'(x) &= -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}(x-t)q(t)u_1(t)\mathrm{d}t \\ u_1''(x) &= -\lambda\cos\sqrt{\lambda}x + q(x)u_1(x) - \sqrt{\lambda}\int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-t)q(t)u_1(t)\mathrm{d}t \\ &= -\lambda u_1(x) + q(x)u_1(x)\end{aligned} \tag{7.5.4c}$$

即为方程 (7.5.1b). 类似地, 可证明方程 (7.5.3b).

为了讨论本征值的渐近特征, 把方程 (7.5.3b) 改写成

$$u_2(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}[1 + q_1(x)] - \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}q_2(x) \tag{7.5.5a}$$

其中

$$\begin{aligned}q_1(x) &\equiv \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}t q(t)u_2(t)\mathrm{d}t \\ q_2(x) &\equiv \int_0^x \sin\sqrt{\lambda}t q(t)u_2(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{7.5.5b}$$

因此由方程 (7.5.2c), 本征值形式上满足方程

$$\tan(\sqrt{\lambda}l) = \frac{q_2(l)}{1 + q_1(l)} \tag{7.5.5c}$$

另一方面, 方程 (7.5.5a) 可写成

$$
\begin{aligned}
u_2(x) &= \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}[q_1(x)\sin\sqrt{\lambda}x - q_2(x)\cos\sqrt{\lambda}x] \\
&\equiv \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{a(\sqrt{\lambda},x)}{\sqrt{\lambda}}
\end{aligned}
\tag{7.5.6a}
$$

代入方程 (7.5.5b)

$$
q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{1}{2}\int_0^x \sin 2\sqrt{\lambda}tq(t)\mathrm{d}t + \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}tq(t)a(\sqrt{\lambda},t)\mathrm{d}t\right]
$$

$$
q_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^x \cos 2\sqrt{\lambda}tq(t)\mathrm{d}t + \int_0^x \sin\sqrt{\lambda}tq(t)a(\sqrt{\lambda},t)\mathrm{d}t\right]
$$

显然, 上二式中的积分除 $q_2(x)$ 的第一项外, 当 $\lambda\to\infty$ 时, 阶数都是 $O(\lambda^{-1/2})$, 因此

$$
\begin{aligned}
q_1(x) &= \frac{O(\lambda^{-1/2})}{\sqrt{\lambda}} \\
q_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t + O(\lambda^{-1/2})\right]
\end{aligned}
\tag{7.5.6b}
$$

代入方程 (7.5.5c) 得到

$$
\tan(\sqrt{\lambda}l) = \frac{q_0/\sqrt{\lambda} + O(\lambda^{-1})}{1 + O(\lambda^{-1})}
\tag{7.5.6c}
$$

其中 $2q_0 \equiv \displaystyle\int_0^l q(t)\mathrm{d}t$. 因为当 $q(x)=0$ 时, $\sqrt{\lambda}l = n\pi$, 故令 $\sqrt{\lambda}l = n\pi+\delta$, 代入上式

$$
\tan(\delta) = \frac{q_0 l/(n\pi) + O(n^{-2})}{1 + O(n^{-2})}
\tag{7.5.6d}
$$

从而 $\delta = q_0 l/(n\pi) + O(n^{-2})$, 因此本征值的渐近特征为

$$
\sqrt{\lambda}l = n\pi + \frac{q_0 l}{n\pi} + O(n^{-2})
\tag{7.5.7a}
$$

两边平方得

$$
\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} + \frac{1}{l}\int_0^l q(t)\mathrm{d}t + O(n^{-1})
\tag{7.5.7b}
$$

相应的本征函数渐近表达式为

$$
u_n(x) = A_n\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n}} + O(n^{-2})
\tag{7.5.7c}
$$

系数 $A_n$ 由本征函数的归一化条件决定

$$\begin{aligned}\int_0^l |u_n(x)|^2\mathrm{d}x &= \frac{A_n^2}{\lambda_n}\int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x + O(n^{-3})\\ &= \frac{A_n^2 l}{2\lambda_n}\left[1-\frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}l}{2\sqrt{\lambda_n}l}\right] + O(n^{-3}) = \frac{A_n^2 l}{2\lambda_n}[1+O(n^{-1})]\end{aligned} \tag{7.5.7d}$$

即 $A_n = \sqrt{2\lambda_n/l}[1+O(1/n)]$, 因此归一化本征函数的渐近表达式为

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_n}x + O(n^{-1}) \tag{7.5.8a}$$

可以证明, 函数系列 $\{g_n = \sin\sqrt{\lambda_n}x\}$ 在 $L^2(0,l)$ 空间是完备系, 即如果对所有的 $n$ 都成立关系

$$\int_0^l f(x)g_n(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{7.5.8b}$$

那么 $f(x) = 0$.

对任意的 $h > 0$ 和 $H > 0$, 可以得到类似的渐近表达式. 例如本征值问题

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u(x) = \lambda u(x),\ x\in(0,l)\\ u(0) = 0;\ u'(l) + Hu(l) = 0\end{gathered} \tag{7.5.9a}$$

特征函数为

$$f(\lambda) = \frac{\mathrm{d}u_2(l,\lambda,q)}{\mathrm{d}x} + Hu_2(l,\lambda,q) \tag{7.5.9b}$$

**例 7.5.2**　当 $q = 0$, $u_2(x)$ 由方程 (7.5.2d) 第二式表示, 因此特征函数为

$$f(\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}l + H\frac{\sin(\sqrt{\lambda}l)}{\sqrt{\lambda}} \tag{7.5.10a}$$

进一步, 如果 $H = 0$, 本征值为熟知的

$$\lambda_n = \frac{(n+1/2)^2\pi^2}{l^2},\ (n = 0,1,2,\cdots) \tag{7.5.10b}$$

可以证明, 方程 (7.5.9a) 的本征值和本征函数的渐近表达式分别为

$$\lambda_n = \frac{(n+1/2)^2\pi^2}{l^2} + 2H + \frac{1}{l}\int_0^l q(t)\mathrm{d}t + O(n^{-1}) \tag{7.5.10c}$$

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left[\frac{(n+1/2)\pi x}{l}\right] + O(n^{-1}) \tag{7.5.10d}$$

### 7.5.2　本征值逆问题的唯一性

一般来说, 本征值逆问题不是唯一的, 简单的例子是, 如果 $\lambda$ 是下列问题的本征值

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)u(x)=\lambda u(x),\ x\in(0,l)\\ u(0)=0;\ u(l)=0\end{gathered}\tag{7.5.11a}$$

相应的本征函数为 $u$, 那么 $\lambda$ 也是下列问题的本征值

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2}+\tilde{q}(x)v(x)=\lambda v(x),\ x\in(0,l)\\ v(0)=0;\ v(l)=0\end{gathered}\tag{7.5.11b}$$

相应的本征函数为 $v(x)\equiv u(l/2-x)$, 其中 $\tilde{q}(x)\equiv q(l/2-x)$. 可见, 从单一的本征值不能唯一决定函数 $q(x)$. 除非我们知道本征函数的某些特征, 如上例中假定 $q(x)$ 和 $u(x)$ 关于 $l/2$ 对称, 或者知道其他边界条件下本征值的分布.

为了证明本征值逆问题的唯一性, 首先介绍 Gelfand-Levitan-Marchenko (GLM) 积分算子, 它的意义在于把二个初值问题的解通过积分方程联系起来, 而更重要的是 GLM 积分算子的核与本征值 $\lambda$ 无关. 设 $p,q\in L^2(0,l)$, $u$ 和 $v$ 分别是下列初值问题的解

$$-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)u(x)=\lambda u(x),x\in(0,l);\quad u(0)=0\tag{7.5.12a}$$

及

$$-\frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2}+p(x)v(x)=\lambda v(x),x\in(0,l);\quad v(0)=0\tag{7.5.12b}$$

且 $u'(0)=v'(0)$, 那么存在积分关系

$$u(x)=v(x)+\int_0^x K(x,t)v(t)\mathrm{d}t,x\in[0,l]\tag{7.5.12c}$$

其中 GLM 积分算子的核 $K(x,t)$ 是下列 Goursat 问题的弱解

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial t^2}+[p(t)-q(x)]\,K(x,t)=0,\ (0<t<x<l)\\ K(x,0)=0,\ x\in[0,l]\\ K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x[q(s)-p(s)]\mathrm{d}s,\ x\in[0,l]\end{gathered}\tag{7.5.13a}$$

可以证明 Goursat 问题的弱解存在且唯一.

下面证明方程 (7.5.12c), 首先假定 $p,q\in C^2(0,l)$, 定义函数

$$w(x)\equiv v(x)+\int_0^x K(x,t)v(t)\mathrm{d}t,x\in[0,l]\tag{7.5.13b}$$

只要证明 $w(x)=u(x)$ 即可. 显然满足初始条件 $w(0)=v(0)=0=u(0)$. 上式求一阶导数

$$w'(x)=v'(x)+K(x,x)v(x)+\int_0^x K_x(x,t)v(t)\mathrm{d}t,\quad x\in(0,l) \tag{7.5.13c}$$

初始条件 $w'(0)=v'(0)=u'(0)$ 也满足. 进一步求二阶导数

$$\begin{aligned}w''(x)=&v''(x)+v(x)\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x}+K(x,x)v'(x)\\&+K_x(x,x)v(x)+\int_0^x K_{xx}(x,t)v(t)\mathrm{d}t\\=&\left[p(x)-\lambda+\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x}+K_x(x,x)\right]v(x)+K(x,x)v'(x)\\&+\int_0^x\{[q(x)-p(t)]K(x,t)+K_{tt}(x,t)\}v(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{7.5.14a}$$

分部积分

$$\begin{aligned}\int_0^x K_{tt}(x,t)v(t)dt=&\int_0^x K(x,t)v''(t)\mathrm{d}t+[K_t(x,t)v(t)-K(x,t)v'(t)]\big|_{t=0}^{t=x}\\=&\int_0^x[p(t)-\lambda]K(x,t)v(t)\mathrm{d}t+K_t(x,x)v(x)-K(x,x)v'(x)\end{aligned} \tag{7.5.14b}$$

注意到微分关系

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x}=&\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=x}+\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right|_{t=x}\\=&K_x(x,x)+K_t(x,x)=\frac{1}{2}[q(x)-p(x)]\end{aligned} \tag{7.5.14c}$$

因此

$$\begin{aligned}w''(x)=&\left[p(x)-\lambda+\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x}+K_x(x,x)+K_t(x,x)\right]v(x)\\&+[q(x)-\lambda]\int_0^x K(x,t)v(t)\mathrm{d}t\\=&[q(x)-\lambda]\left[v(x)+\int_0^x K(x,t)v(t)\mathrm{d}t\right]=[q(x)-\lambda]w(x)\end{aligned} \tag{7.5.14d}$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}^2w(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)w(x)=\lambda w(x) \tag{7.5.15a}$$

由初值问题解的唯一性, $w(x)=u(x)$.

对 $p,q\in L^2(0,l)$, 取序列 $\{p_n,q_n\}\in C^2(0,l)$, 两个函数序列分别收敛到 $p,q\in L^2(0,l)$: $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=q$, 对序列的每个元素 $p_n$ 和 $q_n$, 有

$$w_n(x)\equiv v_n(x)+\int_0^x K_n(x,t)v_n(t)\mathrm{d}t \tag{7.5.15b}$$

可证明, 函数 $u_n$, $v_n$ 和 $K_n$ 一致收敛到 $u$, $v$ 和 $K$.

**例 7.5.3**　取 $p(x)=0$, 那么

$$v(x)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \tag{7.5.16a}$$

因此 $u(x)$ 可表示为

$$u(x)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\int_0^x K(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{d}t,\quad x\in[0,l] \tag{7.5.16b}$$

其中核 $K(x,t)$ 是下列 Goursat 问题的弱解

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial t^2}-q(x)K(x,t)=0,\ (0<t<x<l)\\ K(x,0)=0,\ x\in[0,l]\\ K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(s)\mathrm{d}s,\ x\in[0,l]\end{gathered} \tag{7.5.16c}$$

根据方程 (7.5.12c) 可证明本征值逆问题的唯一性定理. 设 $H$ 是实数, $p,q\in L^2(0,l)$, $\lambda_n(p)$ 和 $\lambda_n(q)$ 分别是下列本征值问题的本征值

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+p(x)u(x)=\lambda u(x),\ x\in(0,l)\\ u(0)=u(l)=0\end{gathered} \tag{7.5.17a}$$

和

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)v(x)=\lambda v(x),\ x\in(0,l)\\ v(0)=v(l)=0\end{gathered} \tag{7.5.17b}$$

进一步假定 $\mu_n(p)$ 和 $\mu_n(q)$ 分别是下列本征值问题的本征值

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}(x)}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\tilde{u}(x)=\mu\tilde{u}(x),\ x\in(0,l)\\ \tilde{u}(0)=0;\ \tilde{u}'(l)+H\tilde{u}(l)=0\end{gathered} \tag{7.5.17c}$$

和

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2\tilde{v}(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\tilde{v}(x)=\mu\tilde{v}(x),\ x\in(0,l)\\ \tilde{v}(0)=0;\ \tilde{v}'(l)+H\tilde{v}(l)=0\end{gathered} \tag{7.5.17d}$$

如果对所有的 $n$, 恒有

$$\lambda_n(p)=\lambda_n(q) \quad \text{和} \quad \mu_n(p)=\mu_n(q) \tag{7.5.18a}$$

则 $p(x)=q(x)$.

证明: 由本征值的渐近表达式 (7.5.7b)

$$\begin{aligned}\lambda_n(p)&=\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{1}{l}\int_0^l p(t)\mathrm{d}t+O(n^{-1})\\ \lambda_n(q)&=\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{1}{l}\int_0^l q(t)\mathrm{d}t+O(n^{-1})\end{aligned} \tag{7.5.18b}$$

因此

$$\int_0^l [p(t)-q(t)]\mathrm{d}t=l\lim_{n\to\infty}[\lambda_n(p)-\lambda_n(q)]=0 \tag{7.5.18c}$$

由方程 (7.5.13a) 的第三式即有

$$K(l,l)=0 \tag{7.5.18d}$$

设 $u_n$ 和 $v_n$ 分别是对应于 $\lambda_n(p)$ 和 $\lambda_n(q)$ 的本征函数, 并假定 $u_n$ 和 $v_n$ 归一化到 $u_n'(0)=v_n'(0)=1$(我们总可以做到这点, 而不失一般性), 于是由方程 (7.5.15b)

$$u_n(x)=v_n(x)+\int_0^x K(x,t)v_n(t)\mathrm{d}t, \quad x\in[0,l] \tag{7.5.19a}$$

利用边界条件 $u_n(l)=0$ 和 $v_n(l)=0$, 上式取 $x=l$, 于是

$$0=\int_0^l K(l,t)v_n(t)\mathrm{d}t \tag{7.5.19b}$$

因为 $\{v_n(x)\}$ 是完备系, 由式 (7.5.8b)

$$K(l,t)=0, t\in[0,l] \tag{7.5.19c}$$

对 $\tilde{u}_n$ 和 $\tilde{v}_n$, 同样有

$$\tilde{u}_n(x)=\tilde{v}_n(x)+\int_0^x K(x,t)\tilde{v}_n(t)\mathrm{d}t, x\in[0,l] \tag{7.5.20a}$$

上式微分并且取 $x=l$

$$\tilde{u}_n'(l)=\tilde{v}_n'(l)+K(l,l)\tilde{v}_n(l)+\int_0^l K_x(l,t)\tilde{v}_n(t)\mathrm{d}t \tag{7.5.20b}$$

方程 (7.5.20a) 中取 $x=l$ 并乘 $H$, 然后与上式相减, 得到

$$\begin{aligned}&[\tilde{u}_n'(l)-\tilde{v}_n'(l)]+H[\tilde{u}_n(l)-\tilde{v}_n(l)]+K(l,l)\tilde{v}_n(l)\\ &\quad+\int_0^l [K_x(l,t)-HK(l,t)]\tilde{v}_n(t)\mathrm{d}t=0\end{aligned} \tag{7.5.20c}$$

利用式 (7.5.18d) 和 (7.5.19c), 以及边界条件 $\tilde{u}_n'(l)+H\tilde{u}_n(l)=0$ 和 $\tilde{v}_n'(l)+H\tilde{v}_n(l)=0$

$$\int_0^l K_x(l,t)\tilde{v}_n(t)\mathrm{d}t=0 \tag{7.5.20d}$$

而 $\{\tilde{v}_n(x)\}$ 是完备系, 由方程 (7.5.8b)

$$K_x(l,t)=0, t\in[0,l] \tag{7.5.21a}$$

因此, 核函数 $K(x,t)$ 满足双曲方程的齐次 Cauchy 问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2}+[p(t)-q(x)]K(x,t)=0,\ (0<t<x<l)\\ K(l,t)=0;\ K_x(l,t)=0,\ t\in[0,l]\end{gathered} \tag{7.5.21b}$$

故只有零解, 即 $K(x,t)$ 恒为零. 于是, 由方程 (7.5.13a) 的第三式

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x[q(s)-p(s)]\mathrm{d}s=0 \tag{7.5.21c}$$

求一阶导数给出 $p(x)=q(x)$, 于是唯一性得证.

### 7.5.3 热导方程系数逆问题的唯一性

考虑热导方程的系数逆问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}-q(x)U(x,t),\ x\in(0,l),\ t\in(0,T)\\ U(x,0)=0,\ x\in[0,l]\\ U(0,t)=0;\ \frac{\partial U(l,t)}{\partial x}=f(t),\ t\in\ (0,T)\end{gathered} \tag{7.5.22a}$$

正问题: 已知函数 $f(t)$ 和 $q(x)$, 求温度场的分布 $U(x,t)$. 由 1.4 节的讨论, 正问题的解是唯一的. 逆问题: 已知函数 $f(t)$ 和 $U(l,t)$, 求系数 $q(x)$. 本节利用 S-L 本征值问题的性质, 证明该逆问题的解唯一, 也就是说, 从 $f(t)$ 和 $U(l,t)$, 原则上唯一决定 $q(x)$.

设 $U_1$ 和 $U_2$ 是方程 (7.5.22a) 的解, 它们分别对应于 $q=q_1(x)\geqslant 0$ 和 $q=q_2(x)\geqslant 0$, 以及同一 $f(t)$. 如果 $U_1(l,t)=U_2(l,t)$, 且 $f(0)=0$ 和 $f'(0)\neq 0$, 则在区间 $[0,l]$ 上, $q_1(x)=q_2(x)$.

该结论的证明如下. 设 $\lambda_n$ 和 $u_n(x)$ 是下列本征值问题的解

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)u(x)=\lambda u(x)\\ u(0)=0;\ u'(l)=0\end{gathered} \tag{7.5.22b}$$

假定本征函数已归一化, 即 $||u_n(x)||=1$. 另一方面, 不失一般性, 假定本征函数有性质 $u_n(l)>0$. 从方程 (7.5.10c) 和 (7.5.10d), 本征值和本征函数的渐近表达式为

$$\begin{aligned}\lambda_n&=\frac{(n+1/2)^2\pi^2}{l^2}+\frac{1}{l}\int_0^l q(t)\mathrm{d}t+O(n^{-1})\\ u_n(x)&=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{(n+1/2)\pi}{l}x+O(n^{-1})\end{aligned}\tag{7.5.22c}$$

由于 $\{u_n(x)\}$ 是 $L^2(0,l)$ 上的完备系, 可作广义 Fourier 展开

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)u_n(x)\tag{7.5.23a}$$

其中展开系数为

$$a_n(t)=\int_0^l U(x,t)u_n(x)\mathrm{d}x\tag{7.5.23b}$$

上式微分可得

$$\begin{aligned}a_n'(t)&=\int_0^l\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}u_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^l\left[\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial x^2}-q(x)U(x,t)\right]u_n(x)\mathrm{d}x\\ &=\left[u_n(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}-U(x,t)u_n'(x)\right]_{x=0}^{x=l}\\ &\quad+\int_0^l U(x,t)[u_n''(x)-q(x)u_n(x)]\mathrm{d}x=f(t)u_n(l)-\lambda_n a_n(t)\end{aligned}\tag{7.5.23c}$$

利用初始条件 $a_n(0)=0$, 上式的解为

$$a(t)=u_n(l)\int_0^t f(\tau)\exp[-\lambda_n(t-\tau)]\tag{7.5.24a}$$

因此方程 (7.5.22a) 的解为

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(l)u_n(x)\int_0^t f(\tau)\exp[-\lambda_n(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\tag{7.5.24b}$$

由于

$$\begin{aligned}&\int_0^t f(\tau)\exp[-\lambda_n(t-\tau)]\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\lambda_n}f(t)\\ &-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t f'(\tau)\exp[-\lambda_n(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\to\frac{1}{\lambda_n}\end{aligned}\tag{7.5.24c}$$

由方程 (7.5.22c) 和上式知道, 方程 (7.5.24b) 中级数在 $t\in(0,T)$ 内一致收敛, 因此

积分与求和可交换. 对边界点 $x=l$, 方程 (7.5.24b) 给出

$$\begin{aligned}U(l,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}u_n^2(l)\int_0^t f(\tau)\exp[-\lambda_n(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t f(\tau)\sum_{n=0}^{\infty}u_n^2(l)\exp[-\lambda_n(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\\&\equiv\int_0^t f(\tau)A(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{7.5.25a}$$

对 $U_1(l,t)$ 和 $U_2(l,t)$ 都有类似的表达式

$$\begin{aligned}U_1(l,t)&=\int_0^t f(\tau)A^{(1)}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\U_2(l,t)&=\int_0^t f(\tau)A^{(2)}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{7.5.25b}$$

其中

$$\begin{aligned}A^{(1)}(t-\tau)&=\sum_{n=0}^{\infty}[u_n^{(1)}(l)]^2\exp[-\lambda_n^{(1)}(t-\tau)]\\A^{(2)}(t-\tau)&=\sum_{n=0}^{\infty}[u_n^{(2)}(l)]^2\exp[-\lambda_n^{(2)}(t-\tau)]\end{aligned}\tag{7.5.25c}$$

上标 (1) 和 (2) 分别对应于 $q_1(x)$ 和 $q_2(x)$. 从条件 $U_1(l,t)=U_2(l,t)$ 得

$$\int_0^t f(\tau)[A^{(1)}(t-\tau)-A^{(2)}(t-\tau)]\mathrm{d}\tau=0\tag{7.5.26a}$$

即

$$\int_0^t f(t-\tau)[A^{(1)}(\tau)-A^{(2)}(\tau)]\mathrm{d}\tau=0\tag{7.5.26b}$$

令 $w(\tau)\equiv A^{(1)}(\tau)-A^{(2)}(\tau)$, 因此 $w(\tau)$ 是第一类 Volterra 积分方程的解. 对上式微分两次, 并且利用条件 $f(0)=0$ 和 $f'(0)\neq 0$

$$f'(0)w(t)+\int_0^t f''(t-s)w(s)\mathrm{d}\tau=0, t\in[0,T]\tag{7.5.26c}$$

显然上式是齐次的第二类 Volterra 积分方程, 只有零解 $w(t)=0$. 因此有等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}[u_n^{(1)}(l)]^2\exp(-\lambda_n^{(1)}t)=\sum_{n=0}^{\infty}[u_n^{(2)}(l)]^2\exp(-\lambda_n^{(2)}t)\tag{7.5.27a}$$

由 $t$ 的任意性, 可推出

$$u_n^{(1)}(l)=u_n^{(2)}(l);\ \ \lambda_n^{(1)}=\lambda_n^{(2)}\tag{7.5.27b}$$

进一步, 与方程 (7.5.19a) 类似的方程为

$$u_n^{(1)}(x) = u_n^{(2)}(x) + \int_0^x K(x,\xi)u_n^{(2)}(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{7.5.27c}$$

上式中取 $x=l$, 并且利用式 (7.5.27b) 的第一式

$$\int_0^l K(l,\xi)u_n^{(2)}(\xi)\mathrm{d}\xi = 0 \tag{7.5.28a}$$

即

$$K(l,\xi) = 0 \tag{7.5.28b}$$

方程 (7.5.27c) 微分并取 $x=l$, 得到与方程 (7.5.20b) 类似的表达式

$${u'}_n^{(1)}(l) = {u'}_n^{(2)}(l) + K(l,l){u'}_n^{(2)}(l) + \int_0^l K_x(l,\xi)u_n^{(2)}(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{7.5.28c}$$

利用 $K(l,l)=0$ 和方程 (7.5.22b) 中边界条件得到

$$\int_0^l K_x(l,\xi)u_n^{(2)}(\xi)\mathrm{d}\xi = 0 \tag{7.5.29a}$$

即

$$K_x(l,\xi) = 0 \tag{7.5.29b}$$

因此 $K(x,\xi)$ 满足齐次 Cauchy 问题 (7.5.21b), 故 $K(x,\xi)$ 恒为零, 从式 (7.5.21c) 类似的方程可得: $q_1(x)=q_2(x)$, 于是定理得证.

### 7.5.4 数值方法

首先介绍基于特征函数 $f(\lambda)$ 的数值近似方法. 由 7.5.2 小节, 我们知道下列本征值逆问题

$$\begin{gathered} -\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u(x) = \lambda u(x), x\in(0,l) \\ u(0)=u(l)=0 \end{gathered} \tag{7.5.30a}$$

的解一般不唯一, 但当 $q(x)$ 关于 $x=l/2$ 对称, 则 $q(x)$ 有唯一解, 下面假定 $q(x)$ 具有这种性质. 根据特征函数 $f(\lambda)$ 的性质, 本征值逆问题可看作求解下列特征方程

$$f(\lambda) = u_2(l,\lambda,q) = 0 \tag{7.5.30b}$$

以决定 $q(x)$. 一般只知道有限个本征值: $\lambda_n$ $(n=1,2,\cdots,N)$, 因此假定 $q(x)$ 有形式

$$q(x,\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^N a_nq_n(x), x\in[0,1] \tag{7.5.30c}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_N)$, $q_n(x)$ 是一类线性独立的偶函数, 例如可取

$$q_n(x)=\cos\left[\frac{2\pi(n-1)x}{l}\right]\ ,(n=1,2,\cdots,N) \tag{7.5.30d}$$

因此方程 (7.5.30b) 变成非线性方程

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})=0 \tag{7.5.31a}$$

其中非线性算子 $\boldsymbol{F}$ 的分量为 $F_n(\boldsymbol{a})$

$$F_n(\boldsymbol{a})=u_2[l,\lambda_n,q(\cdot,\boldsymbol{a})],\ (n=1,2,\cdots,N) \tag{7.5.31b}$$

上式中 $q(\cdot,\boldsymbol{a})$ 表示 $F_n(\boldsymbol{a})$ 与 $q(x,\boldsymbol{a})$ 有关, 但已与 $x$ 无直接函数关系. 一般不可能直接求出 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ 的函数形式, 故只能通过迭代法求近似解, 例如简单的 Newton 迭代法

$$\boldsymbol{a}^{k+1}=\boldsymbol{a}^k-[\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}^k)]^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}^k),\ k=0,1,2,\cdots \tag{7.5.32a}$$

迭代过程如下:

(1) 给定初始值 $\boldsymbol{a}^0=(a_1^0,a_2^0,\cdots,a_N^0)$, 把式 (7.5.30c) 代入方程 (7.5.30a), 求得 $u_2[l,\lambda_n,q(\cdot,\boldsymbol{a}^0)]$, 如果 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}^0)<\varepsilon$(给定的精度), 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^0$, 否则进行下一步计算;

(2) 由式 (7.5.32a), 计算 $\boldsymbol{a}^{k+1}$, 把式 (7.5.30c) 代入方程 (7.5.30a), 求得 $u_2[l,\lambda_n, q(\cdot,\boldsymbol{a}^{k+1})]$, 如果 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}^{k+1})<\varepsilon$(给定的精度), 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^{k+1}$, 否则继续由式 (7.5.32a) 进行下一步迭代.

从方程 (7.5.32a) 可见, 迭代过程需计算逆矩阵 $[\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}^k)]^{-1}$, 下面介绍其计算方法. 令

$$u_2^{k+1}=u_2^k+\delta u_2^k;\ q^{k+1}=q^k+\delta q^k \tag{7.5.32b}$$

注意到在迭代过程中, 本征值 $\lambda_n$, $(n=1,2,\cdots,N)$ 保持为常数, 上式代入方程 (7.5.1c), 并忽略二次小量

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2u_2^k(x,\lambda_n)}{\mathrm{d}x^2}+q^k(x)u_2^k(x,\lambda_n)=\lambda_nu_2^k(x,\lambda_n)\\ u_2^k(0,\lambda_n)=0;\ \frac{\mathrm{d}u_2^k(0,\lambda_n)}{\mathrm{d}x}=1\end{gathered} \tag{7.5.33a}$$

以及

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2\delta u_2^k(x,\lambda_n)}{\mathrm{d}x^2}+[q^k(x)-\lambda_n]\delta u_2^k(x,\lambda_n)=-\delta q^k(x)u_2^k(x,\lambda_n)\\ \delta u_2^k(0,\lambda_n)=0;\ \frac{\mathrm{d}\delta u_2^k(0,\lambda_n)}{\mathrm{d}x}=0\end{gathered} \tag{7.5.33b}$$

上述 Cauchy 问题的解可用 Green 函数 $G^k(x,x',\lambda_n)$ 表示成

$$\delta u_2^k(x,\lambda_n) = -\int_0^x G^k(x,x',\lambda_n)\delta q^k(x')u_2^k(x',\lambda_n)\mathrm{d}x' \tag{7.5.34a}$$

其中 Green 函数定义为

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2G^k(x,x',\lambda_n)}{\mathrm{d}x^2} + [q^k(x)-\lambda_n]G^k(x,x',\lambda_n) = \delta(x,x') \\ G^k(0,x',\lambda_n)=0;\ \frac{\mathrm{d}G^k(0,x',\lambda_n)}{\mathrm{d}x}=0\end{gathered} \tag{7.5.34b}$$

因为

$$\delta q^k = \sum_{i=1}^N \delta a_i^k q_i(x) \tag{7.5.34c}$$

代入方程 (7.5.34a), 并取 $x=l$

$$\delta u_2^k(l,\lambda_n) = \sum_{j=1}^N \delta a_j^k a_{jn}^k \tag{7.5.35a}$$

其中

$$a_{jn}^k \equiv -\int_0^l G^k(l,x',\lambda_n)q_j(x')u_2^k(x',\lambda_n)\mathrm{d}x' \tag{7.5.35b}$$

因此

$$[\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}^k)]_{jn} = \frac{\delta u_2^k(l,\lambda_n)}{\delta a_j^k} = a_{jn}^k,\ (j,n=1,2,\cdots,N) \tag{7.5.35c}$$

然后求矩阵算子 $\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}^k)$ 的逆算子 $[\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}^k)]^{-1}$. 一般 $\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}^k)$ 与 $\boldsymbol{a}^k$ 有关, 每一次迭代都需要计算 $\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}^k)$ 和它的逆, 计算量非常大. 可以证明迭代公式 (7.5.32a) 可修改成

$$\boldsymbol{a}^{k+1} = \boldsymbol{a}^k - [\nabla\boldsymbol{F}(0)]^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}^k),\ k=0,1,2,\cdots \tag{7.5.35d}$$

下面介绍的数值计算方法基于 7.5.2 小节中的 Goursat 问题. 假定已知下列二个本征值问题的本征值

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u(x) = \lambda u(x),\ x\in(0,l) \\ u(0)=u(l)=0\end{gathered} \tag{7.5.36a}$$

和

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)v(x) = \mu v(x),\ x\in(0,l) \\ v(0)=0,\ v'(l)+Hv(l)=0\end{gathered} \tag{7.5.36b}$$

的前 $N$ 个本征值 $\lambda_n$ 和 $\mu_n$, $(n=1,2,\cdots,N)$, 求函数 $q(x)$.

首先从有限个 $\lambda_n$ 和 $\mu_n$ 求 Goursat 问题的 Chauchy 数据, 设

$$K(l,t)=\sum_{k=1}^{N}a_k\sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) \tag{7.5.37a}$$

代入方程 (7.5.16b), 即

$$u_n(x)=\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n}}+\int_0^x K(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}}\mathrm{d}t \tag{7.5.37b}$$

且取 $x=l$ 导致 $N$ 个线性方程

$$\sum_{k=1}^{N}a_k\int_0^l\sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right)\sin\sqrt{\lambda_n}t\mathrm{d}t=-\sin\sqrt{\lambda_n}l \quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{7.5.37c}$$

把方程 (7.5.37b) 中 $u_n(x)$ 改成 $v_n(x)$, 代入边界条件 $v_n'(l)+Hv_n(l)=0$ 得到

$$\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}l+H\sin\sqrt{\mu_n}l+\int_0^l[K_x(l,t)+HK(l,t)]\sin\sqrt{\mu_n}t\mathrm{d}t=0 \tag{7.5.38a}$$

令

$$K_x(l,t)+HK(l,t)=\sum_{k=1}^{N}b_k\sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) \tag{7.5.38b}$$

代入方程 (7.5.38a) 得到

$$\sum_{k=1}^{N}b_k\int_0^l\sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right)\sin\sqrt{\mu_n}t\mathrm{d}t=-\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}l-H\sin\sqrt{\mu_n}l \tag{7.5.38c}$$

其中 $n=1,2,\cdots,N$. 从方程 (7.5.37c) 和上式可求得 $N$ 个系数 $a_k$ 和 $b_k$, $(k=1,2,\cdots,N)$, 即求得 Cauchy 数据 $K(l,t)$ 和 $K_x(l,t)$. 然后考虑 Cauchy 问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial t^2}-q(x)K(x,t)=0,\ (0<t<x<l)\\ K(x,0)=0,\ x\in(0,l);\ K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(s)\mathrm{d}s,\ x\in[0,l]\\ K(l,t)=g(t);\ K_x(l,t)=f(t),\ t\in[0,l]\end{gathered} \tag{7.5.39a}$$

其中 $g(t)$ 和 $f(t)$ 由方程 (7.5.37a) 和 (7.5.38b) 给出. 可以证明上述问题给出关系

$$q(x)\equiv 2\boldsymbol{T}(q) \tag{7.5.39b}$$

其中积分算子定义为

$$\boldsymbol{T}(q)=-\int_x^l q(y)K(y,2x-y)\mathrm{d}y+g(2x-l)+f'(2x-l) \tag{7.5.39c}$$

注意积分核 $K(y,2x-y)$ 由 Goursat 问题 (7.5.39a) 决定, 仍然是 $q(x)$ 的函数, 故方程 (7.5.39b) 是非线性方程, 可用迭代法解之

$$q^{k+1}(x)=2\boldsymbol{T}(q^k) \tag{7.5.39d}$$

如取 $q^0(x)=0$, 则 $q^1(x)=g(2x-l)+f'(2x-l)$, 进一步的迭代要解上述 Goursat 问题.

### 7.5.5 高维本征值逆问题

考虑算子 $\boldsymbol{H}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r}),\ (\boldsymbol{r}\in G)$ 的本征值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{H}\psi(\boldsymbol{r})=\lambda\rho(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}),\ (\boldsymbol{r}\in G)\\ \left[\alpha\psi(\boldsymbol{r})+\beta\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]_{\partial G}=0\end{gathered} \tag{7.5.40a}$$

正问题: 给定 $p(\boldsymbol{r})>0$, $q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$, $\rho(\boldsymbol{r})>0$, $\alpha(\boldsymbol{r})$ 和 $\beta(\boldsymbol{r})$, 求本征函数 $\psi_\nu(\boldsymbol{r})$ 和相应的本征值 $\lambda_\nu,(\nu=1,2,\cdots)$; 逆问题: 已知前 $M$ 个本征值 $\lambda_\nu^\delta$, $(\nu=1,2,\cdots,M)$, 反演函数 $p(\boldsymbol{r})>0$ 或者 $q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$(以下假定 $q(\boldsymbol{r})$ 已知). 对高维问题, 存在本征值的简并, 故用 Newton 迭代法求解时, 每一步迭代得到的本征值的简并性质可能完全不同, 故迭代可能不稳定或者不收敛. 因此我们避免用 Newton 迭代法, 而采用最佳摄动量法构造迭代过程. 设存在完备的基函数集 $\{\psi_j(\boldsymbol{r})\}$, 系数 $p(\boldsymbol{r})$ 可以展成

$$p(\boldsymbol{r})\approx\sum_{j=1}^N p_j\psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{7.5.40b}$$

如果给出 $p(\boldsymbol{r})$, 则求解正问题 (7.5.40a) 就可以得到

$$\lambda_\nu=\lambda_\nu(p_1,p_2,\cdots,p_N),\ (\nu=1,2,\cdots,M) \tag{7.5.40c}$$

设迭代过程为

$$p_{k+1}(\boldsymbol{r})=p_k(\boldsymbol{r})+\delta p(\boldsymbol{r}) \tag{7.5.41a}$$

其中摄动量 $\delta p(\boldsymbol{r})$

$$\delta p(\boldsymbol{r})\approx\sum_{j=1}^N \delta p_j\psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{7.5.41b}$$

使下列非线性泛函极小

$$J(\delta p)=\sum_{\nu=1}^{M}|\lambda_\nu-\lambda_\nu^\delta|^2+\alpha\int_G|\delta p(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{7.5.41c}$$

其中 $\alpha$ 为正则化参数. 设 $\lambda_\nu^{k+1}$ 和 $\lambda_\nu^k$ 分别是函数 $p(\boldsymbol{r})=p_{k+1}(\boldsymbol{r})$ 和 $p(\boldsymbol{r})=p_k(\boldsymbol{r})$ 时正问题方程 (7.5.40a) 的解, 则

$$\begin{aligned}\lambda_\nu^{k+1}&=\lambda_\nu^{k+1}(p_1+\delta p_1,p_2+\delta p_2,\cdots,p_N+\delta p_N)\\&=\lambda_\nu^k(p_1,p_2,\cdots,p_N)+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\lambda_\nu^k}{\partial p_j}\delta p_j+\cdots\end{aligned} \tag{7.5.42a}$$

代入式 (7.5.41c) 得到

$$\begin{aligned}J(\delta p)&=\sum_{\nu=1}^{M}\left|\lambda_\nu^k-\lambda_\nu^\delta+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\lambda_\nu^k}{\partial p_j}\delta p_j\right|^2+\alpha\sum_{i,j=1}^{N}A_{ij}\delta p_i\delta p_j\\&=\sum_{i,j=1}^{N}A_{ij}\delta p_i\delta p_j-2\sum_{j=1}^{N}B_j\delta p_j+C\end{aligned} \tag{7.5.42b}$$

其中

$$\begin{aligned}A_{ij}&\equiv\sum_{\nu=1}^{M}\frac{\partial\lambda_\nu^k}{\partial p_i}\frac{\partial\lambda_\nu^k}{\partial p_j}+\alpha\int_G\psi_i(\boldsymbol{r})\psi_j^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\\B_j&\equiv-\sum_{\nu=1}^{M}(\lambda_\nu^k-\lambda_\nu^\delta)\frac{\partial\lambda_\nu^k}{\partial p_j};\ C\equiv\sum_{\nu=1}^{M}|\lambda_\nu^k-\lambda_\nu^\delta|^2\end{aligned} \tag{7.5.42c}$$

由 $J(\delta p)$ 极小得到决定 $\delta p_i,\ (i=1,2,\cdots,N)$ 的代数方程

$$\sum_{i,j=1}^{N}A_{ij}\delta p_i=B_j,\ (j=1,2,\cdots,N) \tag{7.5.42d}$$

一旦求得 $\delta p_i=\delta p_i^{\alpha,\delta},\ (i=1,2,\cdots,N)$, 则

$$p_{k+1}(\boldsymbol{r})=p_k(\boldsymbol{r})+\sum_{j=1}^{N}\delta p_i^{\alpha,\delta}\psi_j(\boldsymbol{r}) \tag{7.5.42e}$$

收敛判据为 $C=\sum\limits_{\nu=1}^{M}|\lambda_\nu^k-\lambda_\nu^\delta|^2<\varepsilon$, 如果不满足, 则继续迭代.

如果正问题 (7.5.40a) 仅仅给出 $\lambda_\nu,\ (\nu=1,2,\cdots)$ 满足的方程

$$\varPhi(\lambda_\nu,\boldsymbol{p})=0,\ (\nu=1,2,\cdots,M) \tag{7.5.43a}$$

其中 $\boldsymbol{p}=[p_1,p_2,\cdots,p_N]$, 则非线性泛函修改为

$$J(\delta p)=\sum_{\nu=1}^{M}|\varPhi(\lambda_\nu,\boldsymbol{p})-\Phi(\lambda_\nu^\delta,\boldsymbol{p})|^2+\alpha\int_G|\delta p(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{7.5.43b}$$

其他过程类似, 不再重复.

## 习　题　七

7.1 在地球物理勘探中, 经常遇到位势逆问题

$$\nabla^2u=\rho(x,y,z)$$
$$u|_{z=0}=v(x,y)$$

即已知地表面位势的测量数据, 求地球内部的质量分布. 证明上述逆问题可化为第一类 Fredholm 积分方程. 设 $\rho(x,y,z)$ 是局域的

$$\rho(x,y,z)=\begin{cases}\rho_1(x,y,z), & (x,y,z)\in G\\ 0, & (x,\ y,\ z)\notin G\end{cases}$$

7.2 在重力测量中, 通常测量的数据是垂直方向的重力加速度分量

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=g(x,y)$$

证明上题的逆问题可化为第一类 Fredholm 积分方程.

7.3 考虑地热逆问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\nabla^2u+f(\boldsymbol{r})$$
$$u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=u(\boldsymbol{r},0)$$

其中 $u(\boldsymbol{r},t)$ 为地下温度场分布, $\alpha$ 为岩石热扩散系数, $f(\boldsymbol{r})$ 为地热源强度, $u(\boldsymbol{r},0)$ 为初始温度分布.

(a) 假定已知地球的初始温度分布和岩石热扩散系数, 测量数据为地表面温度变化 $u(x,y,z,t)|_{z=0}=u(x,y,0,t)$, 从测量数据反演热源强度, 证明 $f(\boldsymbol{r})$ 的反演可化为第二类 Fredholm 积分方程;

(b) 假定已知岩石热扩散系数, 测量数据为地表面温度变化 $u(x,y,z,t)|_{z=0}=u(x,y,0,t)$, 从测量数据反演地球初始温度分布 (假定热源强度为零). 证明这一逆问题可化为第一类 Fredholm 积分方程.

7.4 积分方程

$$\int_{-6}^{6}k(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y=g(x),\ x\in[6,-6]$$

其中

$$k(x)=1+\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right),\ |x|\leqslant 6$$
$$g(x)=(6+x)\left[1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right]-\frac{9}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right),\ |x|\leqslant 6$$

(a) 求上述方程的严格解;

(b) 用积分离散化方法求数值解, 并且分析离散精度对解的影响.

7.5 二维电导率成象

$$\nabla\cdot(\sigma\nabla u)=0,\ \boldsymbol{r}\in G$$

$$\sigma\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G}=J_0(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial G$$

从表面测量的电流密度 $J_0(\boldsymbol{r})$, 反演电导率 $\sigma(\boldsymbol{r})$ 分布. 导出 PST 迭代关系.

7.6 考虑本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=\lambda u,\ x\in(-1,1)$$

$$u(-1)=u(1)=0$$

设

$$p(x)=\begin{cases}p_1, & x<0\\ p_2, & x>0\end{cases}$$

其中 $p_1$ 和 $p_2$ 是常数. 又设 $v(x,\lambda)$ 是下列 Cauchy 问题的解

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)=\lambda v,\ x\in(-1,1)$$

$$v(-1,\lambda)=0;\ v'(-1,\lambda)=1$$

证明本征值 $\lambda$ 是方程 $v(1,\lambda)=0$ 的根, 其中

$$v(1,\lambda)=\sqrt{\frac{p_1}{\lambda}}\left(\sin\sqrt{\frac{\lambda}{p_1}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{p_2}}+\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{p_1}}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{p_2}}\right)$$

7.7 考虑本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)u(x)=\lambda u(x),\ x\in(0,l)\quad x\in(0,l)$$

$$u(0)=0;\ u'(l)=0$$

设 $(\lambda_n,u_n)$ 和 $(\mu_n,v_n)$ 分别是 $q(x)=p_1(x)$ 和 $q(x)=p_2(x)$ 的本征值和相应的本征函数, 如果 $\lambda_n=\mu_n,(n=1,2,\cdots)$ 并且

$$\frac{u_n(l)}{u_n'(0)}=\frac{v_n(l)}{v_n'(0)},\ (n=1,2,\cdots)$$

证明: 唯一性 $p_1(x)=p_2(x)$.

# 第 8 章　非线性数学物理方程

由于非线性项的存在, 偏微分方程能否产生新的解? 另一方面, 线性方程一般是非线性方程通过线性化而来的, 如声波方程, 假定流体质点偏离平衡位置的振动是无限小量, 对流体力学方程进行线性化处理, 从而得到线性化的波动方程. 自 20 世纪 60 年代以来, 非线性方程在物理、化学、生物等各个学科中不断出现, 其研究内容日趋丰富. 与线性方程的定解问题一样, 非线性方程同样存在定解问题的适定性, 但后者要复杂得多. 而且非线性方程有许多自身的特点, 因此本章重点放在几个物理中典型的非线性方程求解和求解方法上. 在 8.1 节中, 我们首先介绍若干典型非线性方程及其行波解; 8.2 节介绍 Hopf-Cole 和 Hirota 方法求非线性方程的解; 8.3 节介绍求解时间演化方程初值问题的逆散射方法; 最后, 8.4 节介绍一种重要的变换, 即 Bäcklund 变换.

## 8.1　典型非线性方程及其行波解

在无限空间, 线性或非线性偏微分方程 $\boldsymbol{P}u=0$ (其中 $\boldsymbol{P}$ 为包括时间 $t$ 和空间 $x$ 偏导数的微分算子), 形如 $u(x,t)=F(x-ct)$ 的解称为方程 $\boldsymbol{P}u=0$ 的**行波解**, 其中 $c$ 为常数. 对线性偏微分方程, 如波动方程 (1.1.8a), $F(\xi)$, $(\xi=x-t,\ c=1)$ 为满足一定条件的任意函数. 但对非线性偏微分方程, 由于迭加原理已不成立, $F(\xi)$ 只能取特定的形式才有可能满足方程 $\boldsymbol{P}u=0$. 事实上, 满足方程 $\boldsymbol{P}u=0$ 的特定形式 $F(\xi)$ 是方程的非线性本征模式. 从行波解可以分析非线性偏微分方程解的重要性质. 我们特别感兴趣的是非线性偏微分方程的所谓 “孤立波” 形式的解.

### 8.1.1　Burgers 方程及冲击波

Burgers 方程描述非线性的耗散型波动过程, 其一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{8.1.1}$$

其中 $\alpha>0$ 为常数. 如果取非线性项为零, 则上式为热传导方程, 是典型的耗散方程, 故称 Burgers 方程是非线性的耗散型波动方程.

**例 8.1.1**　考虑了介质的耗散和非线性后, 一维声波方程满足

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0\\&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=b\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\end{aligned}\tag{8.1.2a}$$

其中场量 $P$ 为流体中的压强分布, $\rho$ 和 $v$ 分别是流体介质的密度和运动速度, $b$ 是描写介质耗散的常数, 在二阶近似下, 声压 $p\equiv P-P_0$(其中 $P_0$ 为流体平衡时的压强) 与密度的关系为

$$p\approx c_0^2(\rho-\rho_0)+\frac{1}{2}B(\rho-\rho_0)^2\tag{8.1.2b}$$

其中 $\rho_0$ 和 $c_0$ 是流体平衡时的密度和声速, $B$ 是介质的非线性参数. 一般情况下, 从方程 (8.1.2a) 得到一个单一场量 $\rho$ 或者 $v$ 的方程是困难的. 考虑 $x$ 方向传播的行波

$$\begin{aligned}\rho&=\rho_0+\varepsilon\rho'(X,\tau)\\v(x,t)&=\varepsilon v(X,\tau)\end{aligned}\tag{8.1.3a}$$

其中

$$X\equiv\varepsilon x;\ \tau=t-\frac{x}{c_0}\tag{8.1.3b}$$

在上式和式 (8.1.3a) 中, 引进小量 $\varepsilon\ll 1$, 其意义在于表明: ① 在声传播过程中 $\rho'$ 和 $v$ 是同级小量; ② 由于非线性和耗散引起的波形畸变较小, 场量主要依赖于变量 $\tau$(行波), 而随 $x$ 的变化远慢于随 $\tau$ 的变化. 于是, 存在微分关系

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau}\\\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}-\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\end{aligned}\tag{8.1.3c}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial X}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}-\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}-\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{\partial\tau}{\partial x}\\&=\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial X^2}-\frac{2\varepsilon}{c_0}\frac{\partial^2}{\partial X\partial\tau}+\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\end{aligned}\tag{8.1.3d}$$

把式 (8.1.3a)、式 (8.1.3b) 和上式代入方程 (8.1.2a) 的第一式得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{v}{c_0}\varepsilon\right)\varepsilon\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}-\frac{1}{c_0}\left(1+\varepsilon\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\varepsilon\frac{\partial v}{\partial\tau}\\&+\varepsilon^3\frac{v}{\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial X}+\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial X}+\varepsilon^3\frac{\rho'}{\rho_0}\frac{\partial v}{\partial X}=0\end{aligned}\tag{8.1.4a}$$

保留到 $\varepsilon$ 的二次项, 近似到二阶的方程为 (取 $\varepsilon=1$)

$$\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{v}{c_0}\right)\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}-\frac{1}{c_0}\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{\partial v}{\partial\tau}+\frac{\partial v}{\partial X}=0 \tag{8.1.4b}$$

同样, 把式 (8.1.3a)、式 (8.1.3b) 和 (8.1.3d) 代入方程 (8.1.2a) 的第二式得到方程

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}-\frac{v}{c_0}\right)\frac{\partial v}{\partial\tau}=\frac{c_0}{\rho_0}\left[1+2(\beta-1)\frac{\rho'}{\rho_0}\right]\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}\\+\frac{b}{\rho_0c_0^2}\frac{\partial^2v}{\partial\tau^2}-\frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial X}\end{aligned} \tag{8.1.4c}$$

其中 $\beta=1+\rho_0B/2c_0^2$ 称为非线性参数. 注意到方程 (8.1.4b) 和 (8.1.4c) 中的非线性项可用线性关系 $\rho'/\rho_0\approx v/c_0$ 代替 (相乘后仍然是二阶量, 但线性项中必须保留 $\rho'$; 注意 $\partial\rho'/\partial X$ 也是二阶量) 得到

$$\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}=\frac{\rho_0}{c_0}\frac{\partial v}{\partial\tau}+\frac{2\rho_0v}{c_0^2}\frac{\partial v}{\partial\tau}-\rho_0\frac{\partial v}{\partial X} \tag{8.1.5a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}=\frac{c_0}{\rho_0}\left[\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}+2(\beta-1)\rho_0\frac{v}{c_0^2}\frac{\partial v}{\partial\tau}\right]+\frac{b}{\rho_0c_0^2}\frac{\partial^2v}{\partial\tau^2}-c_0\frac{\partial v}{\partial X} \tag{8.1.5b}$$

上而式消去 $\partial\rho'/\partial\tau$ 得到

$$\frac{\partial v}{\partial X}-\frac{\beta}{c_0^2}v\frac{\partial v}{\partial\tau}=\frac{b}{2\rho_0c_0^3}\frac{\partial^2v}{\partial\tau^2} \tag{8.1.5c}$$

上式就是描写耗散介质中非线性行波 ($x$ 方向传播) 的方程, 它是 Burgers 的另外一种形式. 如果独立变量取为

$$X=x-c_0t;\ \tau=t \tag{8.1.6a}$$

可以得到相应 Burgers 方程 (作为习题)

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}+\beta v\frac{\partial v}{\partial X}=b\frac{\partial^2v}{\partial X^2} \tag{8.1.6b}$$

上式与标准形式的 Burgers 方程 (8.1.1) 类似. 注意方程 (8.1.5c) 和 (8.1.6b) 的区别: 如果给定 $t=0$ 时刻的初始条件, 用方程 (8.1.6b) 方便; 而如果给定 $x=0$ 时的边界条件, 则用方程 (8.1.5c) 方便.

设方程 (8.1.1) 的行波解有形式

$$u=u(\xi);\ \xi=x-ct \tag{8.1.7a}$$

其中 $c$ 为传播速度, 代入方程 (8.1.1) 得到

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}-u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=0 \tag{8.1.7b}$$

对 $\xi$ 积分一次得到

$$\alpha\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+cu-\frac{1}{2}u^2=\frac{1}{2}a \tag{8.1.7c}$$

其中 $a$ 为积分常数. 上式改写成

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{2\alpha}(u^2-2cu+a) \tag{8.1.7d}$$

设方程右边有二个实根

$$u_1\equiv c+\sqrt{c^2-a};\ u_2\equiv c-\sqrt{c^2-a} \tag{8.1.8a}$$

由于 $c$ 和 $a$ 都是待定常数, 假定取 $c^2-a>0$, 于是方程 (8.1.7d) 为

$$\frac{\mathrm{d}u}{d\xi}=\frac{1}{2\alpha}(u-u_1)(u-u_2) \tag{8.1.8b}$$

上式积分可得到

$$u=\frac{1}{2}(u_1+u_2)-\frac{1}{2}(u_1-u_2)\tanh\frac{u_1-u_2}{4\alpha}(\xi-\xi_0) \tag{8.1.9a}$$

其中 $\xi_0$ 为积分常数. 因此我们得到了 Burgers 方程 (8.1.1) 的行波解 (8.1.9a), 波的振幅和波速分别为

$$A\equiv\frac{1}{2}(u_1-u_2);\ c=\frac{1}{2}(u_1+u_2) \tag{8.1.9b}$$

显然有下列关系

$$\begin{gathered}u|_{\xi=\xi_0}=c;\ u|_{\xi\to-\infty}=u_1;\ u|_{\xi\to\infty}=u_2\\ \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right|_{u=u_1}=\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right|_{u=u_2}=0\end{gathered} \tag{8.1.9c}$$

方程 (8.1.9a) 的图像如图 8.1.1, 称为 Burgers 方程的**冲击波**解.

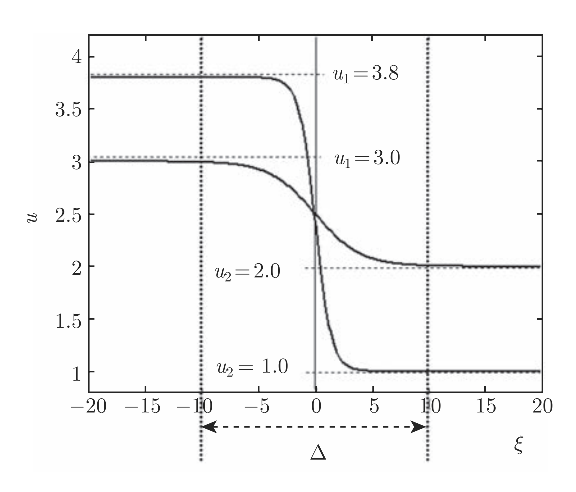



图 8.1.1　Burgers 方程的行波解: $\alpha=1$

**平衡点分析**　把二阶方程 (8.1.7b) 写成一阶方程组

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=v;\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{\alpha}(u-c)v \tag{8.1.10a}$$

故平衡点为 $v=0$ 而 $u=$ 任意. 考虑到方程 (8.1.8b), 取方程 (8.1.10a) 的二个平衡点为 $(u,v)=(u_1,0)$ 和 $(u,v)=(u_2,0)$. 在平衡点附近的任意变动满足

$$\frac{\mathrm{d}\Delta u}{\mathrm{d}\xi}=\Delta v;\ \frac{\mathrm{d}\Delta v}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{\alpha}(u-c)\Delta v+\frac{1}{\alpha}v\Delta u \tag{8.1.10b}$$

在平衡点 $(u,v)=(u_1,0)$ 附近, 上式变成

$$\frac{\mathrm{d}\Delta u}{\mathrm{d}\xi}=\Delta v;\ \frac{\mathrm{d}\Delta v}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{\alpha}(u_1-c)\Delta v \tag{8.1.10c}$$

或者写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \dfrac{1}{\alpha}(u_1-c)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix} \tag{8.1.10d}$$

系数矩阵的特征值 $\lambda$ 满足

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 0 & \dfrac{1}{\alpha}(u_1-c)-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{8.1.10e}$$

容易求得二个特征值为

$$\lambda_1=0;\ \lambda_2=\frac{1}{\alpha}(u_1-c)=\frac{\sqrt{c^2-a}}{\alpha}>0 \tag{8.1.11a}$$

因此 $u=u_1$ 是不稳定平衡点; 对平衡点 $u=u_2$, 可求得

$$\lambda_1=0;\ \lambda_2=\frac{1}{\alpha}(u_2-c)=-\frac{\sqrt{c^2-a}}{\alpha}<0 \tag{8.1.11b}$$

可见为稳定的平衡点. 从不稳定平衡点 $u=u_1$ 向稳定平衡点 $u=u_2$ 的过渡速度由宽度 $\Delta$ 描述 (如图 8.1.1), 决定于 $(u_2-u_1)/\alpha$. 特别要注意的是, 解式 (8.1.9a) 实质上就是连接二个平衡点的曲线.

另外一方面, 方程 (8.1.9a) 对 $\xi$ 微分可得到

$$v(\xi)\equiv\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{(u_1-u_2)^2}{8\alpha}\mathrm{sech}^2\left(\frac{u_1-u_2}{4\alpha}\right)(\xi-\xi_0) \tag{8.1.11c}$$

显然当 $\xi\to\pm\infty$ 时,$v(\xi)\to 0$. 回到 $(x,t)$ 变量, 上式表示向 $x$ 方向传播的 “孤立” 波, 如图 8.1.2. 值得指出的是, 由方程 (8.1.9b) 可见, “孤立” 波传播的速度 $c=(u_1+u_2)/2$ 与振幅有关, 这也是非线性本征模式的典型特性.

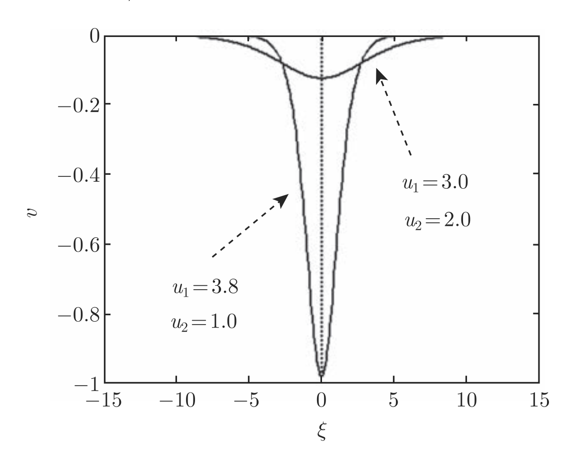



图 8.1.2　Burgers 方程的“孤立波”解: $\alpha=1$

### 8.1.2　KdV 方程及孤立波

KdV 方程首先由 Kortweg 和 de Vries 在 1895 年研究浅水表面波时导出, 20 世纪 60 年代又在等离子物理问题中出现, 因此对其研究比较成熟. KdV 方程的标准形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{8.1.12a}$$

其他形式的 KdV 方程均可通过适当的变换化成以上形式. 如果取 KdV 方程的非线性项为零, 并且令

$$u(x,t)=A\exp[\mathrm{i}(kx+\omega t)] \tag{8.1.12b}$$

则得到 $\mathrm{i}\omega+(\mathrm{i}k)^3=0$, 即色散关系 $\omega=k^3$, 故称 KdV 方程为非线性的色散型波动方程.

**行波解** 把行波形式 $u=u(\xi)$, $(\xi=x-ct)$ 的解代入方程 (8.1.12a) 得

$$\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}-6u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=0 \tag{8.1.12c}$$

积分一次得到

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}-3u^2-cu=a \tag{8.1.12d}$$

其中 $a$ 为积分常数. 上式二边乘 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi$ 再对 $\xi$ 积分得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=u^3+\frac{c}{2}u^2+au+b \tag{8.1.12e}$$

其中 $b$ 为积分常数. 因此

$$\xi-\xi_0=\pm\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2u^3+cu^2+2au+2b}} \tag{8.1.13a}$$

我们寻求无限远处为零并且平滑下降的解, 即满足无限远边界条件

$$u(\xi)|_{\xi\to\pm\infty}=0;\quad \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi\to\pm\infty}=\left.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}\right|_{\xi\to\pm\infty}=0 \tag{8.1.13b}$$

由方程 (8.1.12d) 和 (8.1.12e), $a=b=0$, 故

$$\xi-\xi_0=\pm\int\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{2u+c}}=\frac{2}{\mathrm{i}\sqrt{c}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2u+c}{-c}}\right) \tag{8.1.13c}$$

于是得到

$$u(\xi)=-\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right] \tag{8.1.13d}$$

显然上式与式 (8.1.11c) 有相同的形式, 称为 KdV 方程的 “孤立波” 解.

**守恒定律** 把 KdV 方程 (8.1.12a) 写成形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(-3u^2+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)=0 \tag{8.1.14a}$$

因此 $u$ 为守恒量, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\mathrm{d}x=\text{常数} \tag{8.1.14b}$$

上式具有质量守恒的含义. 另一方面, 方程 (8.1.4a) 二边乘 $u$ 得到

$$\frac{\partial u^2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[-2u^3-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=0 \tag{8.1.14c}$$

因此 $u^2$ 也为守恒量, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^2(x,t)\mathrm{d}x=\text{常数} \tag{8.1.14d}$$

上式具有动量守恒的含义. 而质量和动量守恒是质点力学的基本守恒量, 故 "孤立波" 解式 (8.1.13d) 具有类似粒子的性质, 称为 "孤子".

如果不使用无限远边界条件式 (8.1.13b), 并且令方程

$$u^3+\frac{c}{2}u^2+au+b=0 \tag{8.1.15a}$$

的三个根为 $u_1\geqslant u_2\geqslant u_3$, 于是

$$\xi-\xi_0=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}} \tag{8.1.15b}$$

上式可用椭圆余弦函数表示

$$u=u_2-(u_2-u_3)\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{\frac{1}{2}(u_1-u_3)}(\xi-\xi_0),k\right] \tag{8.1.15c}$$

其中 $k$ 为椭圆余弦函数的模

$$k=\sqrt{\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}} \tag{8.1.15d}$$

**椭圆函数** 椭圆函数定义为下列积分的反函数

$$z=\int_0^{\psi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=\int_0^{u=\sin\psi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{8.1.16a}$$

其中 $0<k<1$ 称为椭圆函数的模数. 定义椭圆正弦和余弦函数 $\mathrm{sn}(z,k)$ 和 $\mathrm{cn}(z,k)$ 分别为

$$\begin{gathered}u=\sin\psi=\mathrm{sn}(z,k)\\ \mathrm{cn}(z,k)=\cos\psi=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2(z,k)}\end{gathered} \tag{8.1.16b}$$

椭圆余弦函数是周期为 $4K(k)$ 的周期函数, 因此方程 (8.1.15c) 表示周期为 $2K(k)$ 的行波, 其中 $K(k)$ 为积分

$$K(k)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{8.1.16c}$$

图 8.1.3 表示 KdV 方程的周期解. 周期解的形状与 $k$ 的大小密切相关, 图 8.1.4 表明 $k^2 = 0.999$ 时周期解的形状. 当 $k$ 增加 (但小于 1), 周期增加. 当严格有 $k = 1$, 周期变成无限大, 形成 "孤立波" 解, 即当 $u_1 \to u_2$, $k \to 1$, $\mathrm{cn}(z,k) \to \mathrm{sech}z$, 于是

$$u = u_2 - (u_2 - u_3)\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{1}{2}(u_1 - u_3)}(\xi - \xi_0)\right] \tag{8.1.17a}$$

特别是当 $u_1 \to u_2 \to 0$ 时, 此时 $u_3 = -c/2$, "孤立波" 解为式 (8.1.13d). 当 $u_2 \to u_3$, $k \to 0$ 时, $\mathrm{cn}(z,k) \to \cos z$, 因此

$$u = u_2 - (u_2 - u_3)\cos^2\left[\sqrt{\frac{1}{2}(u_1 - u_3)}(\xi - \xi_0)\right] \tag{8.1.17b}$$

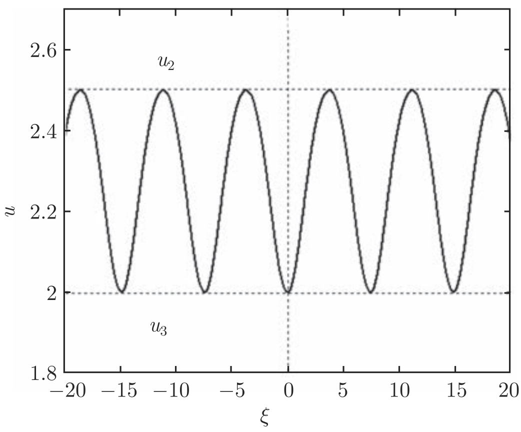



图 8.1.3 Kdv 方程的周期阶: $u_1 = 3.0$, $u_2 = 2.5$, $u_3 = 2.0$.

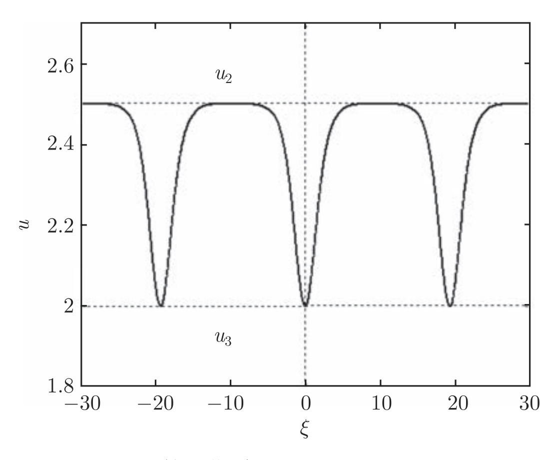



图 8.1.4 Kdv 方程的周期阶: $u_1 = 2.5005$, $u_2 = 2.5$, $u_3 = 2.0$

### 8.1.3 非线性 Klein-Gordon 方程

非线性 Klein-Gordon 方程的一般形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{d}V(u)}{\mathrm{d}u} = 0 \tag{8.1.18a}$$

其中 $c_0$ 为常数, $V(u)$ 为系统的势能. 取 $V(u) = V_0(1 - \cos u)$, $(V_0 > 0)$, 上式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V_0 \sin u = 0 \tag{8.1.18b}$$

称为 Sine-Gordon 方程, 在非线性光学中有重要的应用. 首先求方程 (8.1.18b) 的行波解, 把行波形式 $u = u(\xi)$, $(\xi = x - ct)$ 的解代入方程 (8.1.18b) 可以得到

$$(c^2 - c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + V_0 \sin u = 0 \tag{8.1.18c}$$

分两种情况讨论:

(1) $c^2 > c_0^2$, 方程 (8.1.18c) 写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + \gamma^2 \sin u = 0 \tag{8.1.18d}$$

其中 $\gamma^2 = V_0/(c^2 - c_0^2) > 0$, 上式二边乘 $v \equiv \mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi$

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} = -\gamma^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} \sin u \tag{8.1.19a}$$

即有 $v\mathrm{d}v = -\gamma^2 \sin u \mathrm{d}u$, 于是

$$\frac{1}{2}v^2 + \gamma^2(1 - \cos u) = h \tag{8.1.19b}$$

其中 $h$ 为积分常数, 上式即为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + 4\gamma^2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) = 2h \tag{8.1.19c}$$

因此

$$\xi - \xi_0 = \pm\frac{1}{2\gamma}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{k^2 - \sin^2(u/2)}} \tag{8.1.19d}$$

其中 $k = \sqrt{h/(2\gamma^2)} < 1$, 上式右边积分可用椭圆正弦函数表示

$$\sin\left(\frac{u}{2}\right) = \pm k\mathrm{sn}[\gamma(\xi - \xi_0), k] \tag{8.1.20a}$$

显然上式代表一个周期解, 如图 8.1.5, 图中 “+” 和 “−” 表示上式中分别取正和负号. 当 $k \to 0$ 时, 上式变成

$$\sin\left(\frac{u}{2}\right) = \pm k\sin[\gamma(\xi - \xi_0)] \tag{8.1.20b}$$

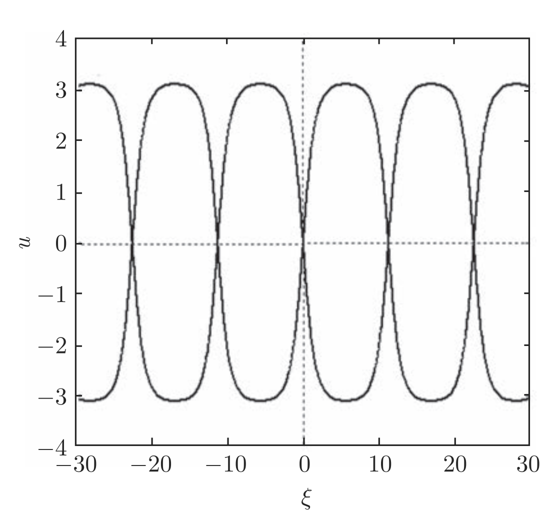



图 8.1.5 Sine-Gordon 方程的周期解: $k = 0.9998$, $\gamma = 1$

为线性波. 考虑特殊情况: $k = 1$, 此时有

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{k^2 - \sin^2(u/2)}} = \ln\left[\frac{1 + \sin(u/2)}{1 - \sin(u/2)}\right] \tag{8.1.20c}$$

由方程 (8.1.19d) 得到

$$\frac{1 + \sin(u/2)}{1 - \sin(u/2)} = \exp[\pm 2\gamma(\xi - \xi_0)] \tag{8.1.21a}$$

利用三角关系

$$\sqrt{\frac{1 + \sin(u/2)}{1 - \sin(u/2)}} = \tan\left(\frac{u}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{8.1.21b}$$

因此

$$u = -\pi + 4\arctan\{\exp[\pm\gamma(\xi - \xi_0)]\} \tag{8.1.21c}$$

称为 Sine-Gordon 的广义 “孤立波” 解. 当分别取 “+” 和 “−” 时, 如图 8.1.6, 前者称为**正扭结波**(Kink Wave), 后者称为**反扭结波**(Anti-kink Wave).

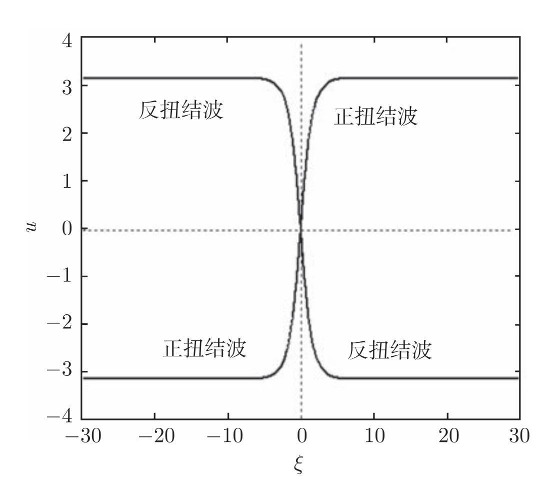



图 8.1.6　Sine-Gordon 方程的孤立: $k=1, \gamma=1$

(2) $c^2 < c_0^2$, 方程 (8.1.19c) 写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = 2h + 4\delta^2 \sin^2 \frac{u}{2} \tag{8.1.22a}$$

其中 $\delta^2 = V_0/(c_0^2 - c^2) > 0$, 于是

$$\xi - \xi_0 = \pm\frac{1}{2\delta}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{k'^2 - \cos^2(u/2)}} \tag{8.1.22b}$$

其中 $k' = \sqrt{1 + h/(2\delta^2)}$, 上式的周期解为

$$\cos\left(\frac{u}{2}\right) = \pm k' \mathrm{sin}[\delta(\xi - \xi_0), k'] \tag{8.1.22c}$$

当 $k' \to 0$ 时, 上式变成

$$\cos\left(\frac{u}{2}\right) = \pm k' \mathrm{sin}[\delta(\xi - \xi_0)],\ (0 < u < 2\pi) \tag{8.1.23a}$$

同样, 考虑特殊情况: $k' = 1$, 此时有

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \cos^2(u/2)}} = -\ln\left[\frac{1 + \cos(u/2)}{1 - \cos(u/2)}\right] \tag{8.1.23b}$$

由方程 (8.1.22b) 得到

$$\frac{1 + \cos(u/2)}{1 - \cos(u/2)} = \exp[\pm 2\delta(\xi - \xi_0)] \tag{8.1.23c}$$

利用三角关系

$$\sqrt{\frac{1 + \cos(u/2)}{1 - \cos(u/2)}} = \tan\left(\frac{u}{4}\right) \tag{8.1.24a}$$

因此

$$u = 4\arctan\{\exp[\pm\delta(\xi - \xi_0)]\} \tag{8.1.24b}$$

方程 (8.1.21c) 和 (8.1.24b) 就是 Sine-Gordon 方程的 “孤立波” 解, 它们是行波, 在空间以速度 $c$ 传播.

**呼吸孤子**　Sine-Gordon 方程还存在另一种 “驻波” 形式的 “孤立波” 解. 不失一般性, 把方程 (8.1.18b) 写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u \tag{8.1.25a}$$

事实上, 只要对方程 (8.1.18b) 作变换

$$t' = \sqrt{V_0}t;\ x' = (\sqrt{V_0}/c_0)x \tag{8.1.25b}$$

就可把方程 (8.1.18b) 化成 (8.1.25a). 受方程 (8.1.21c) 和 (8.1.24b) 的启发, 我们来寻找 (8.1.25a) 如下形式的 “驻波” 解

$$u = 4\arctan\left[\frac{w(x)}{v(t)}\right] \tag{8.1.26a}$$

即 $\tan(u/4) = w(x)/v(t)$, 利用三角函数关系

$$\sin u = \frac{4\tan(u/4)[1 - \tan^2(u/4)]}{[1 + \tan^2(u/4)]^2} \tag{8.1.26b}$$

式 (8.1.26a) 代入方程 (8.1.25a) 得到

$$(w^2 + v^2)\left(\frac{w''}{w} + \frac{v''}{v}\right) - 2[(w')^2 + (v')^2] = v^2 - w^2 \tag{8.1.27a}$$

为了得到分离变量的形式, 上式对 $x$ 和 $t$ 分别微分, 得到

$$(w^2 + v^2)\left(\frac{w''}{w}\right)' + 2ww'\left(\frac{w''}{w} + \frac{v''}{v}\right) - 4w'w'' = -2ww' \tag{8.1.27b}$$

和

$$(w^2 + v^2)\left(\frac{v''}{v}\right)' + 2vv'\left(\frac{w''}{w} + \frac{v''}{v}\right) - 4v'v'' = 2vv' \tag{8.1.27c}$$

上二式分别除以 $ww'$ 和 $vv'$ 得到

$$\frac{(w^2 + v^2)}{ww'}\left(\frac{w''}{w}\right)' + 2\left(-\frac{w''}{w} + \frac{v''}{v}\right) = -2 \tag{8.1.28a}$$

和

$$\frac{(w^2 + v^2)}{vv'}\left(\frac{v''}{v}\right)' + 2\left(\frac{w''}{w} - \frac{v''}{v}\right) = 2 \tag{8.1.28b}$$

上二式相加并且除以 $(w^2+v^2)$ 得到

$$\frac{1}{ww'}\left(\frac{w''}{w}\right)' = -\frac{1}{vv'}\left(\frac{v''}{v}\right)' \tag{8.1.28c}$$

上式左边是 $x$ 的函数, 而右边是 $t$ 的函数, 恒等条件是等于常数 (令为 $4\alpha$) 故有

$$\left(\frac{w''}{w}\right)' = 4\alpha ww';\ \left(\frac{v''}{v}\right)' = -4\alpha vv' \tag{8.1.29a}$$

积分一次得到

$$\frac{w''}{w} = 2\alpha w^2+\beta_1;\ \frac{v''}{v} = -2\alpha v^2+\beta_2 \tag{8.1.29b}$$

其中 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 是积分常数. 上二式两边分别乘 $ww'$ 和 $vv'$ 并进一步积分得到

$$\begin{aligned}(w')^2 &= \alpha w^4+\beta_1 w^2+\gamma_1\\ (v')^2 &= -\alpha v^4+\beta_2 v^2+\gamma_2\end{aligned} \tag{8.1.29c}$$

其中 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 是积分常数. 四个常数 $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 并非完全独立, 对方程 (8.1.27a) 的二次微分引进了二个常数, 因此四个积分常数中, 只有二个是独立的. 方程 (8.1.29b) 和 (8.1.29c) 代入 (8.1.27a) 得

$$[1-(\beta_1-\beta_2)](w^2-v^2) = 2(\gamma_1+\gamma_2) \tag{8.1.30a}$$

由于 $w$ 和 $v$ 分别是 $x$ 和 $t$ 的函数, 上式恒成立的条件是

$$\beta_1-\beta_2 = 1;\ \gamma_1+\gamma_2 = 0 \tag{8.1.30b}$$

取 $\beta_2=-\beta$ 和 $\gamma_1=\gamma$, 于是 $\beta_1=1-\beta$ 和 $\gamma_2=-\gamma$, 方程 (8.1.29c) 变成

$$\begin{aligned}w' &= \sqrt{\alpha w^4+(1-\beta)w^2+\gamma}\\ v' &= \sqrt{-\alpha v^4-\beta v^2-\gamma}\end{aligned} \tag{8.1.30c}$$

即

$$x-x_0 = \pm\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\alpha w^4+(1-\beta)w^2+\gamma}} \tag{8.1.31a}$$

以及

$$t-t_0 = \pm\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{-\alpha v^4-\beta v^2-\gamma}} \tag{8.1.31b}$$

因此 $w$ 和 $v$ 可用椭圆函数表示. 考虑比较简单的情况: $\gamma=0$ 和 $\alpha=-1$. 进一步假定 $0<\beta<1$, 此时

$$x-x_0 = \pm\int\frac{\mathrm{d}w}{w\sqrt{(1-\beta)-w^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{1-\beta}}\mathrm{sech}^{-1}\frac{w}{\sqrt{1-\beta}} \tag{8.1.32a}$$

即有

$$w(x) = \sqrt{1-\beta}\mathrm{sech}[\sqrt{1-\beta}(x-x_0)] \tag{8.1.32b}$$

对时间部分, 直接从方程 (8.1.29c) 可推得

$$[(1/v)']^2 = 1-\beta(1/v)^2 \tag{8.1.33a}$$

于是

$$\pm(t-t_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\arcsin\frac{\sqrt{\beta}}{v} \tag{8.1.33b}$$

即有

$$\frac{1}{v(t)} = \pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sin[\sqrt{\beta}(t-t_0)] \tag{8.1.33c}$$

方程 (8.1.32b) 和 (8.1.33c) 代入式 (8.1.26a) 得到 Sine-Gordon 方程的一个 "驻波" 解

$$u(x,t) = 4\arctan\left[\pm\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}\frac{\sin\sqrt{\beta}V_0 t}{\cosh[\sqrt{(1-\beta)}V_0 x/c_0]}\right], \quad (0<\beta<1) \tag{8.1.33d}$$

显然上式表示一个周期为 $2\pi/\sqrt{\beta}V_0$ 的周期解, 在 $x$ 轴的上下振荡, 像在不断地呼吸, 同时看起来象 "孤子" 和 "反孤子" 的一对振荡, 因此把 Sine-Gordon 方程的这种解称为 "呼吸孤子" 解, 简称为 "呼吸子".

由于 Sine-Gordon 方程在 Lorentz 变换 (见方程 1.1.7a) 下形式不变

$$x' = \frac{x-U_0 t}{\sqrt{1-M^2}};\ t' = \frac{t-U_0 x/c_0^2}{\sqrt{1-M^2}} \tag{8.1.33e}$$

故下列函数也是 Sine-Gordon 方程的解, 称为移动 "呼吸子"

$$u(x,t) = 4\arctan\left\{\pm\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}\frac{\sin\left[\gamma\sqrt{\beta}V_0(t-U_0x/c_0^2)\right]}{\cosh\left[\gamma\sqrt{(1-\beta)}V_0(x-U_0t)/c_0\right]}\right\} \quad (0<\beta<1) \tag{8.1.33f}$$

其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-U_0^2/c_0^2}$, $U_0$ 是移动速度.

### 8.1.4 非线性 Schrödinger 方程

非线性 Schrödinger 方程, 简称 NLS 方程, 是描述非线性波调制 (即非线性波包) 的方程, 其一般形式为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta|u|^2 u = 0 \tag{8.1.34a}$$

有意思的是 NLS 方程具有单频解

$$u = A\exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)] \tag{8.1.34b}$$

其中 $A$, $k$ 和 $\omega$ 分别为平面波的振幅、波数和频率, 上式代入方程 (8.1.34a) 得到 $k$ 与 $\omega$ 的关系, 即色散关系

$$\omega = \alpha k^2 - \beta|A|^2 \tag{8.1.34c}$$

与线性波不同的是, 上述色散关系与振幅 $A$ 有关, 而群速度 (即能量传播速度) 与振幅 $A$ 无关

$$c_g \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = 2\alpha k \tag{8.1.34d}$$

因 NLS 方程的非线项描述非线性调制作用, 故我们求方程 (8.1.34a) 的包络形式解

$$u(x,t) = \psi(\xi)\exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)] \tag{8.1.35a}$$

其中 $\xi = x - ct$, 上式代入方程 (8.1.34a) 得到

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} + \mathrm{i}(2\alpha k - c)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} + (\omega - \alpha k^2)\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 \tag{8.1.35b}$$

通常 $\psi$ 是实函数, 故选择 $c = c_g = 2\alpha k$, 因此

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} + (\omega - \alpha k^2)\psi + \beta\psi^3 = 0 \tag{8.1.35c}$$

二边乘 $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\xi$ 再对 $\xi$ 积分得到

$$\alpha\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + (\omega - \alpha k^2)\psi^2 + \frac{\beta}{2}\psi^4 = h \tag{8.1.35d}$$

其中 $h$ 是积分常数. 令 $\gamma \equiv -(\omega - \alpha k^2) > 0$, 上式变成

$$\begin{aligned}\xi - \xi_0 &= \pm\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{h/\alpha + (\gamma/\alpha)\psi^2 - (\beta/2\alpha)\psi^4}}\\ &= \pm\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{(\beta/2\alpha)[2h/\beta + 2(\gamma/\beta)\psi^2 - \psi^4]}}\end{aligned} \tag{8.1.35e}$$

利用椭圆函数可以得到方程 (8.1.35c) 的各种周期解, 我们不作进一步分析, 仅考虑存在孤波解的特殊情况.

(1) 积分常数 $h = 0$, 于是式 (8.1.35e) 简化为

$$\xi - \xi_0 = \pm\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{(\beta/2\alpha)[2(\gamma/\beta)\psi^2 - \psi^4]}} \tag{8.1.36a}$$

如果 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$, 则

$$\begin{aligned}\xi-\xi_0&=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi\sqrt{2\gamma/\beta-\psi^2}}\\&=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\ln\left[\frac{\sqrt{2\gamma/\beta-\psi^2}-\sqrt{2\gamma/\beta}}{\psi}\right]\end{aligned}\tag{8.1.36b}$$

即有 "孤波" 解

$$\psi(\xi)=-\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\mathrm{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi-\xi_0)\tag{8.1.36c}$$

如果 $\alpha>0$ 和 $\beta<0$, 则式 (8.1.36a) 变成

$$\xi-\xi_0=\pm\frac{1}{\sqrt{(-\beta/2\alpha)}}\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi\sqrt{\psi^2+2(-\gamma/\beta)}}\tag{8.1.36d}$$

令 $a^2=2(-\gamma/\beta)$, 利用积分关系

$$\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi\sqrt{\psi^2+a^2}}=-\frac{1}{a}\mathrm{arcsinh}\frac{a}{\psi}\tag{8.1.37a}$$

代入式 (8.1.36d) 得到 "孤波" 解

$$\psi(\xi)=\pm\sqrt{-\frac{2\gamma}{\beta}}\frac{1}{\sinh[\sqrt{\gamma/\alpha}(\xi-\xi_0)]}\tag{8.1.37b}$$

(2) 设方程 $\psi^4-2(\gamma/\beta)\psi^2-2h/\beta=0$ 有重根 $\psi_0^2$, 方程 (8.1.36a) 变成

$$\xi-\xi_0=\pm\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{-(\beta/2\alpha)(\psi^2-\psi_0^2)^2}}\tag{8.1.38a}$$

其中 $\psi_0^2$ 是方程 $\psi^4-2(\gamma/\beta)\psi^2-2h/\beta=0$ 的重根, 因为

$$\psi_0^2=\frac{\gamma}{\beta}\pm\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2+\frac{2h}{\beta}}\tag{8.1.38b}$$

显然, 存在重根条件是积分常数 $h=-\gamma^2/2\beta$, 相应的重根为 $\psi_0^2=\gamma/\beta$. 于是式 (8.1.38a) 简化成

$$\begin{aligned}\xi-\xi_0&=\pm\frac{1}{\sqrt{-(\beta/2\alpha)}}\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi^2-\psi_0^2}\\&=\pm\frac{1}{\sqrt{-(\beta/2\alpha)}}\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi^2-\psi_0^2}\end{aligned}\tag{8.1.38c}$$

完成积分后得到

$$\xi-\xi_0=\pm\sqrt{-\frac{2\alpha}{\gamma}}\ln\frac{1+\psi/\sqrt{\gamma/\beta}}{1-\psi/\sqrt{\gamma/\beta}}\tag{8.1.39a}$$

即得到 “冲击波” 解

$$\psi = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\tanh\sqrt{-\frac{\gamma}{2\alpha}}(\xi - \xi_0) \tag{8.1.39b}$$

显然上式要求 $\alpha < 0$ 和 $\beta > 0$.

以方程 (8.1.36c) 代入式 (8.1.35a)

$$u(x,t) = -\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\text{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi - \xi_0)\exp[\text{i}(kx - \omega t)] \tag{8.1.40a}$$

上式称为 NLS 方程的包络 “孤立波” 解. 显然包络 “孤立波” 的振幅为

$$a \equiv \sqrt{2\gamma/\beta} \tag{8.1.40b}$$

因此 $\gamma = a^2\beta/2$, 注意到 $\gamma \equiv -(\omega - \alpha k^2)$, 即得到包络 “孤立波” 解的色散关系

$$\omega = \alpha k^2 - \gamma = \alpha k^2 - \frac{\beta a^2}{2} \tag{8.1.40c}$$

注意: 式 (8.1.34c) 是单频波 $u = A\exp[\text{i}(kx - \omega t)]$ 的色散关系.

### 8.1.5 KdV-Burgers 方程

KdV-Burgers 方程是 KdV 方程与 Burgers 方程的组合

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,\ (\alpha > 0,\ \beta > 0) \tag{8.1.41a}$$

当 $\beta = 0$ 时, 上式即为 Burgers 方程. 当 $\alpha = 0$ 时, 上式通过自变量和函数的线性变换: $x' = \beta^{-1/3}x$ 和 $u' = -\beta^{-1/3}u/6$, 可化成 KdV 方程的标准形式, 即方程 (8.1.12a). KdV-Burgers 方程是非线性的耗散和色散型波动方程, 考虑了介质的耗散和色散二个物理效应, 例如含气泡水中的非线性声波的传播就由 KdV-Burgers 描写. 如果取 KdV-Burgers 方程的非线性项为零, 并且令

$$u(x,t) = A\exp[\text{i}(kx - \omega t)] \tag{8.1.41b}$$

则得到 $-\text{i}\omega + \alpha k^2 - \text{i}\beta k^3 = 0$, 即色散关系 $\omega = -\text{i}\alpha k^2 - \beta k^3$, 虚部表示耗散引起的衰减, 而实部表示色散, 故称 KdV-Burgers 方程为非线性的耗散和色散型波动方程.

把行波形式 $u = u(\xi)$, $(\xi = x - ct)$ 代入方程 (8.1.41a) 得到

$$-c\frac{\text{d}u}{\text{d}\xi} + \frac{1}{2}\frac{\text{d}u^2}{\text{d}\xi} - \alpha\frac{\text{d}^2 u}{\text{d}\xi^2} + \beta\frac{\text{d}^3 u}{\text{d}\xi^3} = 0 \tag{8.1.41c}$$

上式积分一次得到

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 - \alpha\frac{\text{d}u}{\text{d}\xi} + \beta\frac{\text{d}^2 u}{\text{d}\xi^2} = h \tag{8.1.41d}$$

其中 $h$ 是积分常数, 上式不能作进一步积分. 先作定性分析, 令 $v=\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi$, 方程 (8.1.41d) 等价于一阶方程组

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=v;\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\alpha}{\beta}v-\frac{1}{2\beta}(u^2-2cu-2h) \tag{8.1.42a}$$

二组平衡点为 $(u,v)=(u_1,0)$ 和 $(u,v)=(u_2,0)$, 其中 $u_1$ 和 $u_2$ 是二次方程

$$u^2-2cu-2h=0 \tag{8.1.42b}$$

的二个根, 即 $u_1=c+\sqrt{c^2+2h}$ 和 $u_2=c-\sqrt{c^2+2h}$.

设在平衡点 $(u,v)=(u_1,0)$ 附近, 解的变化为 $(u,v)=(u_1+\Delta u,\Delta v)$, 则由方程 (8.1.42a)

$$\frac{\mathrm{d}\Delta u}{\mathrm{d}\xi}=\Delta v;\ \frac{\mathrm{d}\Delta v}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\alpha}{\beta}\Delta v-\frac{1}{\beta}(u_1-c)\Delta u \tag{8.1.42c}$$

或者写成矩阵的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{\beta}(u_1-c) & \dfrac{\alpha}{\beta}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix} \tag{8.1.42d}$$

系数矩阵的特征值 $\lambda$ 满足

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -\dfrac{1}{\beta}(u_1-c) & \dfrac{\alpha}{\beta}-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{8.1.43a}$$

故特征值满足方程

$$\lambda^2-\frac{\alpha}{\beta}\lambda+\frac{1}{\beta}\sqrt{c^2+2h}=0 \tag{8.1.43b}$$

容易求得二个特征值为

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{4}{\beta}\sqrt{c^2+2h}}\right) \tag{8.1.43c}$$

因此平衡点 $(u,v)=(u_1,0)$ 的特性是: ① 如果 $\alpha^2>4\beta\sqrt{c^2+2h}$, $\lambda_{1,2}$ 为二个正根, 因而平衡点 $(u,v)=(u_1,0)$ 是不稳定结点; ② 如果 $\alpha^2<4\beta\sqrt{c^2+2h}$, $\lambda_{1,2}$ 为一对共轭复根且实部大于零, 因而平衡点 $(u,v)=(u_1,0)$ 是不稳定焦点.

对平衡点 $(u,v)=(u_2,0)$, 同样可以得到

$$\lambda^2-\frac{\alpha}{\beta}\lambda-\frac{1}{\beta}\sqrt{c^2+2h}=0 \tag{8.1.44a}$$

故特征值

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{4}{\beta}\sqrt{c^2+2h}}\right) \tag{8.1.44b}$$

为二个不等实根且符号相反, 故平衡点 $(u,v)=(u_2,0)$ 是鞍点.

因此, 仿照 8.1.1 小节关于 Burgers 方程的平衡点分析, 方程 (8.1.41d) 的解应该是

(1) 当 $\alpha^2>4\beta\sqrt{c^2+2h}$ 时, 连接不稳定结点 $(u,v)=(u_1,0)$ 与鞍点 $(u,v)=(u_2,0)$ 的曲线 (如图 8.1.7);

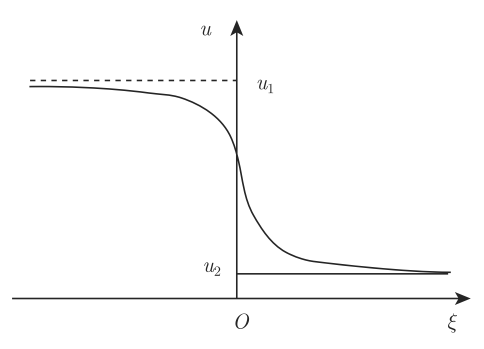



图 8.1.7　连接不稳定结点 $(u,v)=(u_1,0)$ 与鞍点 $(u,v)=(u_2,0)$ 的曲线

(2) 当 $\alpha^2<4\beta\sqrt{c^2+2h}$ 时, 连接不稳定焦点 $(u,v)=(u_1,0)$ 与鞍点 $(u,v)=(u_2,0)$ 的曲线 (如图 8.1.8). 特别要注意的是, 在不稳定焦点 $(u,v)=(u_1,0)$ 附近, 由于方程 (8.1.43c) 的 $\lambda_{1,2}$ 存在虚部, 即 $\Delta u\sim\exp[\mathrm{iIm}(\lambda_{1,2})]$, 故在焦点附近, 方程 (8.1.41d) 的解应该具有衰减振荡特征, 如图 8.1.8 中的 $\xi<0$ 的情况.

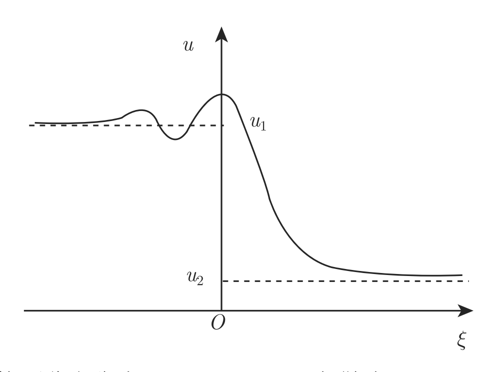



图 8.1.8　连接不稳定焦点 $(u,v)=(u_1,0)$ 与鞍点 $(u,v)=(u_2,0)$ 的曲线

根据以上分析, 设方程 (8.1.41d) 的解具有以下形式

$$u(\xi)=u_1+\tilde{u}(\xi) \tag{8.1.45a}$$

其中 $u_1 = c + \sqrt{c^2 + 2h}$, 代入方程 (8.1.41d) 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{2\beta}\tilde{u}^2(\xi) + \frac{\sqrt{c^2+2h}}{\beta}\tilde{u}(\xi) = 0 \tag{8.1.45b}$$

(1) 当 $\alpha^2 > 4\beta\sqrt{c^2+2h}$ 时, 根据图 8.1.7, 可以设方程 (8.1.45b) 的解为

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{B}{[1 + \mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)}]^2} \tag{8.1.46a}$$

显然, 为了满足 $\lim\limits_{\xi\to-\infty} u(\xi) = u_1$ 或者 $\lim\limits_{\xi\to-\infty} \tilde{u}(\xi) = 0$, 要求 $a < 0$; 为了满足 $\lim\limits_{\xi\to\infty} u(\xi) = u_2$, 要求 $u_1 + B = u_2$, 即 $B = -2\sqrt{c^2+2h}$. 把上式代入方程 (8.1.45b) 得到

$$\begin{aligned}&\left(\frac{B}{2\beta} + \frac{\sqrt{c^2+2h}}{\beta}\right) - 2\left(a^2 - \frac{\alpha}{\beta}a - \frac{\sqrt{c^2+2h}}{\beta}\right)\mathrm{e}^{a(\xi-\xi_0)} \\ &\quad +2\left(2a^2 + \frac{\alpha}{\beta}a + \frac{\sqrt{c^2+2h}}{2\beta}\right)\mathrm{e}^{2a(\xi-\xi_0)} = 0\end{aligned} \tag{8.1.46b}$$

上式恒成立的条件是

$$\frac{B}{2\beta} + \frac{\sqrt{c^2+2h}}{\beta} = 0 \tag{8.1.47a}$$

$$a^2 - \frac{\alpha}{\beta}a - \frac{\sqrt{c^2+2h}}{\beta} = 0 \tag{8.1.47b}$$

$$a^2 + \frac{\alpha}{2\beta}a + \frac{\sqrt{c^2+2h}}{4\beta} = 0 \tag{8.1.47c}$$

由方程 (8.1.47b) 和式 (8.1.47c) 消去 $a^2$ 和 $a$ 分别得到

$$a = -\frac{5\sqrt{c^2+2h}}{6\alpha};\ a^2 = \frac{\sqrt{c^2+2h}}{6\beta} \tag{8.1.48a}$$

故得到

$$a = -\frac{\alpha}{5\beta};\ B = -\frac{12\alpha^2}{25\beta};\ \sqrt{c^2+2h} = \frac{6\alpha^2}{25\beta} \tag{8.1.48b}$$

代入式 (8.1.46a) 和 (8.1.45a) 得到 KdV-Burgers 方程 (8.1.41a) 的冲击波解

$$\begin{aligned}u(\xi) &= u_1 - \frac{3\alpha^2}{25\beta}\left\{1 + \exp\left[-\frac{\alpha}{5\beta}(\xi-\xi_0)\right]\right\}^{-2} \\ &= u_1 - \frac{3\alpha^2}{25\beta}\left\{1 + \tanh\left[-\frac{\alpha}{10\beta}(\xi-\xi_0)\right]\right\}^{2}\end{aligned} \tag{8.1.48c}$$

由式 (8.1.48b), 显然 $\alpha^2 = \dfrac{25\beta}{6}\sqrt{c^2+2h} > 4\beta\sqrt{c^2+2h}$ 条件满足;

(2) 当 $\alpha^2 < 4\beta\sqrt{c^2+2h}$ 时, 根据图 8.1.8, 当 $\xi > 0$ 时 (即图 8.1.8 的右半部分), 解类似于孤波. 令解为

$$u(\xi) = u_2 + \tilde{u} \tag{8.1.49a}$$

其中 $u_2 = c - \sqrt{c^2+2h}$, 代入方程 (8.1.41d)

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{2\beta}\tilde{u}^2 - \frac{\sqrt{c^2+2h}}{\beta}\tilde{u} = 0 \tag{8.1.49b}$$

在右半部分 $(\xi > 0)$ 取孤波形式的解

$$\tilde{u}(\xi) = A\mathrm{sech}^2(C\xi) = 4A(\mathrm{e}^{C\xi} + \mathrm{e}^{-C\xi})^{-2} \tag{8.1.49c}$$

其中 $A$ 和 $C$ 待定. 把上式代入方程 (8.1.41d)

$$\begin{aligned}&\left(\frac{8A}{\beta} - \frac{8\sqrt{c^2+2h}}{\beta} - 64C^2\right) + \left(16C^2 + \frac{8\alpha C}{\beta} - \frac{4\sqrt{c^2+2h}}{\beta}\right)\mathrm{e}^{2C\xi}\\ &\quad + \left(16C^2 - \frac{8\alpha C}{\beta} - \frac{4\sqrt{c^2+2h}}{\beta}\right)\mathrm{e}^{-2C\xi} = 0\end{aligned} \tag{8.1.49d}$$

上式恒成立的条件是

$$\frac{8A}{\beta} - \frac{8\sqrt{c^2+2h}}{\beta} - 64C^2 = 0 \tag{8.1.50a}$$

$$16C^2 + \frac{8\alpha C}{\beta} - \frac{4\sqrt{c^2+2h}}{\beta} = 0 \tag{8.1.50b}$$

$$16C^2 - \frac{8\alpha C}{\beta} - \frac{4\sqrt{c^2+2h}}{\beta} = 0 \tag{8.1.50c}$$

方程 (8.1.50b) 与 (8.1.50c) 相减得到 $C = 0$, 不符合孤波的要求; 方程 (8.1.50b) 与 (8.1.50c) 相加得到

$$C^2 = \frac{\sqrt{c^2+2h}}{4\beta} \tag{8.1.51a}$$

代入方程 (8.1.50a) 得到

$$A = 3\sqrt{c^2+2h} \tag{8.1.51b}$$

以上二式代入式 (8.1.49c) 得到孤波解为

$$\tilde{u}(\xi) = 3\sqrt{c^2+2h}\cdot\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+2h}}{4\beta}}\xi\right) \tag{8.1.51c}$$

注意到 $u_1 = c + \sqrt{c^2 + 2h}$ 和 $u_2 = c - \sqrt{c^2 + 2h}$, 上式可以写成

$$u(\xi) = u_2 + \frac{3}{2}(u_1 - u_2) \cdot \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{u_1 - u_2}{8\beta}}\xi\right), \ (\xi > 0) \tag{8.1.51d}$$

当 $\xi < 0$ 时 (即图 8.1.8 的左半部分), 根据图 8.1.8, 解类似于衰减振荡, 忽略方程 (8.1.45b) 的非线性小项 (在平衡点 $u_1$ 附近, $\tilde{u}(\xi)$ 是小项, 故非线性项 $\tilde{u}^2(\xi)$ 是高阶小项)

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\sqrt{c^2 + 2h}}{\beta}\tilde{u}(\xi) = 0 \tag{8.1.52a}$$

上式的衰减振荡解为 (注意 $\alpha^2 < 4\beta\sqrt{c^2 + 2h}$)

$$\tilde{u}(\xi) = A_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{2\beta}\xi\right) \cos\left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{c^2 + 2h}}{\beta} - \frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right)}\xi\right] \tag{8.1.25b}$$

利用 $u_1 = c + \sqrt{c^2 + 2h}$ 和 $u_2 = c - \sqrt{c^2 + 2h}$, 上式可以写成

$$u(\xi) = u_1 + A_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{2\beta}\xi\right) \cos\left[\sqrt{\left(\frac{u_1 - u_2}{2\beta} - \frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right)}\xi\right], \ (\xi < 0) \tag{8.1.52c}$$

其中振幅 $A_0$ 由 $\xi = 0$ 的连接条件得到, 即 $u(\xi)|_{\xi=0-} = u(\xi)|_{\xi=0+}$, 由方程 (8.1.51d) 和 (8.1.52c)

$$u_1 + A_0 = u_2 + \frac{3}{2}(u_1 - u_2) \tag{8.1.53a}$$

即

$$A_0 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \tag{8.1.53b}$$

最后, 我们得到当 $\alpha^2 < 4\beta\sqrt{c^2 + 2h}$ 时, KdV-Burgers 方程 (8.1.41a) 的另一个冲击波解

$$u(\xi) = \begin{cases} u_1 + \dfrac{1}{2}(u_1 - u_2)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2\beta}\xi} \cos\left[\sqrt{\left(\dfrac{u_1 - u_2}{2\beta} - \dfrac{\alpha^2}{4\beta^2}\right)}\xi\right], & (\xi < 0) \\ u_2 + \dfrac{3}{2}(u_1 - u_2) \cdot \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\dfrac{u_1 - u_2}{8\beta}}\xi\right), & (\xi > 0) \end{cases} \tag{8.1.53c}$$

## 8.2 Hopf-Cole 变换和 Hirota 方法

自变量变换或函数变换是求解偏微分方程的基本方法. 如在 1.1.1 小节中我们利用自变量变换式 (1.1.8b) 把方程 (1.1.8a) 变成了较简单的形式 (1.1.8c), 从而得到

了包含任意函数的解式 (1.1.9a). Fourier 积分 (2.6.3a) 实质上可看作对方程 (2.6.2a) 同时作自变量变换 ($x \to \lambda$) 和函数变换 ($u \to U$). 对线性微分方程, 不论是自变量变换, 还是函数变换, 一般都是线性变换. 但通过线性变换不可能把非线性偏微分方程简单化. 只有通过非线性变换才能实现. 本节介绍二种特殊的变换方法, 即 Hopf-Cole 变换和 Hirota 方法.

### 8.2.1　Burgers 方程的 Hopf-Cole 变换

为了方便, 重写 Burgers 方程如下

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{8.2.1a}$$

显然 Burgers 方程是在线性扩散方程的基础上增加了一项非线性项, 因此希望通过非线性变换与线性扩散方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \tag{8.2.1b}$$

联系起来. 为此, 令

$$u=\frac{\partial w}{\partial x} \tag{8.2.1c}$$

代入方程 (8.2.1a) 并积分一次得到 (令积分常数为零)

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{8.2.1d}$$

因为我们寻求形式 $w \to 0$(当 $x \to \mp\infty$) 的解, 故取积分常数为零. 进一步设非线性变换为

$$v=f(w) \tag{8.2.2a}$$

为了寻找恰当的非线性函数 $f(w)$, 上式代入方程 (8.2.1b) 得到

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\alpha f}{f'}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{8.2.2b}$$

对照方程 (8.2.1d), 只要取

$$\alpha\frac{f''}{f}=-\frac{1}{2} \tag{8.2.2c}$$

上式的解为

$$f(w)=a+b\exp\left(-\frac{w}{2\alpha}\right) \tag{8.2.2d}$$

其中 $a$ 和 $b$ 为积分常数, 最简单的情况为 $a=0$ 和 $b=1$. 因而得到

$$w=-2\alpha\ln f=-2\alpha\ln v \tag{8.2.3a}$$

因此在非线性变换下

$$u = -2\alpha \frac{\partial \ln v}{\partial x} \tag{8.2.3b}$$

Burgers 方程 (8.2.1a) 变成线性扩散方程 (8.2.1b). 上式称为**Hopf-Cole 变换**. 因此如果知道线性扩散方程 (8.2.1b) 的一个解, 通过变换式 (8.2.3b) 就可构成 Burgers 方程 (8.2.1a) 的解.

**例 8.2.1** 已知扩散方程 (8.2.1b) 的行波解

$$v(x,t) = 1 + \exp[k(x-ct)],\ (k=-c/\alpha) \tag{8.2.4a}$$

代入变换式 (8.2.3b) 得到 Burgers 方程的一个冲击波解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -2\alpha \frac{\partial}{\partial x}\ln\{1+\exp[k(x-ct)]\} \\ &= c\left(1-\tanh\frac{c}{2\alpha}\xi\right) \end{aligned} \tag{8.2.4b}$$

显然上式与式 (8.1.9a) 一致, 只要取 $u_1 - u_2 = 2c$ 和 $u_1 + u_2 = 2c$ 即 $u_1 = 2c$ 和 $u_2 = 0$.

**例 8.2.2** 已知扩散方程 (8.2.1b) 的行波解

$$v(x,t) = 1 + \sum_{j=1}^{N} a_j \exp\left[k_j(x-c_jt)\right],\ (k_j = -c_j/\alpha) \tag{8.2.5a}$$

其中 $a_j$ 和 $c_j$ 为常数, 代入变换式 (8.2.3b) 得到 Burgers 方程的一个解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -2\alpha \frac{\partial}{\partial x}\ln\left\{1+\sum_{j=1}^{N} a_j\exp[k_j(x-c_jt)]\right\} \\ &= -2\alpha \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_jk_j\exp[k_j(x-c_jt)]}{1+\displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_j\exp[k_j(x-c_jt)]} \end{aligned} \tag{8.2.5b}$$

**例 8.2.3** 已知扩散方程 (8.2.1b) 的一个解 $(t>0)$

$$v(x,t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) \tag{8.2.6a}$$

代入变换式 (8.2.3b) 得到 Burgers 方程的一个解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -2\alpha \frac{\partial}{\partial x}\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{\alpha t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha t}}\left(\frac{x}{t}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)\left[1+\frac{1}{\sqrt{\alpha t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)\right]^{-1} \end{aligned} \tag{8.2.6b}$$

有趣的是: 上式描述单个的 **$N$型激波**(象英文字母 $N$), 可以用来分析常见的非线性现象, 即**声爆**(sonic boom). 简单的机理是: 飞行器在空中以超音速飞行时机首压缩空气形成 $N$ 型的激波的正相部分, 而机尾撕裂空气形成 $N$ 型的激波的负相部分, $N$ 型激波传播到地面就形成声爆. 图 8.2.1 给出了二个固定 $t$, $u(x,t)\sim x$ 的图形, 图中取 $\alpha=5\times10^{-13}$(由实际的声学数据计算), $y$ 轴 $u$ 已经作了归一化处理.

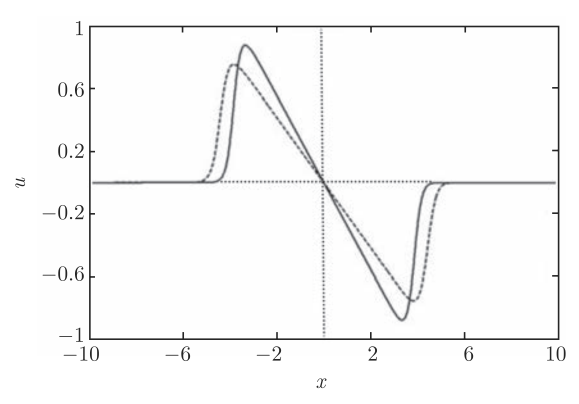



图 8.2.1　$N$ 形激波, 实线 $t=t_1=60$ 虚线 $t=t_2=80$

注意: 这里的变量 $t$ 和 $x$ 分别理解为方程 (8.1.5c) 的 $X$ 和 $\tau$, 则图 8.2.1 的 $N$ 型激波实际上在空间传播.

可见, 由于非线性项的存在, Burgers 方程的解十分丰富, 除上节介绍的行波解外, 还可以找到各种形式的解. 这些 "数学" 形式的解有无物理意义, 应该由具体的物理问题决定. 下面介绍一个非线性声学中出现的实际问题.

**Burgers 方程初值问题**　考虑声学中的非线性耗散型 Burgers 方程 (8.1.5c) 的初值问题 (注意: 貌似边值问题, 实际上是关于变量 $x$ 的初值问题)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\beta}{c_0^2}v\frac{\partial v}{\partial\tau}=\frac{b}{2\rho_0c_0^3}\frac{\partial^2v}{\partial\tau^2},\ x\in(0,\infty),\ \tau\in(-\infty,\infty)\\&v(x,\tau)|_{x=0}=v_0\sin(\omega\tau),\ \tau\in(-\infty,\infty)\end{aligned}\tag{8.2.7a}$$

其中 $\tau=t-x/c_0$, $\omega$ 是圆频率, 上式中的边界条件表示在 $x=0$ 处存在一个强声源, $v(x,t)$ 为质点位移. 为了讨论方便, 对方程 (8.2.7a) 进行无量纲化处理, 得到 Burgers 方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}-\varPhi\frac{\partial\varPhi}{\partial y}=\varGamma^{-1}\frac{\partial^2\varPhi}{\partial y^2},\ \sigma>0,\ y\in(-\infty,\infty)\\&\varPhi(\sigma,y)|_{\sigma=0}=v_0\sin y,\ y\in(-\infty,\infty)\end{aligned}\tag{8.2.7b}$$

其中函数变化为 $\varPhi=v/v_0$, 自变量变换为 $\sigma\equiv x\omega\beta v_0/c_0^2$ 和 $y=\omega\tau$, 以及参数

$\varGamma=2\rho_0\beta v_0c_0/b\omega$. 作 Hopf-Cole 变换 (注意: 关于变量 $y$ 求偏导数)

$$\varPhi=\frac{2}{\varGamma}\frac{\partial}{\partial y}\ln\psi \tag{8.2.7c}$$

方程 (8.2.7b) 化成标准的线性扩散方程的初值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}=\varGamma^{-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},\ \sigma>0,\ y\in(-\infty,\infty)\\&\psi(\sigma,y)|_{\sigma=0}=\psi_0(y),\ y\in(-\infty,\infty)\end{aligned} \tag{8.2.8a}$$

其中 $\psi_0(y)$ 待定. 由式 (1.4.4a) 和 (1.4.4b) 得到上式的解

$$\psi(\sigma,y)=\sqrt{\frac{\varGamma}{4\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(s)\exp\left[-\frac{\varGamma(y-s)^2}{4\sigma}\right]\mathrm{d}s \tag{8.2.8b}$$

下面由 $\varPhi(0,\tau)=\sin y$ 求初值条件 $\psi(\sigma,y)|_{\sigma=0}=\psi_0(y)$, 过程如下: 由式 (8.2.7c)

$$\psi(\sigma,y)=\exp\left[\frac{\varGamma}{2}\int_{-\infty}^{y}\varPhi(\sigma,\eta)\mathrm{d}\eta\right] \tag{8.2.9a}$$

假定当 $\tau<0$ 时, $v(x,\tau)=0$, 即 $\varPhi(\sigma,y)=0$, 上式给出

$$\begin{aligned}\psi_0(y)=\psi(0,y)&=\exp\left[\frac{\varGamma}{2}\int_{-\infty}^{y}\varPhi(0,\eta)\mathrm{d}\eta\right]\\&=\begin{cases}\exp\left[\dfrac{\varGamma}{2}(1-\cos y)\right], & y>0\\ 1, & y<0\end{cases}\end{aligned} \tag{8.2.9b}$$

上式代入式 (8.2.8b) 得到

$$\psi(\sigma,y)=\psi_1(\sigma,y)+\psi_2(\sigma,y) \tag{8.2.10a}$$

第一个积分为

$$\begin{aligned}\psi_1(\sigma,y)&\equiv\sqrt{\frac{\varGamma}{4\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left[-\frac{\varGamma(y-s)^2}{4\sigma}\right]\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{y/\delta}^{\infty}\exp(-s^2)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{8.2.10b}$$

式中 $\delta\equiv2\sqrt{\sigma/\Gamma}$; 第二个积分为

$$\begin{aligned}\psi_2(\sigma,y)&\equiv\sqrt{\frac{\varGamma}{4\pi\sigma}}\int_{0}^{\infty}\exp\left[\frac{\varGamma}{2}(1-\cos s)-\frac{\varGamma(y-s)^2}{4\sigma}\right]\mathrm{d}s\\&=\exp\left(\frac{\varGamma}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{y/\delta}\exp\left[-\frac{\varGamma}{2}\cos(\delta q-y)-q^2\right]\mathrm{d}q\end{aligned} \tag{8.2.10c}$$

或者改写成

$$\psi_2(\sigma,y)=\exp\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\Gamma}{2}\cos(\delta q-y)-q^2\right]\mathrm{d}q \\ -\exp\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{y/\delta}^{\infty}\exp\left[-\frac{\Gamma}{2}\cos(\delta q-y)-q^2\right]\mathrm{d}q \tag{8.2.10d}$$

当时间足够长, $t$ 很大时, 由于 $y/\delta=\omega(t-x/c_0)/\delta\approx\omega t/\delta$, 故 $y/\delta$ 也很大. 因此, 积分 $\psi_1(\sigma,y)$ 以及 $\psi_2(\sigma,y)$ 中的第二个积分趋向零 (称为瞬态项). 时间足够长后 $\psi(\sigma,y)$ 仅留下稳态项

$$\psi(\sigma,y)\approx\exp\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\Gamma}{2}\cos(\delta q-y)-q^2\right]\mathrm{d}q \tag{8.2.11a}$$

利用展开关系

$$\exp\left[-\frac{\Gamma}{2}\cos(\delta q-y)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n I_n\left(\frac{\Gamma}{2}\right)(-1)^n\cos[n(\delta q-y)] \tag{8.2.11b}$$

其中 $\varepsilon_0=1$ 和 $\varepsilon_n=2$, $(n\geqslant 1)$, $I_n$ 是 $n$ 阶虚宗量 Bessel 函数. 上式代入方程 (8.2.11a) 得到

$$\psi(\sigma,y)\approx\exp\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-1)^n I_n\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\exp\left(-n^2\frac{\sigma}{\Gamma}\right)\cos(ny) \tag{8.2.12a}$$

得到上式, 利用了积分关系

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(n\delta q)\exp(-q^2)\mathrm{d}q=\exp\left(-\frac{1}{4}n^2\delta^2\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(n\delta q)\exp(-q^2)\mathrm{d}q=0 \tag{8.2.12b}$$

把式 (8.2.12a) 代入式 (8.2.7c) 得到 Burgers 方程 (8.2.7a) 的严格解

$$v(x,\tau)\approx\frac{4v_0}{\Gamma}\cdot\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n+1}I_n(\Gamma/2)\exp(-n^2\alpha x)\sin(n\omega\tau)}{\displaystyle I_0(\Gamma/2)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(\Gamma/2)\exp(-n^2\alpha x)\cos(n\omega\tau)} \tag{8.2.12c}$$

上式进一步讨论可以由数值计算完成. 数值计算表明: 在耗散的非线性的介质中, 声波的传播大致可分以下几个区域: ① 近场区 ($\sigma\ll 1$), 振荡近似为正弦变化, 如图 8.2.2(a); ② 随着 $\sigma$ 增加, 波形开始畸变, 直至冲击波的形成, 然后波形完全变成锯齿波, 如图 8.2.2(b) 和 (c); ③ 随着 $\sigma$ 进一步增加, 冲击波开始衰减, 并逐步弥散,

最后达到声饱和状态 (此时的冲击波也称为老龄期冲击波), 如图 8.2.2(d). 注意: ① 由于耗散, 图 8.2.2(c) 中冲击波波形不会是严格的锯齿形; ② 图 8.2.2 仅画出一系列波形的一个, 而图 8.2.1 中的 $N$ 型激波只有一个波形.

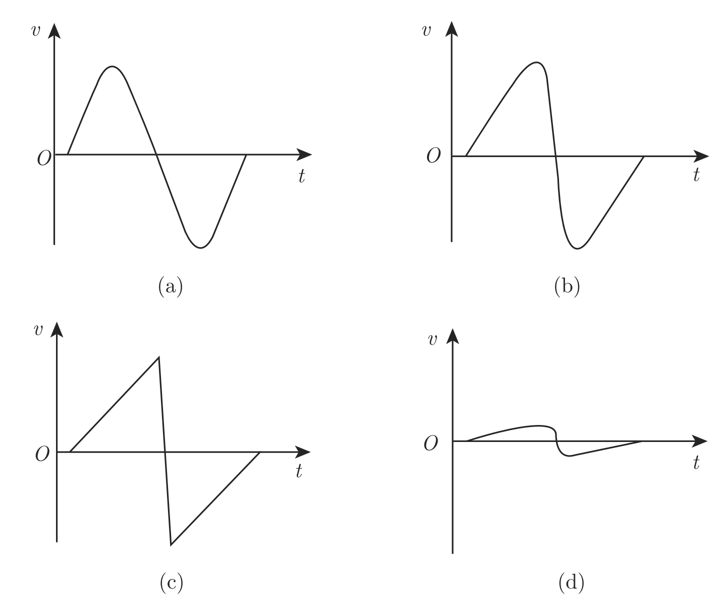



图 8.2.2 冲击波随传播距离增加的演化过程: (a) 声源处; (b) 波形畸变; (c) 冲击波形成锯齿波; (d) 声饱和, 老龄冲击波

### 8.2.2 KdV 方程的广义 Hopf-Cole 变换

重写 KdV 方程如下

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.13a}$$

比较 KdV 方程与 Burgers 方程, 前者仅比后者高一阶导数, 理应存在类似的 Hopf-Cole 变换使 KdV 方程线性化. 事实上, 令

$$u=\frac{\partial w}{\partial x};\ w=-2\frac{\partial \ln v}{\partial x} \tag{8.2.13b}$$

即**广义 Hopf-Cole 变换**

$$u=-2\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2} \tag{8.2.13c}$$

上式的导出过程将在 8.2.4 小节给出. 把方程 (8.2.13b) 的第一式代入方程 (8.2.13a) 并且积分一次 (令积分常数为零)

$$\frac{\partial w}{\partial t}-3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.14a}$$

进一步把方程 (8.2.13b) 的第二式代入上式

$$\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x \partial t} - 6\left(\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^4 \ln v}{\partial x^4} = 0 \tag{8.2.14b}$$

上式微分展开后, 两边乘 $v^2$ 得到

$$v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) - \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) + 3\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right] = 0 \tag{8.2.14c}$$

上式尽管仍然是非线性的, 而且比原方程更复杂, 但有一个特点: 方程的每一项中未知函数或它的导数均出现二次, 因此称为 KdV 方程的**双线性形式**.

尽管方程 (8.2.14c) 比方程 (8.2.13a) 更复杂, 但是如果取

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \tag{8.2.15a}$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \tag{8.2.15b}$$

方程 (8.2.14c) 同样能满足 (注意: 反之不然!). 方程 (8.2.15b) 可写成

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-1}\right] = 0 \tag{8.2.16a}$$

即

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-1} = 常数(-\eta) \tag{8.2.16b}$$

故

$$\eta\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{8.2.16c}$$

因此, 如果函数 $v$ 同时满足二个线性方程 (8.2.15a) 和 (8.2.16c), 通过广义 Hopf-Cole 变换 (8.2.13c) 形成的函数 $u$ 一定是 KdV 方程的一个解. 但反之结论不一定成立, 即这一条件仅仅是充分条件.

**例 8.2.4**　同时满足方程 (8.2.15a) 和 (8.2.16c) 的一个解为

$$v(x,t) = 1 + \exp[2(kx - \omega t)],\ (\omega = 4k^3,\ \eta = -2k) \tag{8.2.17a}$$

由方程 (8.2.13b)

$$\begin{aligned} w &= -2\frac{\partial}{\partial x}\ln\{1 + \exp[2(kx - \omega t)]\} \\ &= -2 \cdot \exp[2(kx - \omega t)]\text{sech}(kx - \omega t) \end{aligned} \tag{8.2.17b}$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial x} = -2k^2\mathrm{sech}^2 k(x - 4k^2 t) \tag{8.2.17c}$$

与式 (8.1.13d) 比较, 相当于取 $c = 4k^2$.

直接求解方程 (8.2.14c) 能给出 KdV 方程更丰富的解. 为此引进形式参数 $\varepsilon$, 作级数展开

$$v(x,t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(x,t) \tag{8.2.18a}$$

如果上述级数是截断的, 即 $N$ 项后的 $v_i = 0$, $(i \geqslant N+1)$, 只要令 $\varepsilon = 1$, 就求得了 (8.2.14c) 的解. 上式代入方程 (8.2.14c) 并按 $\varepsilon$ 的幂次分类, 得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right) = 0 \tag{8.2.18b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}\right) = &\left(-v_1\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right)\\ &-3\left[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right]\end{aligned} \tag{8.2.18c}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3}\right) = &\left(-v_1\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}\right)\\ &-3\left(2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3} - \frac{\partial v_2}{\partial x}\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right)\end{aligned} \tag{8.2.18d}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

取方程 (8.2.18b) 的解为

$$v_1(x,t) = a_1 \exp[2(k_1 x - \omega_1 t)] + a_2 \exp[2(k_2 x - \omega_2 t)] \tag{8.2.19a}$$

其中 $\omega_1 = 4k_1^3$ 和 $\omega_2 = 4k_2^3$, $(a_1, a_2)$ 是表示振幅的常数. 上式代入方程 (8.2.18c), 右边第一项为零, 于是得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}\right) = 48k_1k_2(k_1 - k_2)^2 a_1 a_2 \mathrm{e}^{2(k_1+k_2)x-(\omega_1+\omega_2)t} \tag{8.2.19b}$$

不难求得上式的一个特解

$$v_2(x,t) = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 a_1 a_2 \exp[2(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t] \tag{8.2.19c}$$

把上式和式 (8.2.19a) 代入方程 (8.2.18d), 经过繁复的数学运算, 可以得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3}\right) = 0 \tag{8.2.19d}$$

取上式的特解为 $v_3(x,t)=0$. 同理可得 $v_i=0,\ (i\geqslant 3)$. 因此级数式 (8.2.18a) 是截断的, 只要令 $\varepsilon=1$, 就求得了方程 (8.2.14c) 的一个解

$$v(x,t)=1+a_1\exp(2\vartheta_1)+a_2\exp(2\vartheta_2)+a_3\exp[2(\vartheta_1+\vartheta_2)] \tag{8.2.20a}$$

其中

$$a_3=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 a_1a_2,\ \vartheta_1=k_1x-\omega_1 t,\ \vartheta_2=k_2x-\omega_2 t \tag{8.2.20b}$$

由变换式 (8.2.13b)

$$w=-2\frac{\partial}{\partial x}\ln\{1+a_1\exp(2\vartheta_1)+a_2\exp(2\vartheta_2)+a_3\exp[2(\vartheta_1+\vartheta_2)]\} \tag{8.2.20c}$$

即

$$w=-4\frac{a_1k_1\mathrm{e}^{2\vartheta_1}+a_2k_2\mathrm{e}^{2\vartheta_2}+a_3(k_1+k_2)\mathrm{e}^{2(\vartheta_1+\vartheta_2)}}{1+a_1\mathrm{e}^{2\vartheta_1}+a_2\mathrm{e}^{2\vartheta_2}+a_3\mathrm{e}^{2(\vartheta_1+\vartheta_2)}} \tag{8.2.20d}$$

上式称为 KdV 方程的双 "孤波" 解, 如图 8.2.3. 图中取值为:$k_1=1,\ k_2=2,\ a_1=a_2=3$. 图 8.2.3 表明了三个时刻 $t=0$, $t=0.15$ 和 $t=0.5$, $u$ 与 $x$ 的关系. 初始时刻 ($t=0$), 只有一个 "孤波", $t>0$ 时一个 "孤波" 分裂成二个. 随着时间增长, 二个 "孤波" 彼此分开. 由于振幅大的 "孤波" 有较大的速度, 因此, 二个 "孤波" 分开距离随时间增加.

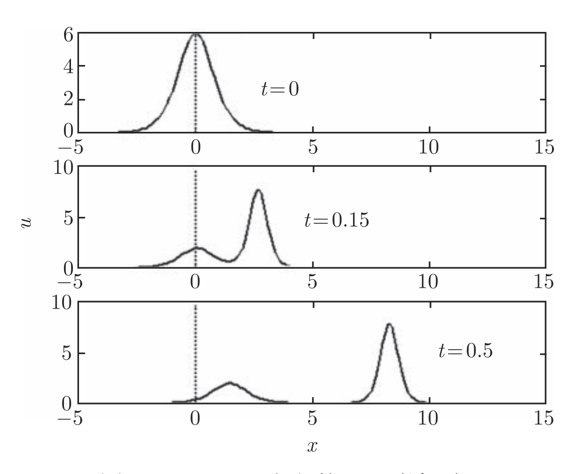



图 8.2.3　KdV 方程的双"孤波"解

注意: 对形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.21a}$$

的 KdV 方程, 广义 Hopf-Cole 变换取为

$$u=\beta\frac{\partial^2\ln v}{\partial x^2} \tag{8.2.21b}$$

### 8.2.3 KdV-Burgers 方程的广义 Hopf-Cole 变换

重写 KdV-Burgers 方程如下

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.22a}$$

上式的广义 Hopf-Cole 为

$$u=\frac{\partial w}{\partial x};\ w=-\frac{12}{5}\alpha\ln v+12\beta\frac{\partial\ln v}{\partial x} \tag{8.2.22b}$$

第一式代入方程 (8.2.22a) 并且积分一次 (令积分常数为零) 得到

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.22c}$$

方程 (8.2.22b) 的第二式代入上式, 整理后得到 KdV-Burgers 方程的双线性形式为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\alpha}{5}v-\beta v\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)\\&-3\beta^3\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]-\frac{\alpha}{5}\frac{\partial v}{\partial x}\left[\frac{\alpha}{5}\frac{\partial v}{\partial x}+\beta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=0\end{aligned} \tag{8.2.22d}$$

显然如果取 $v$ 同时满足

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.23a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.23b}$$

$$\frac{\alpha}{5}\frac{\partial v}{\partial x}+\beta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \tag{8.2.23c}$$

那么方程 (8.2.22a) 也能满足 (注意: 反之不然!). 对方程 (8.2.23a) 作与方程 (8.2.15b) 同样的处理得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\eta\frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.2.23d}$$

因此如果 $v$ 同时满足三个线性方程 (8.2.23b)~(8.2.23d), 通过广义 Hopf-Cole 变换式 (8.2.22b) 形成的函数 $u$ 一定是 KdV-Burgers 方程的一个解.

**例 8.2.5**　线性方程 (8.2.23b)~(8.2.23d) 的一个共同解为

$$v = 1 + \exp(kx - \omega t) \tag{8.2.24a}$$

且 $\eta = k = -\alpha/(5\beta)$ 和 $\omega = -\alpha k^2 + \beta k^3$. 代入方程 (8.2.22b) 得到

$$\begin{aligned} w =& -\frac{12\alpha}{5}\ln\left[1+\exp(kx-\omega t)\right] \\ & +6\beta k\exp\left[\frac{1}{2}(kx-\omega t)\right]\operatorname{sech}\left[\frac{1}{2}(kx-\omega t)\right] \end{aligned} \tag{8.2.24b}$$

以及

$$u = 2c - \frac{3\alpha^2}{25\beta}\left[1+\tanh\left(\frac{\alpha}{10\beta}\xi\right)\right]^2,\ (\xi = x - ct) \tag{8.2.24c}$$

其中相速度 $c \equiv \omega/k = -\alpha k + \beta k^2 = 6\alpha^2/(25\beta)$. 上式即为 KdV-Burgers 方程的一个冲击波解.

### 8.2.4　Hirota 方法

我们找到了 Burgers 方程、KdV 方程以及 KdV-Burgers 的 Hopf-Cole 变换或广义 Hopf-Cole 变换, 通过这些非线性变换, 把非线性方程化成容易求解的线性方程, 得到了这三个方程的更多解. 问题是, 对一般的非线性方程, 这样的非线性变换是否存在? 能否把原方程化为方程 (8.2.14c) 或 (8.2.22d) 这种双线性形式? 本节介绍 Hirota 方法, 其基本思想是: 在函数变换中同时引进两个未知函数, 然后通过选择其中一个函数或选择两个函数间某种关系使原非线性方程化成双线性形式求解.

为了运算方便, Hirota 引进双线性算子 (Bilinear operator)

$$D_t^m D_x^n(f\cdot g) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n f(x,t)g(x',t')|_{x'=x,\ t'=t} \tag{8.2.25a}$$

其中 $m$ 和 $n$ 是非负整数. 例如

$$\begin{aligned} D_t(f\cdot g) &\equiv D_t^1 D_x^0(f\cdot g) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right) f(x,t)g(x',t')|_{x'=x,\ t'=t} \\ &= g\frac{\partial f}{\partial t} - f\frac{\partial g}{\partial t} \end{aligned} \tag{8.2.25b}$$

$$\begin{aligned} D_x(f\cdot g) &\equiv D_t^0 D_x^1(f\cdot g) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) f(x,t)g(x',t')|_{x'=x,\ t'=t} \\ &= g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x} \end{aligned} \tag{8.2.25c}$$

$$\begin{aligned} D_x^2(f\cdot g) &\equiv D_t^0 D_x^2(f\cdot g) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 f(x,t)g(x',t')|_{x'=x,\ t'=t} \\ &= g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{8.2.25d}$$

$$
\begin{aligned}
D_x^3(f\cdot g) &\equiv D_t^0 D_x^3(f\cdot g)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^3 f(x,t)g(x',t')|_{x'=x,\ t'=t}\\
&= g\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\frac{\partial g}{\partial x}-f\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}
\end{aligned}
\tag{8.2.25e}
$$

$$
\begin{aligned}
D_tD_x(f\cdot g) &\equiv D_t^1 D_x^1(f\cdot g)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right) f(x,t)g(x',t')|_{x'=x,\ t'=t}\\
&= g\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial t}
\end{aligned}
\tag{8.2.25f}
$$

需要注意的是, 函数 $f$ 和 $g$ 不能随便交换次序, 例如由方程 (8.2.25b), 得到

$$D_t(f\cdot g)=-D_t(g\cdot f) \tag{8.2.26a}$$

显然有关系

$$D_t(f\cdot f)=0,\quad D_x(f\cdot f)=0,\quad D_x^3(f\cdot f)=0 \tag{8.2.26b}$$

$$D_x^2(f\cdot f)=2\left[f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right] \tag{8.2.26c}$$

$$D_tD_x(f\cdot f)=2\left(f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{8.2.26d}$$

以 KdV 方程 (8.2.13a) 或 (8.2.14a) 为例, 我们来阐明 Hirota 方法的基本过程. 引进二个未知函数 $g$ 和 $f$, 作函数变换

$$w(x,t)=\frac{g(x,t)}{f(x,t)} \tag{8.2.27a}$$

显然有

$$w_t=\left(\frac{g}{f}\right)_t=\frac{g_tf-gf_t}{f^2}=\frac{D_t(g\cdot f)}{f^2} \tag{8.2.27b}$$

$$w_x=\left(\frac{g}{f}\right)_x=\frac{g_xf-gf_x}{f^2}=\frac{D_x(g\cdot f)}{f^2} \tag{8.2.27c}$$

得到上两式, 已利用了方程 (8.2.25b) 和 (8.2.25c). 同样可得

$$w_{xx}=\left(\frac{g}{f}\right)_{xx}=\frac{D_x^2(g\cdot f)-2(\ln f)_{xx}gf}{f^2} \tag{8.2.28a}$$

$$w_{xxx}=\left(\frac{g}{f}\right)_{xxx}=\frac{D_x^3(g\cdot f)-6(\ln f)_{xx}D_x(g\cdot f)}{f^2} \tag{8.2.28b}$$

式 (8.2.28a) 中取 $g=f$ 时, 得到

$$2(\ln f)_{xx}=\frac{D_x^2(f\cdot f)}{f^2} \tag{8.2.28c}$$

以上各式代入方程 (8.2.14a) 并两边乘 $f^2$ 得到

$$\begin{aligned}D_t(g\cdot f)-3\left[\frac{D_x(g\cdot f)}{f}\right]^2+D_x^3(g\cdot f)\\-3\frac{D_x^2(f\cdot f)}{f^2}D_x(g\cdot f)=0\end{aligned} \tag{8.2.29a}$$

上式加和减项 $3\lambda D_x(g\cdot f)$(其中 $\lambda$ 为引进任意常数), 整理后化为

$$\begin{aligned}[D_t(g\cdot f)+3\lambda D_x(g\cdot f)+D_x^3(g\cdot f)]\\-3\frac{D_x(g\cdot f)}{f^2}[D_x(g\cdot f)+\lambda f^2+D_x^2(f\cdot f)]=0\end{aligned} \tag{8.2.29b}$$

由于 $g$ 和 $f$ 是未知函数, 可以要求 $g$ 和 $f$ 满足

$$\begin{aligned}(D_t+3\lambda D_x+D_x^3)(g\cdot f)=0\\(D_x^2+\lambda)(f\cdot f)+D_x(g\cdot f)=0\end{aligned} \tag{8.2.29c}$$

第二式中取 $\lambda=0$ 得到

$$D_x(g\cdot f)=-D_x^2(f\cdot f)=-2f^2(\ln f)_{xx} \tag{8.2.30a}$$

另一方面, 由式 (8.2.27c), 并且结合上式

$$\frac{D_x(g\cdot f)}{f^2}=\left(\frac{g}{f}\right)_x=-2(\ln f)_{xx}=-2\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\right)_x \tag{8.2.30b}$$

因此, 取 $g$ 和 $f$ 的关系

$$g=-2\frac{\partial f}{\partial x} \tag{8.2.30c}$$

即

$$w(x,t)=-2\frac{\partial \ln f}{\partial x} \tag{8.2.30d}$$

显然, 上式就是广义 Hopf-Cole 变换式 (8.2.13b)(函数 $f$ 用 $v$ 表示即可).

把式 (8.2.30c) 代入方程 (8.2.29c) 的第一式得到 (注意 $\lambda=0$)

$$(D_t+D_x^3)(f_x\cdot f)=0 \tag{8.2.31a}$$

利用关系

$$\begin{aligned} D_tD_x(f\cdot f)&=2D_t(f_x\cdot f)\\ D_x^4(f\cdot f)&=2D_x^3(f_x\cdot f)\end{aligned}\tag{8.2.31b}$$

方程 (8.2.31a) 简化为

$$D_x(D_t+D_x^3)(f\cdot f)=0\tag{8.2.31c}$$

上式就是我们求得的 KdV 方程的**双线性形式** 注意: 方程 (8.2.14c) 是在已知广义 Hopf-Cole 变换式 (8.2.13b) 的情况下导出的, 而方程 (8.2.31c) 是采用 Hirota 方法得到且同时得到了 Hopf-Cole 变换式 (8.2.30d).

与式 (8.2.18a) 类似, 引进形式参数 $\varepsilon$, 作级数展开

$$f=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i f_i\tag{8.2.32a}$$

代入方程 (8.2.31c) 并按 $\varepsilon$ 的幂次分类, 得到

$$\begin{aligned} D_x(D_t+D_x^3)(f_0\cdot f_0)&=0\\ D_x(D_t+D_x^3)(f_1\cdot f_0)&=0\\ 2D_x(D_t+D_x^3)(f_2\cdot f_0)&=-D_x(D_t+D_x^3)(f_1\cdot f_1)\\ D_x(D_t+D_x^3)(f_3\cdot f_0)&=-D_x(D_t+D_x^3)(f_2\cdot f_1)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\tag{8.2.32b}$$

显然方程 (8.2.32b) 的第一式仍是非线性的, 但 $f_0=$ 常数 是它的一个特解, 而其他方程都是线性的.

**例 8.2.6** 非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2|u|^2u=0\tag{8.2.33a}$$

注意: 对一般的 NLS 方程 (8.1.34a) 可通过线性变换

$$x\to\sqrt{\alpha}x;\quad u\to\sqrt{2\beta^{-1}}u\tag{8.2.33b}$$

化成方程 (8.2.33a) 形式. 作函数变换

$$u=\frac{g}{f}\tag{8.2.34a}$$

其中 $f$ 为实函数. 利用式 (8.2.27b)、(8.2.27c)、(8.2.28b) 和 (8.2.28c)

$$u_t=\frac{D_t(g\cdot f)}{f^2};\ u_{xx}=\frac{D_x^2(g\cdot f)-D_x^2(f\cdot f)g/f}{f^2}\tag{8.2.34a}$$

代入方程 (8.2.33a) 并且二边乘 $f^2$ 得到

$$[\mathrm{i}D_t(g\cdot f)+D_x^2(g\cdot f)]-\frac{g}{f}[D_x^2(f\cdot f)-2|g|^2]=0 \tag{8.2.34c}$$

由于 $g$ 和 $f$ 有一定的任意性, 故取方程 (8.2.33a) 的双线性形式为

$$\begin{aligned}&(\mathrm{i}D_t+D_x^2)(g\cdot f)=0\\&D_x^2(f\cdot f)-2|g|^2=0\end{aligned} \tag{8.2.34d}$$

## 8.3 逆散射方法和 Lax 理论

本节介绍利用一维 Schrödinger 方程的逆散射方法求解非线性演化方程的初值问题. 主要介绍逆散射方法解 KdV 方程的初值问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0,\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0\\ u(x,t)|_{t=0}=u(x,0),\ x\in(-\infty,\infty)\end{gathered} \tag{8.3.1}$$

本节的讨论都假定所求的解满足条件: 当 $x\to\pm\infty$ 时 $u(x,t)\to 0$. 我们首先介绍一维 Schrödinger 方程的逆散射问题, 然后介绍逆散射方法解 KdV 方程初值问题的基本思想; 8.3.3 小节介绍具体步骤和 KdV 方程初值问题的孤立子解; 最后, 介绍求解其他非线性方程初值问题的 Lax 理论.

### 8.3.1 一维 Schrödinger 方程的逆散射问题

考虑一维 Schrödinger 方程在无限空间的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+k^2\psi=u(x)\psi,\ x\in(-\infty,\infty) \tag{8.3.2a}$$

其中 $u(x)$ 为势函数, 假定为实函数且局域, 即满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|u(x)|\mathrm{d}x<\infty \tag{8.3.2b}$$

由于势函数的局域性, 当 $x\to\pm\infty$, 方程 (8.3.2a) 可近似成

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+k^2\psi=0,\ (x\to\pm\infty) \tag{8.3.2c}$$

分二种情况讨论:

(1) 连续谱 $k^2>0$, 这时本征函数的渐近性质由上式得到为

$$\psi(x,k)\sim a\exp(-\mathrm{i}kx)+b\exp(\mathrm{i}kx),\quad (x\to\pm\infty) \tag{8.3.3a}$$

(2) 离散谱 $k^2<0$, 令 $k=\pm\mathrm{i}\nu$, 本征函数的渐近性质为

$$\begin{aligned}&\psi(x,\mathrm{i}\nu)\sim\exp(-\nu x),\ (x\to+\infty)\\&\psi(x,-\mathrm{i}\nu)\sim\exp(\nu x),\ (x\to-\infty)\end{aligned}\tag{8.3.3b}$$

现在分析方程 (8.3.2a) 的解在 $x\to+\infty$ 处的渐近特征, 设基本解 $\phi(x,k)$ 为

$$\phi(x,k)=\exp(\mathrm{i}kx)+\int_x^{\infty}K(x,y)\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y\tag{8.3.4a}$$

其中 $K(x,y)$ 为待定函数, 并且规定 $y<x$ 时 $K(x,y)=0$. 显然根据上式定义的 $\phi(x,k)$ 有渐近特征

$$\begin{aligned}&\phi(x,k)\sim\exp(\mathrm{i}kx),\ (x\to+\infty)\\&\phi(x,\mathrm{i}\nu)\sim\exp(-\nu x),\ (x\to+\infty)\end{aligned}\tag{8.3.4b}$$

因 Schrödinger 方程中 $k$ 以 $k^2$ 出现, 因此方程 (8.3.4a) 中把 $k$ 改成 $-k$ 也是 (8.3.2a) 的解

$$\phi(x,-k)=\exp(-\mathrm{i}kx)+\int_x^{\infty}K(x,y)\exp(-\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y\tag{8.3.4c}$$

显然有

$$\begin{aligned}&\phi(x,-k)\sim\exp(-\mathrm{i}kx),\ (x\to+\infty)\\&\phi(x,-\mathrm{i}\nu)\sim\exp(\nu x),\ (x\to+\infty)\end{aligned}\tag{8.3.4d}$$

由 $\phi(x,k)$ 和 $\phi(x,-k)$ 的渐近式, 可知 $\phi(x,k)$ 和 $\phi(x,-k)$ 线性独立, 因此方程 (8.3.2a) 的通解为 $\phi(x,k)$ 和 $\phi(x,-k)$ 的线性组合

$$\psi(x,k)=\beta(k)\phi(x,k)+\alpha(k)\phi(x,-k)\tag{8.3.5a}$$

上式改写为

$$\frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}=\phi(x,-k)+\frac{\beta(k)}{\alpha(k)}\phi(x,k)\tag{8.3.5b}$$

利用方程 (8.3.4b) 和 (8.3.4d) 的第一式

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}&=\exp(-\mathrm{i}kx)+\frac{\beta(k)}{\alpha(k)}\exp(\mathrm{i}kx)\\&\equiv\exp(-\mathrm{i}kx)+b(k)\exp(\mathrm{i}kx)\end{aligned}\tag{8.3.5c}$$

显然上式第一项表示 $x=+\infty$ 处入射的单位振幅平面波, 第二项表示由于存在势 $u(x)$ 而引起反射的平面波, 因此 $b(k)$ 表示**反射系数**, 如图 8.3.1. 注意: 反射系数 $b(k)$ 由解在 $x\to+\infty$ 的渐近特征定义.

由方程 (8.3.3a) 且结合图 8.3.1 得到渐近特性

$$\psi(x,k) \sim a(k)\exp(-\mathrm{i}kx), (x \to -\infty) \tag{8.3.5d}$$

其中 $a(k)$ 即为**透射系数**. 注意: 透射系数 $a(k)$ 由解在 $x \to -\infty$ 的渐近特征定义.

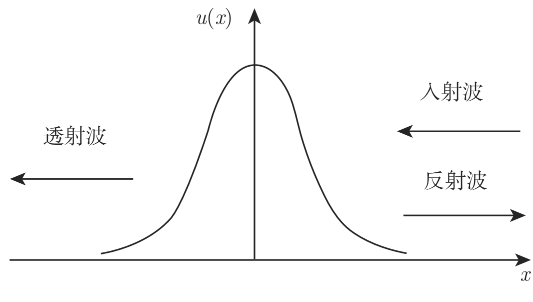



图 8.3.1　散射问题

在正散射问题中, 已知势 $u(x)$, 求透射系数 $a(k)$ 和反射系数 $b(k)$. 但本节我们感兴趣的是逆散射问题: 已知散射信息 $b(k)$ 或 $a(k)$, 求势 $u(x)$ 的分布. 如果存在 $k^2 < 0$ 的离散谱, 已知散射信息中还必须包括 $k = \pm\mathrm{i}\nu$ 的特征. 下面我们来导出相关的计算公式.

首先求 $K(x,y)$ 满足的方程, 因 $y < x$ 时 $K(x,y) = 0$, 方程 (8.3.4a) 可写成

$$\phi(x,k) = \exp(\mathrm{i}kx) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \tag{8.3.6a}$$

于是上式右边积分为 Fourier 积分, Fourier 逆变换为

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\phi(x,k) - \exp(\mathrm{i}kx)]\exp(-\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \tag{8.3.6b}$$

另一方面, 对式 (8.3.5b) 两边乘 $\exp(\mathrm{i}ky)$ 并对 $k$ 积分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,-k)\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}k \\ + \int_{-\infty}^{\infty} b(k)\phi(x,k)\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}k\end{aligned} \tag{8.3.7a}$$

把方程 (8.3.4a) 和 (8.3.4c) 代入上式并利用式 (8.3.6b), 得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}k = K(x,y) + B_c(x+y) \\ + \int_{x}^{\infty} K(x,z)B_c(z+y)\mathrm{d}z,\ \ (y > x)\end{aligned} \tag{8.3.7b}$$

其中

$$B_c(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k \tag{8.3.7c}$$

为反射系数 $b(k)$ 的 Fourier 变换, $b(k)$ 在物理中是可测量. 因此在逆散射问题中可认为 $B_c(x)$ 已知. 注意: 得到方程 (8.3.7b), 已利用了 Dirac Delta 函数的积分关系

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k \tag{8.3.7d}$$

因此为了得到 $K(x,y)$ 的方程, 关键是求方程 (8.3.7b) 左边的积分. 根据留数定理

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}k = \mathrm{i}\sum_{n=1}^{N} a_{-1}^{n} \tag{8.3.8a}$$

其中 $a_{-1}^{n}$ 是函数

$$f(k) \equiv \frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}\exp(\mathrm{i}ky) \tag{8.3.8b}$$

在上半平面 (当 $y>0$ 时) 或下半平面 (当 $y<0$ 时) 的极点处的留数, 函数 $f(k)$ 的极点即是 $\alpha(k)$ 的零点.

可证明下列两个性质 (证明略).

(1) $\alpha(k)$ 的零点是本征值问题 (8.3.2a) 的 $N$ 个离散本征值 $\mathrm{i}\nu_n$, $(n=1,2,\cdots,N)$. 在 $k=\mathrm{i}\nu_n$, $(n=1,2,\cdots,N)$ 点, $\psi(x,\mathrm{i}\nu_n)$ 和 $\phi(x,\mathrm{i}\nu_n)$ 线性相关, 即有

$$\psi(x,\mathrm{i}\nu_n) = c_n\phi(x,\mathrm{i}\nu_n) \tag{8.3.9a}$$

事实上, 由式 (8.3.4d), 因 $\phi(x,-\mathrm{i}\nu_n)\sim\exp(\nu_n x)$, $(x\to+\infty)$, 为了保证 $\psi(x,-\mathrm{i}\nu_n)$ 在无穷远处的有限性, 只有取方程 (8.3.5a) 中 $\alpha(\mathrm{i}\nu_n)=0$. 利用渐近特性式 (8.3.4d) 得到

$$\lim_{x\to+\infty}\psi(x,\mathrm{i}\nu_n) = c_n\exp(-\nu_n x) \tag{8.3.9b}$$

一般要求本征函数 $\psi(x,\mathrm{i}\nu_n)$ 归一化, 即要求

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2(x,\mathrm{i}\nu_n)\mathrm{d}x = 1 \tag{8.3.9c}$$

因此 $c_n$ 为离散本征值 $\mathrm{i}\nu_n$ 的本征函数 $\psi(x,\mathrm{i}\nu_n)$ 的归一化常数

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^2(x,\mathrm{i}\nu_n)\mathrm{d}x = \frac{1}{c_n^2} \tag{8.3.9d}$$

(2) $\alpha(k)$ 的所有零点 $k=\mathrm{i}\nu_n$, $(n=1,2,\cdots,N)$ 都是一阶的, 因而也是 $f(k)$ 的一阶极点, 且有关系

$$\left.\frac{\partial\alpha(k)}{\partial k}\right|_{k=\mathrm{i}\nu_n} = -\frac{\mathrm{i}}{c_n} \tag{8.3.10a}$$

因此

$$
\begin{aligned}
a_{-1}^{n} &= \frac{\psi(x,\mathrm{i}\nu_n)}{\partial\alpha(k)/\partial k|_{k=\mathrm{i}\nu_n}}\exp(-\nu_n y) \\
&= \mathrm{i}c_n^2\phi(x,\mathrm{i}\nu_n)\exp(-\nu_n y)
\end{aligned} \tag{8.3.10b}
$$

上式代入方程 (8.3.8a) 和 (8.3.7b) 得到

$$
\begin{aligned}
-\sum_{n=1}^{N} c_n^2\phi(x,\mathrm{i}\nu_n)\exp(-\nu_n y) &= K(x,y)+B_c(x+y) \\
&\quad+\int_x^{\infty} K(x,z)B_c(z+y)\mathrm{d}z,\ (y>x)
\end{aligned} \tag{8.3.10c}
$$

方程 (8.3.4a) 中取 $k=\mathrm{i}\nu_n$ 代入上式, 整理后得到

$$
K(x,y)+B(x+y)+\int_x^{\infty} K(x,z)B(z+y)\mathrm{d}z=0,\ (y>x) \tag{8.3.11a}
$$

其中

$$
B(x)=\sum_{n=1}^{N} c_n^2\exp(-\nu_n x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k \tag{8.3.11b}
$$

方程 (8.3.11a) 即为决定 $K(x,y)$ 的 Volterra 积分方程, 称为 GLM(Gelfand-Levitan-Marchenko) 积分方程.

假定已得到方程 (8.3.11a) 的解, 下面推导决定势函数 $u(x)$ 的方程. 首先要求

$$
\lim_{y\to\infty} K(x,y)=0,\quad \lim_{y\to\infty}\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}=0 \tag{8.3.12a}
$$

否则方程 (8.3.6a) 中的 Fourier 积分不存在. 方程 (8.3.4a) 两边对 $x$ 求导二次得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi(x,k)}{\partial x} &= \mathrm{i}k\exp(\mathrm{i}kx)-K(x,x)\exp(\mathrm{i}kx) \\
&\quad+\int_x^{\infty}\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{8.3.12b}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi(x,k)}{\partial x^2} &= -\left\{k^2+\mathrm{i}kK(x,x)+\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x}-\left[\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\right]_{y=x}\right\} \\
&\quad\times\exp(\mathrm{i}kx)+\int_x^{\infty}\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{8.3.12c}
$$

另一方面, 方程 (8.3.4a) 中积分分部积分二次, 并且利用式 (8.3.12a), 得到

$$
\phi(x,k)=\left[1-\frac{1}{\mathrm{i}k}K(x,x)\right]\exp(\mathrm{i}kx)-\frac{1}{\mathrm{i}k}\int_x^{\infty}\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \tag{8.3.13a}
$$

即

$$\phi(x,k)=\left\{1-\frac{1}{\mathrm{i}k}K(x,x)-\frac{1}{k^2}\left[\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right]_{y=x}\right\}\exp(\mathrm{i}kx) \\ -\frac{1}{k^2}\int_x^\infty\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial y^2}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \tag{8.3.13b}$$

于是, 由式 (8.3.12c) 和 (8.3.13b) 得到

$$\frac{\partial^2\phi(x,k)}{\partial x^2}+k^2\phi(x,k)=\int_x^\infty\left[\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial y^2}\right]\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \\ -\left\{\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x}+\left[\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right]_{y=x}\right\}\exp(\mathrm{i}kx) \tag{8.3.13c}$$

注意到求导关系

$$\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x}=\left[\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right]_{y=x} \tag{8.3.13d}$$

由方程 (8.3.2a), (8.3.4a) 和 (8.3.13c) 得到

$$-2\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x}\exp(\mathrm{i}kx)+\int_x^\infty\left[\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial y^2}\right]\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \\ =u(x)\left[\exp(\mathrm{i}kx)+\int_x^\infty K(x,y)\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y\right]$$

上式两边比较得到

$$u(x)=-2\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x} \tag{8.3.14a}$$

$$\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial y^2}=u(x)K(x,y) \tag{8.3.14b}$$

式 (8.3.14a) 就是我们要求的方程.

至此, 我们求得了逆散射问题的全部方程, 总结如下.

1. 已知 Schrödinger 方程在无限空间中的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+k^2\psi=u(x)\psi(x),\ x\in(-\infty,\infty) \tag{8.3.15a}$$

的反射系数 $b(k)$, $(-\infty<k<\infty)$、$N$ 个离散本征值 $\nu_n$, $(n=1,2,\cdots,N)$ 以及相应本征函数的归一化常数 $c_n$, $(n=1,2,\cdots,N)$, 求得

$$B(x)=\sum_{n=1}^N c_n^2\exp(-\nu_n x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty b(k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k \tag{8.3.15b}$$

2．由 GLM 积分方程求 $K(x,y)$

$$K(x,y)+B(x+y)+\int_x^{\infty}K(x,z)B(z+y)\mathrm{d}z=0,\ (y>x) \tag{8.3.15c}$$

3．一旦求得 $K(x,y)$, 势函数 $u(x)$ 计算公式为

$$u(x)=-2\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x} \tag{8.3.15d}$$

两个特殊情况是:

(1) 无反射势函数 $u(x)$, 即 $b(x)=0$, 于是

$$B(x)=\sum_{n=1}^{N}c_n^2\exp(-\nu_n x) \tag{8.3.16a}$$

(2) 无离散本征值的势函数 $u(x)$, 即无束缚态, 于是

$$B(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k \tag{8.3.16b}$$

一般来说, GLM 积分方程 (8.3.15c) 的求解非常困难, 在特殊情况下, 即 $B(x+y)$ 可分离, GLM 积分方程可转为代数方程, 设

$$B(x+y)=\sum_{n=1}^{N}X_n(x)Y_n(y) \tag{8.3.17a}$$

代入方程 (8.3.15c)

$$K(x,y)+\sum_{n=1}^{N}X_n(x)Y_n(y)+\sum_{n=1}^{N}Y_n(y)\int_x^{\infty}K(x,z)X_n(z)\mathrm{d}z=0 \tag{8.3.17b}$$

其中 $y>x$. 设解具有形式

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^{N}L_n(x)Y_n(y) \tag{8.3.18a}$$

代入方程 (8.3.17b) 得到

$$\sum_{n=1}^{N}\left[L_n(x)+X_n(x)+\sum_{m=1}^{N}L_m(x)\int_x^{\infty}Y_m(z)X_n(z)dz\right]Y_n(y)=0 \tag{8.3.18b}$$

其中 $y>x$. 对每一点 $y$, 上式恒成立, 因此

$$L_n(x)+X_n(x)+\sum_{m=1}^{N}L_m(x)\int_x^{\infty}Y_m(z)X_n(z)\mathrm{d}z=0 \\ (n=1,2,\cdots,N) \tag{8.3.18c}$$

上式为 $L_n(x)$ 的线性代数方程, 一旦求得 $L_n(x)$, $(n=1,2,\cdots,N)$, 可由式 (8.3.18a) 得到 $K(x,y)$

**例 8.3.1** 已知反射系数为

$$b(k)=-\frac{\beta}{\beta+\mathrm{i}k} \tag{8.3.19a}$$

束缚态只有一个, 并且波函数的渐近特性为

$$\psi(x)\sim\sqrt{\beta}\exp(-\beta x),\ (x\to+\infty) \tag{8.3.19b}$$

比较式 (8.3.9b), 显然 $\nu_1=\beta$ 和 $c_1=\sqrt{\beta}$. 因此由方程 (8.3.15b) 得到

$$B(x)=\beta\exp(-\beta x)-\frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}kx)}{\beta+\mathrm{i}k}\mathrm{d}k \tag{8.3.19c}$$

上式积分可由留数定理得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}kx)}{\beta+\mathrm{i}k}\mathrm{d}k=\begin{cases}\exp(-\beta x), & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{8.3.19d}$$

于是

$$B(x)=\beta\exp(-\beta x)H(-x) \tag{8.3.19e}$$

其中 $H(x)$ 为 Heaviside 函数. 由方程 (8.3.15c) 可得到: 当 $x+y>0$ 时

$$K(x,y)=0,\ x+y>0 \tag{8.3.20a}$$

当 $x+y<0$ 时, 方程 (8.3.15c) 为

$$K(x,y)+\beta\mathrm{e}^{-\beta(x+y)}+\beta\int_{x}^{-y}K(x,z)\mathrm{e}^{-\beta(z+y)}\mathrm{d}z=0 \tag{8.3.20b}$$

其中 $y>x$. 上式分部积分得到

$$\begin{aligned}&K(x,y)+\beta\mathrm{e}^{-\beta(x+y)}+K(x,x)\mathrm{e}^{-\beta(x+y)}-K(x,-y)\\&\quad+\int_{x}^{-y}\frac{\partial K(x,z)}{\partial z}\mathrm{e}^{-\beta(z+y)}\mathrm{d}z=0,\ (y>x)\end{aligned} \tag{8.3.20c}$$

显然 $K(x,y)=-\beta$ 是上式的解. 结合方程 (8.3.20a)

$$K(x,y)=-\beta H(-x-y),\quad K(x,x)=-\beta H(-2x) \tag{8.3.20d}$$

由式 (8.3.15d) 得到势函数为

$$u(x)=2\beta\frac{\mathrm{d}H(-2x)}{\mathrm{d}x}=-2\beta\delta(x) \tag{8.3.20e}$$

**例 8.3.2** 已知反射系数为零, 即 $b(k)=0$, 而束缚态只有两个, 并且波函数的渐近特性为

$$\begin{aligned}\phi_1(x)&\sim c_1\exp(-\nu_1 x),\ (x\to+\infty)\\ \phi_2(x)&\sim c_2\exp(-\nu_2 x),\ (x\to+\infty)\end{aligned}\tag{8.3.21a}$$

其中 $\nu_1\neq\nu_2$, 于是

$$B(x)=c_1^2\exp(-\nu_1 x)+c_2^2\exp(-\nu_2 x)\tag{8.3.21b}$$

GLM 积分方程为

$$\begin{aligned}&K(x,y)+c_1^2\mathrm{e}^{-\nu_1(x+y)}+c_2^2\mathrm{e}^{-\nu_2(x+y)}\\&+\int_x^\infty K(x,z)[c_1^2\mathrm{e}^{-\nu_1(z+y)}+c_2^2\mathrm{e}^{-\nu_2(z+y)}]\mathrm{d}z=0\end{aligned}\tag{8.3.22a}$$

显然 $B(x+y)$ 是可分离的, 设解为

$$K(x,y)=L_1(x)\exp(-\nu_1 y)+L_2(x)\exp(-\nu_2 y)\tag{8.3.22b}$$

方程 (8.3.18c) 为

$$L_1(x)+c_1^2\mathrm{e}^{-\nu_1 x}+c_1^2\left[L_1(x)\int_x^\infty\mathrm{e}^{-2\nu_1 z}\mathrm{d}z+L_2(x)\int_x^\infty\mathrm{e}^{-2(\nu_1+\nu_2)z}\mathrm{d}z\right]=0$$

$$L_2(x)+c_2^2\mathrm{e}^{-\nu_1 x}+c_2^2\left[L_1(x)\int_x^\infty\mathrm{e}^{-2(\nu_1+\nu_2)z}\mathrm{d}z+L_2(x)\int_x^\infty\mathrm{e}^{-2\nu_2 z}\mathrm{d}z\right]=0$$

积分后上述方程可写成

$$L_m(x)+c_m^2\mathrm{e}^{-\nu_m x}+c_m^2\sum_{n=1}^{2}L_n(x)\frac{\mathrm{e}^{-(\nu_m+\nu_n)x}}{\nu_m+\nu_n}=0\tag{8.3.22c}$$

其中 $m=1,2$. 经过复杂但不困难的数学计算, 可以得到

$$u(x)=-2\frac{\mathrm{d}^2\ln\varOmega(x)}{\mathrm{d}x^2}\tag{8.3.23a}$$

其中

$$\varOmega(x)=\left(1+\frac{c_1^2}{2\nu_1}\mathrm{e}^{-2\nu_1 x}\right)\cdot\left(1+\frac{c_2^2}{2\nu_2}\mathrm{e}^{-2\nu_2 x}\right)-\frac{c_1^2c_2^2}{(\nu_1+\nu_2)^2}\mathrm{e}^{-2(\nu_1+\nu_2)x}\tag{8.3.23b}$$

如果假定 $c_2=0$, 直接可得到 “孤波” 形式的势函数

$$u(x)=-2\nu_1^2\mathrm{sech}^2(\nu_1 x+x_0)\tag{8.3.23c}$$

其中 $\exp(x_0)=\sqrt{2\nu_1}/c_1$.

### 8.3.2 解 KdV 方程初值问题的基本思想

对方程 (8.3.1) 中的 KdV 方程作非线性变换

$$u(x,t)=\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\lambda(t) \tag{8.3.24a}$$

代入 KdV 方程得到

$$\psi^2\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0 \tag{8.3.24b}$$

其中

$$Q=\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{8.3.24c}$$

另外, 把变换式 (8.3.24a) 也写成方程形式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\lambda(t)\psi=u(x,t)\psi \tag{8.3.24d}$$

这样方程 (8.3.24b) 和 (8.3.24d) 就构成决定 $u(x,t)$ 和 $\psi(x,t)$ 的联立方程组. 必须注意的是方程 (8.3.24b) 是一个非常复杂的非线性方程, 但根据 $u(x,t)$ 的特性可把 (8.3.24b) 大大简化. 下面进行这方面的推导.

显然方程 (8.3.24d) 就是 Schrödinger 方程的本征值问题, 此时 $t$ 仅作为一个形式参数. 对连续谱, $\lambda$ 的变化范围是 $(-\infty<\lambda<+\infty)$, 显然与时间 $t$ 无关, 一定有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=0 \tag{8.3.25a}$$

方程 (8.3.24b) 两边对 $x$ 积分

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2\mathrm{d}x+\left(\psi\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\bigg|_{-\infty}^{+\infty}=0 \tag{8.3.25b}$$

对离散谱, 由方程 (8.3.3b), $\psi(x)$ 指数衰减, 即

$$\lim_{x\to\pm\infty}\psi=0;\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \tag{8.3.25c}$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2\mathrm{d}x<\infty \tag{8.3.25d}$$

所以方程 (8.3.25a) 也成立, 即对连续谱和离散谱, $\lambda$ 都不随时间变化. 于是方程 (8.3.24b) 简化成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0 \tag{8.3.26a}$$

上式积分可得

$$\psi^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\psi}\right)=d(t) \tag{8.3.26b}$$

其中 $d(t)$ 为 $t$ 的任意函数. 上式给出

$$Q(x,t)=d(t)\psi(x,t)\int_0^x\frac{1}{\psi^2(x,t)}\mathrm{d}x+e(t)\psi(x,t) \tag{8.3.26c}$$

其中 $e(t)$ 也为 $t$ 的任意函数.

分两种情况讨论.

(1) $\lambda=-\nu_n^2$ 是离散谱, 当 $x\to+\infty$ 时, 由方程 (8.3.3b), $\psi\to 0$, 因此 $1/\psi\to\infty$, 但 $Q$ 有界, 故只有 $d(t)\equiv 0$. 因此

$$Q(x,t)=e(t)\psi(x,t) \tag{8.3.27a}$$

利用式 (8.3.24a) 和 (8.3.24c), 上式即为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\psi^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-3\lambda\psi^2\right]=e(t)\psi^2 \tag{8.3.27b}$$

两边对 $x$ 积分, 并利用式 (8.3.25c) 和 (8.3.25d), 给出 $e(t)\equiv 0$. 因此, 对 $\lambda=-\nu_n^2$ 的离散谱情况, 方程 (8.3.24b) 简化为 $Q=0$, 即

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ (\lambda=-\nu_n^2) \tag{8.3.28a}$$

为了考察上式的解的渐近性质, 注意到 $x\to+\infty$ 时, 函数 $u(x,t)\to 0$, 且由方程 (8.3.9b)

$$\psi(x,t)\approx c_n(\nu_n,t)\exp(-\nu_n x) \tag{8.3.28b}$$

代入方程 (8.3.28a) 得到 (注意: 取 $x\to+\infty$)

$$\frac{\mathrm{d}c_n}{\mathrm{d}t}=4\nu_n^3c_n \tag{8.3.28c}$$

因此

$$c_n(\nu_n,t)=c_n(0)\exp(4\nu_n^3t) \tag{8.3.28d}$$

(2) $\lambda=k^2$ 是连续谱, 当 $x\to-\infty$ 时, 由方程 (8.3.5d), $\psi\sim a(k,t)\exp(-\mathrm{i}kx)$, 因而式 (8.3.26c) 近似为

$$\begin{aligned}Q(x,t)\approx&\frac{d(t)}{a(k,t)}\exp(-\mathrm{i}kx)\int_0^x\exp(2\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x\\&+e(t)a(k,t)\exp(-\mathrm{i}kx)\end{aligned} \tag{8.3.29a}$$

另一方面, 注意到 $x \to -\infty$ 时, $u(x,t) \to 0$, 直接由式 (8.3.24c) 得到

$$Q \approx \left(\frac{\partial a}{\partial t} + 4\mathrm{i}k^3 a\right)\exp(-\mathrm{i}kx) \tag{8.3.29b}$$

上两式结合得到

$$\frac{\partial a}{\partial t} + [4\mathrm{i}k^3 - e(t)]a = \frac{d(t)}{a}\int_0^x \exp(2\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x \tag{8.3.29c}$$

上式左边仅是 $t$ 的函数, 与 $x$ 无关, 而右边与 $x$ 有关, 等式成立的条件是 $d(t) \equiv 0$, 并且有

$$\frac{\partial a}{\partial t} + [4\mathrm{i}k^3 - e(t)]a = 0 \tag{8.3.29d}$$

当 $x \to +\infty$ 时, 由式 (8.3.5c), $\psi \sim \exp(-\mathrm{i}kx) + b(k)\exp(ikx)$, 直接由式 (8.3.24c) 得到

$$Q \approx \left(\frac{\partial b}{\partial t} - 4\mathrm{i}k^3 b\right)\exp(\mathrm{i}kx) + 4\mathrm{i}k^3\exp(-\mathrm{i}kx) \tag{8.3.30a}$$

由式 (8.3.26c) 并且注意到 $d(t) = 0$ 得到

$$\left[\frac{\partial b}{\partial t} - 4\mathrm{i}k^3 b - e(t)b\right]\exp(\mathrm{i}kx) + [4\mathrm{i}k^3 - e(t)]\exp(-\mathrm{i}kx) = 0 \tag{8.3.30b}$$

上式恒成立的条件是

$$e(t) = 4\mathrm{i}k^3; \quad \frac{\partial b}{\partial t} = 8\mathrm{i}k^3 b \tag{8.3.30c}$$

把 $e(t) = 4\mathrm{i}k^3$ 代入方程 (8.3.29d) 得到 $\partial a/\partial t = 0$, 即透射系数不随时间变化

$$a(k,t) = a(k,0) \tag{8.3.30d}$$

由方程 (8.3.30c) 的第二式, 反射系数随时间变化

$$b(k,t) = b(k,0)\exp(8\mathrm{i}k^3 t) \tag{8.3.30e}$$

因此对 $\lambda = k^2$ 连续谱情况, 由方程 (8.3.26c): $Q(x,t) = e(t)\psi(x,t) = 4\mathrm{i}k^3$. 于是方程 (8.3.24b) 简化为

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3(u+\lambda)\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4\mathrm{i}k^3\psi,\ (\lambda = k^2) \tag{8.3.30f}$$

至此, 我们把 KdV 方程化为求 $\psi$ 的方程, 即

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \lambda(t)\psi = u(x,t)\psi \tag{8.3.31a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3(u+\lambda)\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,\ (\lambda = -\nu_n^2) \tag{8.3.31b}$$

或

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\frac{\partial \psi}{\partial x}=4\mathrm{i}k^3\psi,\ (\lambda=k^2) \tag{8.3.31c}$$

方程 (8.3.31b) 或 (8.3.31c) 的初始条件可由方程 (8.3.31a) 令 $t=0$

$$\frac{\partial^2\psi(x,0)}{\partial x^2}+\lambda(0)\psi(x,0)=u(x,0)\psi(x,0) \tag{8.3.31d}$$

求正散射问题得到.

如果知道 $u(x,t)$, 那么方程 (8.3.31b) 或 (8.3.31c) 是线性方程, 但实际上 $u(x,t)$ 待求, 因此它们仍然是非线性方程.

逆散射方法求 $u(x,t)$ 的基本思想是: 首先以 $t=0$ 时刻的 $u(x,0)$(KdV 方程的初始条件, 见方程 (8.3.1)) 作为 Schrödinger 方程的势函数, 求解正散射问题式 (8.3.31d), 得到一系列的散射信息, 包括 $t=0$ 时刻的

(1) 透射系数 $a(k,0)$ 和反射系数 $b(k,0)$, $(-\infty<k<\infty)$;

(2) $N$ 个离散本征值 $\lambda(0)=-\nu_n^2(0)$, $(n=1,2,\cdots,N)$;

(3) 本征函数的归一化常数 $c_n(0)$, $(n=1,2,\cdots,N)$.

然后由方程 (8.3.31b) 或 (8.3.31c) 求这些散射信息的演化规律, 得到 $t$ 时刻的散射信息, 即 $a(k,t)$, $b(k,t)$, $\nu_n(t)$ 和 $c_n(t)$. 最后, 由 $t$ 时刻的散射信息, 通过方程 (8.3.31a) 反演 $u(x,t)$. 这样就避免了直接求解非线性方程. 特别要指出的是, $a(k,t)$, $b(k,t)$ 和 $c_n(t)$ 是 $\psi$ 在 $x\to\pm\infty$ 的渐近特征, 因此决定演化规律比较容易, 它们已经由方程 (8.3.28d), (8.3.30d) 和 (8.3.30e) 给出.

### 8.3.3　KdV 方程初值问题的孤立子解

根据上节的讨论, 逆散射方法求 KdV 方程初值问题 (8.3.1) 的具体步骤分为三步.

首先, 以 $u(x,0)$ 为势函数解下列 Schrödinger 方程的本征值问题

$$\frac{\partial^2\psi(x,0)}{\partial x^2}+\lambda(0)\psi(x,0)=u(x,0)\psi(x,0) \tag{8.3.32a}$$

求出 $N$ 个束缚态的本征值: $\lambda(0)=-\nu_n^2$, $(n=1,2,\cdots,N)$, 以及相应本征函数的渐近特征

$$\begin{aligned}\psi_n(x,0)&\sim c_n(\nu_n,0)\exp(-\nu_n x),\ (x\to+\infty)\\ \psi_n(x,0)&\sim c_n(\nu_n,0)\exp(\nu_n x),\ (x\to-\infty)\end{aligned} \tag{8.3.32b}$$

且要求 $\psi_n(x,0)$ 归一化

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2(x,0)\mathrm{d}x=1 \tag{8.3.32c}$$

对连续谱 $\lambda(0)=k^2>0$, 求解散射问题. 如图 8.3.1, 设入射平面波为

$$\psi^{(i)}(x,k)=\exp(-\mathrm{i}kx) \tag{8.3.33a}$$

求反射系数 $b(k,0)$, 即 $x\to+\infty$ 的渐近特性

$$\lim_{x\to\infty}\psi(x,k)=\exp(-\mathrm{i}kx)+b(k,0)\exp(\mathrm{i}kx) \tag{8.3.33b}$$

注意: 在后面的计算中用不着透射系数 $a(k,0)$, 故不求透射系数.

第二步, 由下列方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ (\lambda=-\nu_n^2) \tag{8.3.33c}$$

或

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x}=4\mathrm{i}k^3\psi,\ (\lambda=k^2) \tag{8.3.33d}$$

决定散射数据的时间演化规律, 即 $\lambda(t)$、$b(k,t)$ 和 $c_n(\nu_n,t)$. 由方程 (8.3.25a)、(8.3.28d)、(8.3.30d) 和 (8.3.30e), 我们已经求得演化规律为 (因此实际上用不到求解方程 (8.3.33c) 和 (8.3.33d))

$$\begin{gathered}\lambda(t)=\lambda(0)\\ c_n(\nu_n,t)=c_n(\nu_n,0)\exp(4\nu_n^3t)\\ b(k,t)=b(k,0)\exp(8\mathrm{i}k^3t)\end{gathered} \tag{8.3.33e}$$

最后求解逆散射问题

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\lambda(t)\psi=u(x,t)\psi \tag{8.3.34a}$$

这里 $t$ 仅为形式参数, 8.3.1 小节的结论全部成立. 我们已得到上式的反射系数 $b(k,t)$, $(-\infty<k<\infty)$、$N$ 个离散本征值 $\nu_n$, $(1,2,\cdots,N)$ 以及归一化常数 $c_n(\nu_n,t)$, $(1,2,\cdots,N)$, 因此可以得到

$$\begin{aligned}B(x,t)=&\sum_{n=1}^{N}c_n^2(\nu_n,t)\exp(-\nu_nx)\\&+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(k,t)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k\end{aligned} \tag{8.3.34b}$$

然后由 GLM 积分方程求 $K(x,y,t)$

$$\begin{gathered}K(x,y,t)+B(x+y,t)+\int_x^{\infty}K(x,z,t)B(z+y,t)\mathrm{d}z=0\\(y>x)\end{gathered} \tag{8.3.34c}$$

一旦求得 $K(x,y,t)$, 势函数 $u(x,t)$ 的计算公式为

$$u(x,t) = -2\frac{\mathrm{d}K(x,x,t)}{\mathrm{d}x} \tag{8.3.34d}$$

上式即是 KdV 方程初值问题式 (8.3.1) 的解. 图 8.3.2 表明了利用逆散射方法求解 KdV 方程初值问题的步骤. 图中 $S(t)$ 表示散射数据 $\lambda(t)$, $c_n(\nu_n,t)$ 和 $b(k,t)$. 这一过程与 Fourier 变换方法求线性方程的初值问题是一样的, 如第一章中求解热导方程的初值问题的过程可用图 8.3.3 表示.

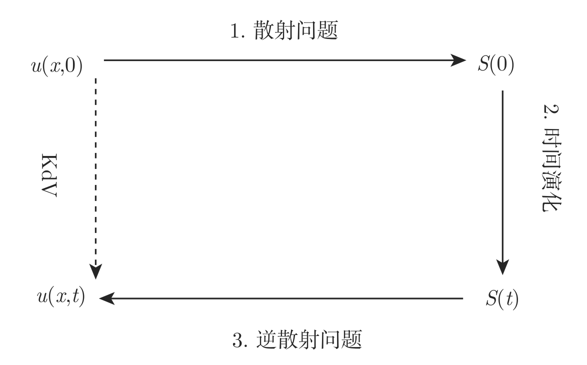



图 8.3.2　逆散射求 KdV 方程的初值问题

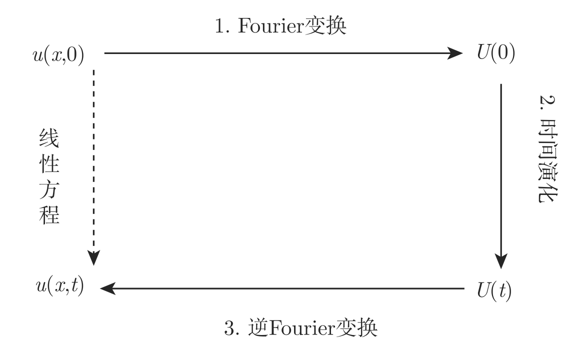



图 8.3.3　Fourier 变换法求线性方程的初值问题

**例 8.3.3**　求 KdV 方程的初值问题

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,\ x \in (-\infty,\infty),\ t > 0 \\ u(x,t)|_{t=0} = -U_0 \mathrm{sech}^2 x,\ x \in (-\infty,\infty)\end{gathered} \tag{8.3.35a}$$

第一步: 求解本征值问题和散射问题

$$\frac{\partial^2 \psi(x,0)}{\partial x^2} + [\lambda(0) + U_0 \mathrm{sech}^2 x]\psi(x,0) = 0 \tag{8.3.35b}$$

令变量变换

$$y = \tanh x,\ \ x \in (-\infty, \infty) \tag{8.3.35c}$$

$x$ 的变化范围为 $(-\infty < x < +\infty)$, 故 $y$ 的变化范围为 $[-1 < y < +1]$, 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{sech}^2 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} = (1 - y^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \tag{8.3.36a}$$

方程 (8.3.35a) 化成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1 - y^2)\frac{\mathrm{d}\psi(y,0)}{\mathrm{d}y}\right] + \left[U_0 + \frac{\lambda(0)}{1 - y^2}\right]\psi(y,0) = 0 \tag{8.3.36b}$$

上式为连带 Legendre 方程.

首先考虑束缚态 $\lambda(0) = -\nu^2 < 0$, 根据连带 Legendre 方程的性质, 只有当

$$\begin{gathered} U_0 = l(l+1),\ \ (l = 0, 1, 2, \cdots) \\ \nu = m,\ \ (m = 1, 2, \cdots, l) \end{gathered} \tag{8.3.36c}$$

时连带 Legendre 方程 (8.3.36b) 才有在区间 $[-1 < y < +1]$ 有限的解, 否则在 $y = \pm 1$(即 $x \to \pm\infty$) 时解发散. 于是在整个区域 $[-1 < y < +1]$ 都有限的解为

$$\psi(y,0) = A_l^m P_l^m(y) \tag{8.3.37a}$$

其中 $P_l^m(y)$ 为连带 Legendre 函数

$$P_l^m(y) = (-1)^m(1 - y^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_l(y)}{\mathrm{d}y^m} \tag{8.3.37b}$$

$P_l(y)$ 为 $l$ 阶 Legendre 多项式. 常数 $A_l^m$ 由归一化条件决定. 当 $l = 1$ 时, $\nu = 1$, 只有一个本征值, 相应的本征函数为

$$\psi_1(y,0) = A_1^1 P_1^1(y) = A_1^1\sqrt{1 - y^2} \tag{8.3.38a}$$

即

$$\psi_1(x,0) = A_1^1 \mathrm{sech} x \tag{8.3.38b}$$

归一化常数满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^2(x,0)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}^2 x \mathrm{d}x = 2[A_1^1]^2 = 1 \tag{8.3.38c}$$

于是 $A_1^1 = 1/\sqrt{2}$

$$\psi_1(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sech} x \tag{8.3.39a}$$

上式的渐近特性为

$$\psi_1(x,0) \sim \sqrt{2}\exp(-x),\ (x \to +\infty) \tag{8.3.39b}$$

当 $l=2$ 时, $\nu$ 有二个值 $\nu_1=1$ 和 $\nu_2=2$, 相应的本征函数为

$$\psi_1(y,0) = A_2^1 P_2^1(y);\ \psi_2(y,0) = A_2^2 P_2^2(y) \tag{8.3.40a}$$

即

$$\psi_1(x,0) = -3A_2^1 \tanh x \mathrm{sech} x;\ \psi_2(x,0) = 3A_2^2 \mathrm{sech}^2 x \tag{8.3.40b}$$

利用归一化条件决定二个常数, 最后得到

$$\psi_1(x,0) = \sqrt{\frac{3}{2}}\tanh x \mathrm{sech} x;\ \psi_2(x,0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sech}^2 x \tag{8.3.40c}$$

上式的渐近特性为

$$\begin{aligned}\psi_1(x,0) &\sim \sqrt{6}\exp(-x),\ (x \to +\infty)\\ \psi_2(x,0) &\sim 2\sqrt{3}\exp(-x),\ (x \to +\infty)\end{aligned} \tag{8.3.40d}$$

其次, 考虑散射态 $\lambda(0)=k^2>0$, 连带 Legendre 方程 (8.3.36b) 的解比较复杂, 要用超几何函数表示, 我们不详细讨论. 可以证明下列渐近形式

$$\begin{gathered}\psi(x,k,0) \sim \exp(-\mathrm{i}kx) + b(k,0)\exp(\mathrm{i}kx)\\ (x \to +\infty)\end{gathered} \tag{7.3.41a}$$

其中

$$\begin{gathered}b(k,0) = \frac{\Gamma(\overline{c})\Gamma(\overline{c}-\overline{a}-\overline{b})}{\Gamma(\overline{c}-\overline{a})\Gamma(\overline{c}-\overline{b})}\\ \overline{a} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}k + \sqrt{U_0+\frac{1}{4}};\ \overline{b} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}k - \sqrt{U_0+\frac{1}{4}}\\ \overline{c} = 1 - \mathrm{i}k\end{gathered} \tag{8.3.41b}$$

考察 $b(k,0)$ 的分母

$$\begin{aligned}\Gamma(\overline{c}-\overline{a})\Gamma(\overline{c}-\overline{b}) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} - \sqrt{U_0+\frac{1}{4}}\right)\\ &\times\Gamma\left(\frac{1}{2} + \sqrt{U_0+\frac{1}{4}}\right) = \frac{\pi}{\cos\pi\sqrt{U_0+1/4}}\end{aligned} \tag{8.3.41c}$$

其中已利用 $\Gamma$-函数的性质

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right) = \frac{\pi}{\cos\pi z} \tag{8.3.41d}$$

因此当

$$\sqrt{U_0+\frac{1}{4}}=l+\frac{1}{2},\ (l=1,2,\cdots) \tag{8.3.42a}$$

时 $b(k,0)\equiv 0$, 上式即为

$$U_0=l(l+1),\ (l=1,2,\cdots) \tag{8.3.42b}$$

因此当 $U_0$ 满足上式时, 反射系数为零, 这样的势函数称为**无反射势**. 下面我们主要讨论这种情况.

第二步: $\lambda(0)$、$b(k,0)$ 和 $c_n(\nu_n,0)$ 的时间演化规律. 由方程 (8.3.33e) 的第一式,

$$\lambda(t)=\lambda(0) \tag{8.3.43a}$$

当 $l=1$ 时, 即 $U_0=2$, 本征值只有一个 $\nu_1=1$. 因无反射势, $b(k,t)=0$. 由式 (8.3.39b), $c_1(\nu_1,0)=\sqrt{2}$. 因此

$$c_1(\nu_1,t)=\sqrt{2}\exp(4t) \tag{8.3.43b}$$

当 $l=2$ 时, 即 $U_0=6$, 本征值有二个值 $\nu_1=1$ 和 $\nu_2=2$. 显然这也是无反射势, 即 $b(k,t)=0$. 由式 (8.3.40d)$c_1(\nu_1,0)=\sqrt{6}$ 以及 $c_2(\nu_2,0)=2\sqrt{3}$. 因此

$$c_1(\nu_1,t)=\sqrt{6}\exp(4t);\ c_2(\nu_2,t)=2\sqrt{3}\exp(32t) \tag{8.3.43c}$$

第三步: 解 GLM 积分方程并求 $u(x,t)$

当 $l=1$ 时

$$B(x,t)=c_1^2(\nu_1,t)\exp(-x)=2\exp[-(x-8t)] \tag{8.3.44a}$$

因此 GLM 积分方程为

$$K(x,y,t)+2\mathrm{e}^{-(x+y-8t)}+2\mathrm{e}^{-(y-8t)}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-z}K(x,z,t)\mathrm{d}z=0 \tag{8.3.44b}$$

显然 $B(x,t)$ 可分离, 因此上式的解可写成形式

$$K(x,y,t)=I(x,t)\exp(-y) \tag{8.3.45a}$$

代入方程 (8.3.44b) 得到

$$I(x,t)=-\exp(4t)\mathrm{sech}(x-4t) \tag{8.3.45b}$$

最后可得

$$K(x,y,t)=-\exp(4t-y)\mathrm{sech}(x-4t) \tag{8.3.45c}$$

由方程 (8.3.34e), 得到初值问题式 (8.3.35a) 的解 (当 $U_0=2$ 时)

$$u(x,t)=-2\mathrm{sech}^2(x-4t) \tag{7.3.45d}$$

这就是 KdV 方程的单孤子解.

当 $l=2$ 时

$$B(x,t)=6\exp[-(x-8t)]+12\exp[-2(x-32t)] \tag{8.3.46a}$$

上式也是可分离的, 与例 8.3.2 相似. 通过繁复的计算, 可以得到

$$K(x,x,t)=-6\frac{\mathrm{e}^{-2(x-4t)}+2\mathrm{e}^{-4(x-16t)}+\mathrm{e}^{-6(x-12t)}}{1+3\mathrm{e}^{-2(x-4t)}+3\mathrm{e}^{-4(x-16t)}+\mathrm{e}^{-6(x-12t)}} \tag{8.3.46b}$$

最后得到 KdV 方程的双孤子解

$$u(x,t)=12\frac{3+4\cosh 2(x-4t)+\cosh 4(x-16t)}{[3\cosh(x-28t)+\cosh 3(x-12t)]^2} \tag{8.3.46c}$$

当 $l=N$, 通过同样的方法, 可求得 KdV 方程的多孤子解. 由方程 (8.3.35a) 中初始条件知, 在初始时刻, $u(x,0)$ 表示一个孤子, 但随着时间演化, 一个孤子分裂成 $N$ 个孤子, $N$ 仅仅决定于 $U_0$ 的大小, 而 $U_0$ 表示初始时刻单个孤子的能量. 单个孤子的能量越大, 分裂的孤子数也越多, 只要 $U_0$ 满足 $U_0=N(N+1)$. 当 $U_0$ 不满足这个条件, 反射系数不为零, 问题比较复杂, 我们不再讨论.

### 8.3.4 Lax 理论

上小节我们应用逆散射方法求出了 KdV 方程的初值问题. 这样的方法能否应用于其他方程呢? Lax 把 KdV 方程的逆散射方法加以推广, 原则上得到了一般非线性方程初值问题的逆散射方法. 可以看出, KdV 方程的逆散射方法实际上把 KdV 方程化成关于 $\psi$ 和 $u(x,t)$ 的方程组

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\lambda(t)\psi=u(x,t)\psi \tag{8.3.47a}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}+3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x}+e(t)\psi \tag{8.3.47b}$$

其中 $\lambda(t)=\lambda(0)$, $e(t)=0$(对离散谱) 或 $e(t)=4\mathrm{i}k^3$(对连续谱). 因此 Lax 认为求解一般非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\boldsymbol{P}\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots\right) \tag{8.3.48a}$$

的初值问题, 首先必须找到一个本征值问题, 例如方程 (8.3.47a)

$$\boldsymbol{L}\psi=\lambda\psi \tag{8.3.48b}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是一个与 $u$ 有关的线性 Hermite 算子. 其次, 关键是本征值必须与时间无关, 即

$$\frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t}=0 \tag{8.3.49a}$$

最后, 必须找到一个合适的线性算子 $\boldsymbol{M}$, 使

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\boldsymbol{M}\psi \tag{8.3.49b}$$

例如方程 (8.3.47b). 为使本征值与时间无关, 我们来分析线性算子 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 必须满足的关系. 对方程 (8.3.48b) 求导

$$\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial t}\psi+\boldsymbol{L}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\psi+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{8.3.50a}$$

其中算子 $\boldsymbol{L}$ 对时间的偏导是对 $\boldsymbol{L}$ 中出现的参数 $t$ 求导, 例如方程 (8.3.47a) 中

$$\boldsymbol{L}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x,t) \tag{8.3.50b}$$

因此

$$\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial t}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{8.3.50c}$$

利用方程 (8.3.49a) 和 (8.3.49b), 方程 (8.3.50a) 成为

$$\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial t}\psi+\boldsymbol{L}\boldsymbol{M}\psi=\boldsymbol{M}(\lambda\psi) \tag{8.3.51a}$$

再由方程 (8.3.48b)

$$\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial t}\psi=(\boldsymbol{M}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{M})\psi \tag{8.3.51b}$$

因此要求 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 满足

$$\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial t}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{M} \tag{8.3.51c}$$

反之, 如果 $\boldsymbol{M}$ 满足上式, 那么本征值一定与时间无关且 $\psi$ 满足方程 (8.3.49b). 事实上, 把方程 (8.3.50a) 改写成

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\psi=\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial t}\psi+(\boldsymbol{L}-\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{8.3.52a}$$

把方程 (8.3.51c) 代入上式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\psi&=(\boldsymbol{M}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{M})\psi+(\boldsymbol{L}-\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial t}\\&=(\boldsymbol{L}-\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial t}+\boldsymbol{M}\lambda\psi-\boldsymbol{L}\boldsymbol{M}\psi\\&=(\boldsymbol{L}-\lambda)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\boldsymbol{M}\psi\right)\end{aligned} \tag{8.3.52b}$$

上式两边求内积

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}(\psi,\psi)=\left[\psi,(\boldsymbol{L}-\lambda)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\boldsymbol{M}\psi\right)\right] \tag{8.3.52c}$$

因为 $\boldsymbol{L}$ 是 Hermite 算子, 故

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}(\psi,\psi)=\left[(\boldsymbol{L}-\lambda)\psi,\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\boldsymbol{M}\psi\right)\right] \tag{8.3.52d}$$

而由方程 (8.3.48b) 得到

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}(\psi,\psi)=0 \tag{8.3.53a}$$

即本征值不随时间变化. 进一步, 因为本征值不随时间变化, 由方程 (8.3.52b)

$$(\boldsymbol{L}-\lambda)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\boldsymbol{M}\psi\right)=0 \tag{8.3.53b}$$

因此 $\partial\psi/\partial t-\boldsymbol{M}\psi$ 也是 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数并且本征值为 $\lambda$, 于是

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\boldsymbol{M}\psi\equiv\alpha\psi \tag{8.3.53c}$$

其中 $\alpha$ 为常数. 因此

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-(\boldsymbol{M}+\alpha\boldsymbol{I})\psi=0 \tag{8.3.53d}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为恒等算子, 只要重新定义 $\boldsymbol{M}$ 为 $\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{M}+\alpha\boldsymbol{I}$, 并不改变方程 (8.3.51c) 的形式

$$\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial t}=\boldsymbol{ML}-\boldsymbol{LM}=\boldsymbol{M}'\boldsymbol{L}-\boldsymbol{LM}' \tag{8.3.54a}$$

因此, 可取 $\alpha=0$, 于是

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\boldsymbol{M}\psi=0 \tag{8.3.54b}$$

即得到方程 (8.3.49b).

根据上述思想, Lax 得到了一般非线性演化方程的逆散射方法:

第一步: 求正问题, 根据 $u(x,0)$, 求解本征值问题式 (8.3.48b), 并且根据 $x\to\pm\infty$ 时 $\psi$ 的渐近特征, 求初始散射数据;

第二步: 根据方程 (8.3.49b) 和 $x\to\pm\infty$ 时 $\boldsymbol{M}$ 的特征, 求散射数据的时间演化规律;

第三步: 根据方程 (8.3.48b) , 求逆散射问题, 得到 $u(x,t)$.

Lax 理论给出了逆散射方法求非线性演化方程的一般规律, 但线性算子 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的寻找是非常困难的. 应用 Lax 理论和其他方法, 逆散射方法已成功应用于 NLS 方程和 Sine-Gordon 等方程的初值问题, 这里不再进一步展开.

# 8.4 Bäcklund 变换和非线性迭加

Bäcklund 变换建立了一个非线性偏微分方程的解与另一个线性偏微分方程解之间的关系, 或者建立了同一个非线性偏微分方程不同解之间的关系. 因此可以通过 Bäcklund 变换, 根据已知线性偏微分方程的解, 求非线性偏微分方程的解, 或者根据非线性偏微分方程的一个简单解, 求另一个复杂的解. 本节首先介绍 Bäcklund 变换的基本思想

## 8.4.1 Bäcklund 变换的基本思想

首先介绍二个不同方程之间的 Bäcklund 变换. 设 $u(x,t)$ 是待求非线性偏微分方程的解

$$\boldsymbol{U}u = 0 \tag{8.4.1a}$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 为非线性微分算子, 又[illegible]偏微分方程的解

[illegible] (8.4.1b)

其中 $\boldsymbol{K}$ 为线性微分算子, **Bäc**[illegible]列一阶偏微分方程组

$$[illegible]$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \boldsymbol{Q}\left(u, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}\right) \tag{8.4.1c}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 为已知的微分算子. 一旦找到上述关系, 就可以从 $v$ 求 $u$. 注意方程 (8.4.1c) 中 $v$ 和 $u$ 可以互相交换.

**例 8.4.1** Burgers 方程的 Bäcklund 变换. 重写 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{8.4.2a}$$

通过 Hopf-Cole 变换

$$u = -2\alpha\frac{\partial \ln v}{\partial x} = -\frac{2\alpha}{v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.4.2b}$$

变成线性扩散方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{8.4.2c}$$

由方程 (8.4.2b)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2\alpha}uv \tag{8.4.3a}$$

另一方面, 上式两边对 $x$ 微分, 并再利用上式得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{1}{2\alpha}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{1}{2\alpha}v\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4\alpha^2}u^2 v \tag{8.4.3b}$$

利用方程 (8.4.2c) 得到

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{2}v\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4\alpha}u^2 v \tag{8.4.3c}$$

方程 (8.4.3a) 和 (8.4.3c) 就是 Burgers 方程的 Bäcklund 变换

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{1}{2\alpha}uv\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=-\frac{1}{2}v\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4\alpha}u^2 v\end{aligned} \tag{8.4.4a}$$

显然上式满足

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) \tag{8.4.4b}$$

称为 Bäcklund 变换的**相容性条件**. 以上我们已经知道了方程 (8.4.2a) 与 (8.4.2c) 的变换关系, 因此 Bäcklund 变换很容易求得. 对一般的非线性偏微分方程, Bäcklund 变换很难求得, 没有一般规律可遵循.

其次介绍同一个方程、不同解之间的 Bäcklund 变换. 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是非线性偏微分方程 (8.4.1a) 的二个不同解. Bäcklund 变换定义为下列一阶偏微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial x}&=\boldsymbol{P}\left(u_2,u_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial u_1}{\partial t},a\right)\\ \frac{\partial u_2}{\partial t}&=\boldsymbol{Q}\left(u_2,u_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial u_1}{\partial t},a\right)\end{aligned} \tag{8.4.5}$$

其中 $a$ 为任意常数. 这样的 Bäcklund 变换也称为**自 Bäcklund 变换**. 注意: 自 Bäcklund 变换含有任意常数. 如果能找到上述关系, 就可以从一个已知解求另一个解, 而已知解可是非线性偏微分方程的平凡解. 反复使用自 Bäcklund 变换, 就可求出非线性偏微分方程的一系列解. 同样, 自 Bäcklund 变换也很难求得, 没有一般规律可遵循.

### 8.4.2 Sine-Gordon 方程的自 Bäcklund 变换

考虑 Sine-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F(u) \tag{8.4.6a}$$

其中 $F(u) = \sin u$, 但我们先假定它为任意函数. 作自变数变换

$$\xi = \frac{x+t}{2};\ \eta = \frac{x-t}{2} \tag{8.4.6b}$$

方程 (8.4.6a) 变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F(u) \tag{8.4.6c}$$

设 $u_1$ 和 $u_2$ 是上述方程的两个独立解, 作变换

$$u_1 = u+v;\ u_2 = u-v \tag{8.4.7a}$$

或者

$$u = \frac{u_1+u_2}{2};\ v = \frac{u_1-u_2}{2} \tag{8.4.7b}$$

并且令

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = f(v);\ \frac{\partial v}{\partial\eta} = g(u) \tag{8.4.7c}$$

显然, 只有特殊的 $F(u)$, $f(v)$ 和 $g(v)$ 才能满足上述关系. 如果存在且找到上式这样的关系, 相当于找到了 $u_1$ 和 $u_2$ 的关系, 即方程 (8.4.6a) 的自 Bäcklund 变换.

由方程 (8.4.7c) 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} &= f'(v)\frac{\partial v}{\partial\eta} = f'(v)g(u)\\ \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} &= g'(u)\frac{\partial u}{\partial\xi} = g'(u)f(v)\end{aligned} \tag{8.4.8a}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi\partial\eta} &= \frac{\partial^2(u+v)}{\partial\xi\partial\eta} = f'(v)g(u)+g'(u)f(v)\\ &= F(u_1) = F(u+v)\\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial\xi\partial\eta} &= \frac{\partial^2(u-v)}{\partial\xi\partial\eta} = f'(v)g(u)-g'(u)f(v)\\ &= F(u_2) = F(u-v)\end{aligned} \tag{8.4.8b}$$

于是, 由上式第一式得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(u+v)}{\partial u} &= f'(v)g'(u)+g''(u)f(v)\\ \frac{\partial F(u+v)}{\partial v} &= f''(v)g(u)+g'(u)f'(v)\end{aligned} \tag{8.4.8c}$$

但是

$$\frac{\partial F(u+v)}{\partial u} = \frac{\partial F(u+v)}{\partial v} \tag{8.4.9a}$$

因此

$$f'(v)g'(u) + g''(u)f(v) = f''(v)g(u) + g'(u)f'(v) \tag{8.4.9b}$$

即

$$\frac{g''(u)}{g(u)} = \frac{f''(v)}{f(v)} \equiv -\lambda^2 \tag{8.4.9c}$$

上式成立的条件是恒等于常数 $(-\lambda^2)$. 于是

$$\begin{aligned} f(v) &= a_1 \sin \lambda v + a_2 \cos \lambda v \\ g(u) &= b_1 \sin \lambda u + b_2 \cos \lambda u \end{aligned} \tag{8.4.10a}$$

由方程 (8.4.8b), 取 $v = 0$ 得到

$$\begin{aligned} F(u) &= f'(0)g(u) + g'(u)f(0) \\ &= f'(0)g(u) - g'(u)f(0) \end{aligned} \tag{8.4.10b}$$

即 $2g'(u)f(0) = 0$, 因此 $f(0) = 0$, 即 $a_2 = 0$. 故由上式和式 (8.4.10a) 得到

$$F(u) = f'(0)g(u) = a_1\lambda(b_1 \sin \lambda u + b_2 \cos \lambda u) \tag{8.4.10c}$$

于是满足式 (8.4.7a), (8.4.7b) 和 (8.4.7c) 的非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = a_1\lambda(b_1 \sin \lambda u + b_2 \cos \lambda u) \tag{8.4.11a}$$

的自 Bäcklund 变换为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial \xi} &= a_1 \sin\left(\lambda \frac{u_1-u_2}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial \eta} &= b_1 \sin\left(\lambda \frac{u_1+u_2}{2}\right) + b_2 \cos\left(\lambda \frac{u_1+u_2}{2}\right) \end{aligned} \tag{8.4.11b}$$

注意: 方程 (8.4.11a) 中的四个常数可以合并成三个, 而方程 (8.4.11b) 中的四个常数不能合并. 所以自 Bäcklund 变换包含一个任意常数, 这与定义式 (8.4.5) 是一致的.

对 Sine-Gordon 方程: $\lambda = 1$ 和 $b_2 = 0$ 以及 $a_1 = 1/b_1 \equiv 1/a$, 故方程 (8.4.11b) 变成

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial \xi} &= \frac{2}{a} \sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\right) \\ \frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial \eta} &= 2a \sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \end{aligned} \tag{8.4.11c}$$

上式即为 Sine-Gordon 方程的自 Bäcklund 变换.

**例 8.4.2**　显然 Sine-Gordon 方程的一个平凡解为 $u_2=0$, 代入上式得到

$$\frac{\partial u_1}{\partial\eta}=2a\sin\frac{u_1}{2}\ ;\ \frac{\partial u_1}{\partial\xi}=\frac{2}{a}\sin\frac{u_1}{2} \tag{8.4.12a}$$

分别积分得到

$$\begin{aligned}\ln\tan\frac{u_1}{4}&=a\eta+G_1(\xi)\\ \ln\tan\frac{u_1}{4}&=\frac{\xi}{a}+G_2(\eta)\end{aligned} \tag{8.4.12b}$$

比较二式得到

$$G_2(\eta)-a\eta=G_1(\xi)-\frac{\xi}{a} \tag{8.4.12c}$$

上式左边是 $\xi$ 的函数, 而右边是 $\eta$ 的函数, 恒等的条件是两边为同一常数, 取此常数为 $\delta$, 因此有

$$G_2(\eta)=a\eta+\ \delta;\ G_1(\xi)=\frac{\xi}{a}+\delta \tag{8.4.12d}$$

代入方程 (8.4.12b)

$$\ln\tan\frac{u_1}{4}=a\eta+\frac{\xi}{a}+\delta \tag{8.4.13a}$$

因此由式 (8.4.6b) 得到

$$\tan\frac{u_1}{4}=\exp\left[\frac{a^2+1}{2a}\left(x-\frac{a^2-1}{a^2+1}t\right)+\delta\right] \tag{8.4.13b}$$

上式与式 (8.1.24b) 类似, 是 Sine-Gordon 方程的 “孤立波” 解. 令

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}=\pm c \tag{8.4.14a}$$

即解为 $\pm x$ 方向传播的 “孤立波”, 相当于取

$$a=a_1=\sqrt{\frac{1+c}{1-c}};\ a=a_2=\sqrt{\frac{1-c}{1+c}} \tag{8.4.14b}$$

显然有

$$\frac{a^2+1}{2a}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \tag{8.4.14c}$$

故要求 $c<1$. 式 (8.4.13b) 变成

$$\tan\frac{u_1}{4}=\exp\left[\pm\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}(x\pm ct)+\delta\right] \tag{8.4.14d}$$

**例 8.4.3**　Sine-Gordon 方程的另一个平凡解为 $u_2=\pi$, 代入自 Bäcklund 变换式 (8.4.11c) 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial\eta}&=2a\sin\left(\frac{u_1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2a\cos\frac{u_1}{2}\\ \frac{\partial u_1}{\partial\xi}&=\frac{2}{a}\sin\left(\frac{u_1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{a}\cos\frac{u_1}{2}\end{aligned}\tag{8.4.15a}$$

分别积分得到

$$\begin{aligned}\ln\tan\left(\frac{u_1}{4}+\frac{\pi}{4}\right)&=a\eta+S_1(\xi)\\ \ln\tan\left(\frac{u_1}{4}+\frac{\pi}{4}\right)&=-\frac{\xi}{a}+S_2(\eta)\end{aligned}\tag{8.4.15b}$$

比较二式得到

$$S_2(\eta)-a\eta=S_1(\xi)+\frac{\xi}{a}=\delta\tag{8.4.15c}$$

上式与 (8.4.12c) 类似处理得到

$$S_2(\eta)=a\eta+\ \delta;\ S_1(\xi)=-\frac{\xi}{a}+\delta\tag{8.4.15d}$$

代入方程 (8.4.15b)

$$\ln\tan\left(\frac{u_1}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=a\eta-\frac{\xi}{a}+\delta\tag{8.4.16a}$$

因此, 由式 (8.4.6b) 得到

$$\tan\left(\frac{u_1}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\exp\left[\frac{a^2-1}{2a}\left(x-\frac{a^2+1}{a^2+1}t\right)+\delta\right]\tag{8.4.16b}$$

上式与式 (8.1.21c) 类似, 也是 Sine-Gordon 方程的 “孤立波” 解.

### 8.4.3　KdV 方程的自 Bäcklund 变换

考虑 KdV 方程经变换 (8.2.13c) 后的方程 (8.2.14a), 即

$$\frac{\partial w}{\partial t}-3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0\tag{8.4.17a}$$

设 $w_1$ 和 $w_2$ 是两个独立解, 即有

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}-3u_1^2+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=0;\ u_1=\frac{\partial w_1}{\partial x}\tag{8.4.17b}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t}-3u_2^2+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=0;\ u_2=\frac{\partial w_2}{\partial x}\tag{8.4.17c}$$

下面我们来求 KdV 方程的自 Bäcklund 变换. 对 $u_1$ 和 $u_2$ 作变换

$$u_1=\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\lambda;\ u_2=\frac{1}{\psi_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\lambda\tag{8.4.18a}$$

即 $u_1$ 和 $u_2$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+(\lambda-u_1)\psi_1=0\\ \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+(\lambda-u_2)\psi_2=0\end{aligned}\tag{8.4.18b}$$

为了求 $u_1$ 和 $u_2$ 的自 Bäcklund 变换, 设想存在函数 $v(x)$, 使 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 之间有关系

$$\psi_2=\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-v(x)\psi_1\tag{8.4.19a}$$

我们试图通过上式来建立 $u_1$ 和 $u_2$ 之间的联系, 即由 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 建立 $u_1$ 和 $u_2$ 的关系. 上式代入方程 (8.4.18b) 的第二式, 并利用方程 (8.4.18b) 的第一式, 得到

$$\left(u_1-u_2-2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\left[\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(u_1-u_2)v\right]\psi_1=0\tag{8.4.19b}$$

如果选择函数 $v(x)$ 满足

$$u_1-u_2-2\frac{\partial v}{\partial x}=0\tag{8.4.19c}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(u_1-u_2)v=0\tag{8.4.19d}$$

那么方程 (8.4.19b) 一定满足. 由方程 (8.4.19c)

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}-\frac{\partial w_2}{\partial x}-2\frac{\partial v}{\partial x}=0\tag{8.4.20a}$$

积分一次并取积分常数为零得到

$$v=\frac{1}{2}(w_1-w_2)\tag{8.4.20b}$$

另一方面, 方程 (8.4.19c) 和 (8.4.19d) 结合有

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2v\frac{\partial v}{\partial x}=0\tag{8.4.21a}$$

积分一次并取积分常数为 $\lambda$, 得到

$$u_1=\frac{\partial v}{\partial x}+v^2+\lambda\tag{8.4.21b}$$

把方程 (8.4.20b) 代入上式得到

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial x}+\frac{1}{4}(w_1-w_2)^2+\lambda\tag{8.4.21c}$$

即

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}=-\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{1}{2}(w_1-w_2)^2+2\lambda\tag{8.4.21d}$$

上式即是 KdV 方程的自 Bäcklund 变换方程之一. 另一个方程可由方程 (8.4.17b), (8.4.17c) 和 (8.4.21d) 求得. 把方程 (8.4.17b) 和 (8.4.17c) 相加得到

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = -\frac{\partial w_1}{\partial t} + 3(u_2^2 + u_1^2) - \frac{\partial^2(u_2+u_1)}{\partial x^2} \tag{8.4.22a}$$

为了消去 $u_2$ 二阶导数, 注意到方程 (8.4.21d) 即为

$$u_2 + u_1 = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)^2 + 2\lambda \tag{8.4.22b}$$

可以求得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(u_2+u_1)}{\partial x^2} = &(u_2-u_1)^2 + (w_2-w_1)^2(u_2-u_1)\\ &-2(w_2-w_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}\end{aligned} \tag{8.4.22c}$$

上式代入方程 (8.4.22a) 并再一次应用方程 (8.4.22b), 得到 KdV 方程的自 Bäcklund 变换的第二个方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_2}{\partial t} =& -\frac{\partial w_1}{\partial t} + 4\lambda\frac{\partial w_2}{\partial x} + 2u_1^2 + u_1(w_2-w_1)^2\\ &+2(w_2-w_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}\end{aligned} \tag{8.4.22d}$$

方程 (8.4.21d) 和 (8.4.22d) 构成 KdV 方程的自 Bäcklund 变换

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_2}{\partial x} =& -\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{2}(w_1-w_2)^2 + 2\lambda\\ \frac{\partial w_2}{\partial t} =& -\frac{\partial w_1}{\partial t} + 4\lambda\frac{\partial w_2}{\partial x} + 2u_1^2 + u_1(w_2-w_1)^2\\ &+2(w_2-w_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}\end{aligned} \tag{8.4.22e}$$

利用它们, 可以根据 KdV 方程的一个解, 求另一个解.

**例 8.4.4**　KdV 方程的一个平凡解为 $w_1 = 0$, 由此代入自 Bäcklund 变换方程 (8.4.22e) 得到

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{1}{2}w_1^2 + 2\lambda \tag{8.4.23a}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = 4\lambda\frac{\partial w_2}{\partial x} \tag{8.4.23b}$$

方程 (8.4.23b) 的一般解为

$$w_2 = f(x + 4\lambda t) \tag{8.4.24a}$$

其中函数 $f$ 由方程 (8.4.23a) 决定, 代入方程 (8.4.23a) 并令 $\xi = x + 4\lambda t$ 得到

$$f'(\xi) = 2\lambda + \frac{1}{2} f^2(\xi) \tag{8.4.24b}$$

即

$$\xi - \xi_0 = 2\int \frac{\mathrm{d}f}{4\lambda + f^2} \tag{8.4.24c}$$

取 $\lambda = -k^2 < 0$, 上式变成

$$\xi - \xi_0 = 2\int \frac{\mathrm{d}f}{f^2 - 4k^2} = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{f-2k}{f+2k}\right) \tag{8.4.25a}$$

即

$$f(\xi) = -2k \tanh k(\xi - \xi_0) \tag{8.4.25b}$$

取 $\xi_0 = 0$ 得到

$$u_2 = \frac{\partial w_2}{\partial x} = -2k^2 \mathrm{sech}^2 k(x - 4k^2 t) \tag{8.4.25c}$$

上式即为 KdV 方程的 “孤子” 解, 与式 (8.2.17c) 完全一样.

### 8.4.4　非线性迭加公式

利用自 Bäcklund 变换, 可以从非线性偏微分方程的一个平凡解 $u_1$, 求出另一个非平凡解 $u_2$. 同样可从已求得的 $u_2$, 求出方程新的解. 注意到自 Bäcklund 变换含有任意一个常数, 选择不同的常数, 可以得到不同的解.

首先考虑 Sine-Gordon 方程的自 Bäcklund 变换方程 (8.4.11c), 设想选择不同常数 $a_1$ 和 $a_2$, 从已知解 $u_1$ 可以求得 $u_2$ 和 $u_3$, 再由求得的 $u_2$ 和 $u_3$ 分别选择常数为 $a_2$ 和 $a_1$ 而得到 $u_4$ 和 $u_5$. 注意到这些解仅仅是选择不同的常数形成的, 应该没有本质的差别, 如果选择合适的积分常数, 可使 $u_4 = u_5$. 这一过程可用图 8.4.1 表示.

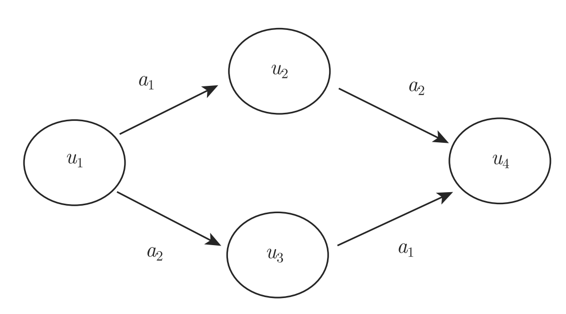



图 8.4.1　从 $u_1$ 到 $u_4$ 过程

这一过程的数学表达式可由自 Bäcklund 变换方程 (8.4.11c) 的第二式得到 (也可用第一式)

$$\frac{\partial u_2}{\partial \eta}=\frac{\partial u_1}{\partial \eta}-2a_1\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \tag{8.4.26a}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial \eta}=\frac{\partial u_1}{\partial \eta}-2a_2\sin\left(\frac{u_1+u_3}{2}\right) \tag{8.4.26b}$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial \eta}=\frac{\partial u_2}{\partial \eta}-2a_2\sin\left(\frac{u_4+u_2}{2}\right) \tag{8.4.26c}$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial \eta}=\frac{\partial u_3}{\partial \eta}-2a_1\sin\left(\frac{u_4+u_3}{2}\right) \tag{8.4.26d}$$

方程 (8.4.26a)~(8.4.26d) 称为 Sine-Gordon 方程自 Bäcklund 变换的可交换性. 方程 (8.4.26a) 与 (8.4.26c) 相加得到

$$\frac{\partial(u_4-u_1)}{\partial \eta}=-2\left[a_1\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)+a_2\sin\left(\frac{u_4+u_2}{2}\right)\right] \tag{8.4.27a}$$

方程 (8.4.26b) 与 (8.4.26d) 相加得到

$$\frac{\partial(u_4-u_1)}{\partial \eta}=-2\left[a_1\sin\left(\frac{u_3+u_4}{2}\right)+a_2\sin\left(\frac{u_3+u_1}{2}\right)\right] \tag{8.4.27b}$$

方程 (8.4.27a) 与 (8.4.27b) 左边相等, 故右边也相等, 得到

$$a_1\left[\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)-\sin\left(\frac{u_3+u_4}{2}\right)\right]=a_2\left[\sin\left(\frac{u_3+u_1}{2}\right)-\sin\left(\frac{u_4+u_2}{2}\right)\right]$$

利用三角函数的关系, 上式可简化为

$$a_1\sin\left(\frac{u_4-u_1}{4}-\frac{u_2-u_3}{4}\right)=a_2\sin\left(\frac{u_4-u_1}{4}+\frac{u_2-u_3}{4}\right) \tag{8.4.28a}$$

得到上式, 已利用了关系

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{8.4.28b}$$

由方程 (8.4.28a) 可求得

$$\tan\left(\frac{u_4-u_1}{4}\right)=\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\tan\left(\frac{u_2-u_3}{4}\right) \tag{8.4.28c}$$

上式称为 Sine-Gordon 方程解的迭加公式. 由此可以根据 $u_1$, $u_2$ 和 $u_3$ 找到 Sine-Gordon 方程的一个新解 $u_4$, 而且只要通过代数计算即可.

**例 8.4.5** Sine-Gordon 方程的一个平凡解为 $u_1=0$, 取 $a_1$ 和 $a_2$ 为

$$a_1=\sqrt{\frac{1+c}{1-c}};\ a_2=\sqrt{\frac{1-c}{1+c}} \tag{8.4.29a}$$

从方程 (8.4.14d) 得到两个解

$$\tan\frac{u_2}{4}=\exp[\delta(x-ct)] \tag{8.4.29b}$$

和

$$\tan\frac{u_3}{4}=\exp[\delta(x+ct)] \tag{8.4.29c}$$

其中 $\delta=1/\sqrt{1-c^2}$. 由方程 (8.4.28c) 得到第四个解

$$\tan\frac{u_4}{4}=-\frac{1}{c}\frac{\sinh\delta ct}{\cosh\delta x} \tag{8.4.30a}$$

上式表示一个正扭结孤波和一个反扭结孤波的迭加, 称为 Sine-Gordon 方程的双扭结解. 当 $t\to-\infty$ 时, 上式近似为

$$\lim_{t\to-\infty}\tan\frac{u_4}{2}=\frac{1}{2c\sinh 2\delta x}[\mathrm{e}^{\delta(x-ct)}-\mathrm{e}^{-\delta(x+ct)}] \tag{8.4.30b}$$

第一项表示一个向 $x$ 轴正方向传播的正扭结孤波, 而第二项表示向 $x$ 轴负方向传播的反扭结孤波; 当 $t\to+\infty$ 时, 方程 (8.4.30a) 近似为

$$\lim_{t\to+\infty}\tan\frac{u_4}{2}=-\frac{1}{2c\sinh 2\delta x}[\mathrm{e}^{\delta(x+ct)}-\mathrm{e}^{-\delta(x-ct)}] \tag{8.4.30c}$$

第一项表示一个向 $x$ 轴负方向传播的正扭结孤波, 第二项表示向 $x$ 轴正方向传播的反扭结孤波. 当 $t$ 有限, 正扭结孤波与反扭结孤波相互迭加, 由式 (8.4.30a) 描述.

对 KdV 方程, 同样可得到迭加公式. 利用图 8.4.1 的构想, 由自 Bäcklund 变换方程 (8.4.22e) 得到四个方程

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}=-\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{1}{2}(w_1-w_2)^2+2\lambda_1 \tag{8.4.31a}$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial x}=-\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{1}{2}(w_1-w_3)^2+2\lambda_2 \tag{8.4.31b}$$

$$\frac{\partial w_4}{\partial x}=-\frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{1}{2}(w_2-w_4)^2+2\lambda_2 \tag{8.4.31c}$$

$$\frac{\partial w_4}{\partial x}=-\frac{\partial w_3}{\partial x}+\frac{1}{2}(w_4-w_3)^2+2\lambda_1 \tag{8.4.31d}$$

方程 (8.4.31c) 减去方程 (8.4.31a) 得

$$\frac{\partial w_4}{\partial x}-\frac{\partial w_1}{\partial x}=\frac{1}{2}(w_2-w_4)^2-\frac{1}{2}(w_1-w_2)^2+2(\lambda_2-\lambda_1) \tag{8.4.32a}$$

方程 (8.4.31d) 减去方程 (8.4.31b) 得

$$\frac{\partial w_4}{\partial x}-\frac{\partial w_1}{\partial x}=\frac{1}{2}(w_3-w_4)^2-\frac{1}{2}(w_1-w_3)^2-2(\lambda_2-\lambda_1) \tag{8.4.32b}$$

上二式左边相同, 因此右边应相等

$$(w_3-w_4)^2-(w_1-w_3)^2-4(\lambda_2-\lambda_1)=(w_2-w_4)^2-(w_1-w_2)^2+4(\lambda_2-\lambda_1)$$

因此得到

$$(w_4-w_1)(w_3-w_2)=4(\lambda_1-\lambda_2) \tag{8.4.33a}$$

即

$$w_4=w_1+\frac{4(\lambda_1-\lambda_2)}{w_3-w_2} \tag{8.4.33b}$$

上式两边对 $x$ 求导并利用 $u=\partial w/\partial x$

$$u_4=u_1+\frac{4(\lambda_1-\lambda_2)}{(w_3-w_2)^2}(u_1-u_2) \tag{8.4.33c}$$

即为 KdV 方程的非线性迭加公式.

## 习　题　八

8.1 求下列方程的行波解

(a) Boussinesq 方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\beta\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}=0,\ \ (\alpha,\beta>0)$$

(b) mKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

(c) Fisher 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-ku(1-u)=0$$

提示: 设

$$u(\xi)=\frac{B\exp[b(\xi-\xi_0)]}{\{1+\exp[a(\xi-\xi_0)]\}^2}$$

其中 $B$, $b$ 和 $a$ 为待定常数, $\xi_0$ 为积分常数.

8.2 作函数变换

$$\tan\frac{u}{4}=\frac{g}{f}$$

证明 Sine-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sin u$$

的双线性形式为

$$(D_x^2 - D_t^2 - 1)(f \cdot g) = 0$$
$$(D_x^2 - D_t^2)[(f \cdot f) - (g \cdot g)] = 0$$

8.3 考虑散射问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + k^2 u = V(x)u,\ x \in (-\infty, \infty)$$
$$u(x,k) \sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\ x \to +\infty$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{dx^2} + k^2 v = V(x)v,\ x \in (-\infty, \infty)$$
$$v(x,k) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},\ x \to -\infty$$

证明 $u$ 和 $v$ 满足 Volterra 方程:

$$u(x,k) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \int_x^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} V(y)u(y,k)\mathrm{d}y$$
$$v(x,k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin k(x-y)}{k} V(y)v(y,k)\mathrm{d}y$$

8.4 考虑当 $x \to -\infty$ 时的逆散射数据, 与方程 (8.3.4a) 相应的方程写作

$$\phi_-(x,k) = \exp(-\mathrm{i}kx) + \int_{-\infty}^{x} L(x,y)\exp(-\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y$$

导出 $L(x,y)$ 满足的方程和边界条件.

8.5 解积分方程

(a) $K(x,z) + \mathrm{e}^{-(x+z)} + \int_x^{\infty} K(x,y)\mathrm{e}^{-(y+z)}\mathrm{d}y = 0$

(b) $K(x,z) - \mathrm{e}^{-(x+z)} - \int_{-z}^{x} K(x,y)\mathrm{e}^{-(y+z)}\mathrm{d}y = 0$

8.6 求势 $u(x) = -U_0\delta(x)$, $(U_0 > 0)$ 的反射系数 $b(k)$、离散本征值 $\nu$ 以及相应的本征函数的归一化常数.

8.7 解初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$
$$u(x,t)|_{t=0} = -U_0\delta(x),\ U_0 > 0$$

8.8 设 $w_0 = 0$, $w_1 = -2\tanh(x-4t)$, $w_2 = -4\coth(2x-32t)$, $\lambda_1 = -1$ 以及 $\lambda_2 = -4$. 根据 KdV 方程的迭加公式证明

$$w_3 = -\frac{6}{2\coth(2x-32t) - \tanh(x-4t)}$$
$$u_3 = -12\frac{3 + 4\cosh(2x-8t) + \cosh(4x-64t)}{[3\cosh(x-28t) + \cosh(3x-36t)]^2}$$

# 参 考 文 献

1. 邵惠民. 数学物理方法. 北京：科学出版社, 2010

2. 吴崇试. 数学物理方法. 北京：北京大学出版, 1999

3. 吴崇试. 数学物理方法专题 —— 数理方程与特殊函数. 北京：北京大学出版社, 2012

4. 王怀玉. 物理学中的数学方法. 北京：科学出版社, 2013

5. E. 鲁滨主编. 物理学中的数学. 北京：科学出版社, 1981

6. 李政道. 物理学中的数学方法. 南京：江苏科学技术出版社, 1980

7. R. 柯朗, D. 希尔伯特. 数学物理方法 (上、下) . 北京：科学出版社, 2012

8. F. W. 拜仑, R. W. 富勒. 物理学中的数学方法 (一、二卷) . 北京：科学出版社, 1982

9. 康盛亮, 桂子鹏. 数学物理方程的近代分析方法. 上海：同济大学出版社, 1991

10. D. G. 鲁恩伯杰. 最优化的矢量空间方法. 北京: 科学出版社, 1987

11. 徐利治主编. 现代数学手册 — 经典数学卷. 武汉：华中科技大学出版社, 1999

12. 马振华主编. 现代应用数学手册 — 现代应用分析卷. 北京：清华大学出版社, 1998

13. 金忠青, 周志芳. 工程水力学反问题. 南京：河海大学出版社, 1997

14. 刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程. 北京：北京大学出版社, 2000

15. 陈永刚. Laplace 方程反问题的基本解方法. 兰州：兰州大学博士论文, 2012

16. 张宏武. 椭圆方程柯西问题的正则化方法. 兰州：兰州大学博士论文, 2013

17. 程建春. 声学原理. 北京: 科学出版社, 2012

18. 程建春. 理论物理导论. 北京: 科学出版社, 2007

19. 吕涛, 黄晋. 积分方程的高精度算法. 北京：科学出版社, 2013

20. R. F 哈林登. 计算电磁场的矩量法. 北京：国防工业出版社, 1981

21. 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 郑宋穆, 谭永基. 数学物理方程. 北京：高等教育出版社, 2012

22. 姚振汉, 王海涛. 边界元. 北京：高等教育出版社, 2010

23. 曾攀. 有限元基础教程. 北京：高等教育出版社, 2009

24. E. Zauderer. Partial Differential Equations of Applied Mathematics. 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1989

25. I. Stakgold. Green's Functions and Boundary Value Problems. 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, 1997

26. M. H. Holmes. Introduction to Perturbation Methods. New York: Springer-Verlag, 1995

27. A. Kirsch. An introduction to the mathematical theory of inverse problem. New York: Springer-Verlag, 1996

28. H. E. Hernandez-Figueroa, M. Zamboni-Rached, E. Recami (eds). Localized Waves. New Nork: Wiley, 2007

29. D. Colton, R. Kress. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, New York: Springer-Verlag, 1991

30. I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik. Table of Integrals. 7th ed. Series, and Products, Elsevier, 2007

# 《现代物理基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1. 现代声学理论基础　马大猷　著　2004.03
2. 物理学家用微分几何 (第二版)　侯伯元, 侯伯宇　著　2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法　程建春　编著　2004.08
4. 计算物理学　马文淦　编著　2005.05
5. 相互作用的规范理论 (第二版)　戴元本　著　2005.07
6. 理论力学　张建树, 等　编著　2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论 (上册 · 第二版)　梁灿彬, 周彬　著　2006.01
8. 物理学中的群论 (第二版)　马中骐　著　2006.02
9. 辐射和光场的量子统计　曹昌祺　著　2006.03
10. 实验物理中的概率和统计 (第二版)　朱永生　著　2006.04
11. 声学理论与工程应用　朱海潮, 等　编著　2006.05
12. 高等原子分子物理学 (第二版)　徐克尊　著　2006.08
13. 大气声学 (第二版)　杨训仁, 陈宇　著　2007.06
14. 输运理论(第二版)　黄祖洽　著　2008.01
15. 量子统计力学 (第二版)　张先蔚　编著　2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论　王怀玉　著　2008.05
17. 激光光散射谱学　张明生　著　2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论　曹昌祺　著　2008.07
19. 狭义相对论(第二版)　刘　辽, 等　编著　2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞　王永久　著　2008.08
21. 路径积分与量子物理导引　侯伯元, 等　著　2008.09
22. 量子光学导论　谭维翰　著　2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法　熊秉衡, 李俊昌　编著　2009.01
24. 实验数据多元统计分析　朱永生　编著　2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论(中册 · 第二版)　梁灿彬, 周彬　著　2009.03

| | | |
|---|---|---|
| 26. 中子引发轻核反应的统计理论 | 张竞上　著 | 2009.03 |
| 27. 工程电磁理论 | 张善杰　著 | 2009.08 |
| 28. 微分几何入门与广义相对论(下册 · 第二版) | 梁灿彬，周彬　著 | 2009.08 |
| 29. 经典电动力学 | 曹昌祺　著 | 2009.08 |
| 30. 经典宇宙和量子宇宙 | 王永久　著 | 2010.04 |
| 31. 高等结构动力学(第二版) | 李东旭　著 | 2010.09 |
| 32. 粉末衍射法测定晶体结构(第二版 · 上、下册) | 梁敬魁　编著 | 2011.03 |
| 33. 量子计算与量子信息原理 | Giuliano Benenti 等　著 | |
| ——第一卷：基本概念 | 王文阁，李保文　译 | 2011.03 |
| 34. 近代晶体学(第二版) | 张克从　著 | 2011.05 |
| 35. 引力理论(上、下册) | 王永久　著 | 2011.06 |
| 36. 低温等离子体 | B. M. 弗尔曼，И. M. 扎什京　编著 | |
| ——等离子体的产生、工艺、问题及前景 | 邱励俭　译 | 2011.06 |
| 37. 量子物理新进展 | 梁九卿，韦联福　著 | 2011.08 |
| 38. 电磁波理论 | 葛德彪，魏　兵　著 | 2011.08 |
| 39. 激光光谱学 | W. 戴姆特瑞德　著 | |
| ——第 1 卷：基础理论 | 姬　扬　译 | 2012.02 |
| 40. 激光光谱学 | W. 戴姆特瑞德　著 | |
| ——第 2 卷：实验技术 | 姬　扬　译 | 2012.03 |
| 41. 量子光学导论(第二版) | 谭维翰　著 | 2012.05 |
| 42. 中子衍射技术及其应用 | 姜传海，杨传铮　编著 | 2012.06 |
| 43. 凝聚态、电磁学和引力中的多值场论 | H. 克莱纳特　著 | |
| | 姜　颖　译 | 2012.06 |
| 44. 反常统计动力学导论 | 包景东　著 | 2012.06 |
| 45. 实验数据分析(上册) | 朱永生　著 | 2012.06 |
| 46. 实验数据分析(下册) | 朱永生　著 | 2012.06 |
| 47. 有机固体物理 | 解士杰，等　著 | 2012.09 |
| 48. 磁性物理 | 金汉民　著 | 2013.01 |
| 49. 自旋电子学 | 翟宏如，等　编著 | 2013.01 |

50. 同步辐射光源及其应用(上册)　　麦振洪，等　著　　2013.03
51. 同步辐射光源及其应用(下册)　　麦振洪，等　著　　2013.03
52. 高等量子力学　　汪克林　著　　2013.03
53. 量子多体理论与运动模式动力学　　王顺金　著　　2013.03
54. 薄膜生长(第二版)　　吴自勤，等　著　　2013.03
55. 物理学中的数学物理方法　　王怀玉　著　　2013.03
56. 物理学前沿——问题与基础　　王顺金　著　　2013.06
57. 弯曲时空量子场论与量子宇宙学　　刘　辽，黄超光　著　　2013.10
58. 经典电动力学　　张锡珍，张焕乔　著　　2013.10
59. 内应力衍射分析　　姜传海，杨传铮　编著　　2013.11
60. 宇宙学基本原理　　龚云贵　著　　2013.11
61. B 介子物理学　　肖振军　著　　2013.11
62. 量子场论与重整化导论　　石康杰，等　编著　　2014.06
63. 粒子物理导论　　杜东生，杨茂志　著　　2015.01
64. 固体量子场论　　史俊杰，等　著　　2015.03
65. 物理学中的群论——有限群篇(第三版)　　马中骐　著　　2015.03
66. 中子引发轻核反应的统计理论(第二版)　　张竞上　著　　2015.03
67. 自旋玻璃与消息传递　　周海军　著　　2015.06
68. 粒子物理学导论　　肖振军，吕才典　著　　2015.07
69. 量子系统的辛算法　　丁培柱　编著　　2015.07
70. 原子分子光电离物理及实验　　汪正民　著　　2015.08
71. 量子场论　　李灵峰　著　　2015.09
72. 原子核结构　　张锡珍，张焕乔　著　　2015.10
73. 物理学中的群论——李代数篇(第三版)　　马中骐　著　　2015.10
74. 量子场论导论　　姜志进　编著　　2015.11
75. 高能物理实验统计分析　　朱永生　著　　2016.01
76. 数学物理方程及其近似方法(第二版)　　程建春　著　　2016.06

(O-6521.31)

www.sciencep.com


ISBN 978-7-03-049144-2

科学数理分社
责任编辑：刘凤娟
电话：(010) 64033515
Email：liufengjuan@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等物理

定　价：199.00 元